Մաթեմատիկայի Օլիմպիադա,

Դպրոցական Փուլ, 10-րդ դասարան

1. Հայտնի է, որ $x+y=4$, $xy=1$: Գտնել x^3+xy^4 արտահայտության արժեքը.

   1) 64 2) 62 3) 52 4) այլ պատասխան

   Լուծում: Ունենք՝ $x^3+xy^4=x^3+y^3=(x+y)((x+y)^2-3xy)=\mathbf{52}$:

2. Գտնել $x^3-7x^2+2x=0$ հավասարման բոլոր արմատների քառակուսիների գումարը:

   1) 53 2) 49 3) 45 4) այլ պատասխան

   Լուծում: Տրված հավասարման մի լուծումը 0-ն է, մյուս լուծումները $x^2-7x+2=0$ հավասարման արմատներն են: $x^2-7x+2=0$ հավասարման արմատները նշանակենք α և β: Ըստ Վիետի թեորեմի՝ $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\mathbf{45}$:

3. Գտնել $|x+5|+|3-x|$ արտահայտության փոքրագույն արժեքը:

   1) 0 2) 8 3) 2 4) այլ պատասխան

   Լուծում: Հայտնի է, որ ցանկացած a և b իրական թվերի համար տեղի ունի $|a+b|\le|a|+|b|$ անհավասարությունը: Հետևաբար՝ $|x+5|+|3-x|\ge|x+5+3-x|=8$: Ընդ որում, կարելի է գտնել x-ի արժեք, որի դեպքում $|x+5|+|3-x|=8$ (օրինակ՝ $x=0$): Հետևաբար, տրված արտահայտության փոքրագույն արժեքը **8**-ն է:

4. a-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում $P(x)=x^3-(2a+1)x^2+ax-2$ բազմանդամը կբաժանվի $x+2$ երկանդամի վրա:

   1) -1,4 2) -2 3) $\frac{1}{3}$ 4) այլ պատասխան

   Լուծում: Օգտվելով Բեզուի թեորեմից, ստանում ենք, որ $P(-2)=0$, այսինքն՝
   $-8-4(2a+1)-2a-2=0$, որտեղից՝ $a=\mathbf{-1,4}$:

5. ABC եռանկյան AC կողմի երկարությունը հավասար է այդ եռանկյան արտագծած շրջանագծի շառավղին: Քանի՞ անգամ է AB կողմի երկարությունը մեծ այդ եռանկյան A գագաթից տարված բարձրության երկարությունից:

   1) 3 2) 2 3) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 4) այլ պատասխան

   Լուծում: Ըստ սինուսների թեորեմի՝ $\frac{AC}{sinB}=2R$, որտեղից՝ $sinB=\frac{AC}{2R}=\frac{R}{2R}=\frac{1}{2}$, հետևաբար՝ $\angle B=30°$ կամ $\angle B=150°$: Երկու դեպքում էլ AB կողմի երկարությունը **2** անգամ մեծ է A կետից տարված բարձրությունից:

6. Գտնել այն բոլոր n բնական երկնիշ թվերի քանակը, որոնցից յուրաքանչյուրի համար 7^n-5^n թիվը բաժանվում է 8-ի:

   1) 90 2) 45 3) 30 4) այլ պատասխան

   Լուծում: Եթե n -ը զույգ է, ապա $n=2k$ $(k\in N)$, հետևաբար $7^n-5^n=49^k-25^k$, որը բաժանվում է $49-25=24$-ի վրա, հետևաբար նաև 8-ի վրա: Եթե n -ը կենտ է, ապա $n=2k+1$ $(k\in N)$, հետևաբար $7^n-5^n=7\cdot49^k-5\cdot25^k=2\cdot49^k+5\cdot(49^k-25^k)$: Քանի որ 49^k-25^k թիվը բաժանվում է 8-ի, իսկ $2\cdot49^k$ -ը չի բաժանվում 8-ի, ապա այս դեպքում 7^n-5^n թիվը չի բաժանվի 8—ի:

   Այսպիսով, n-ը երկնիշ զույգ թիվ է: Այդպիսի թվերի քանակը **45** է:

7. Գտնել $-1^2+2^2-3^2+4^2-5^2+6^2+\dots-99^2+100^2$ արտահայտության արժեքը:

1) 10100 2) 10000 3) 9999 4) այլ պատասխան

Լուծում:

$$-1^2+2^2-3^2+4^2-5^2+6^2+\dots-99^2+100^2=$$
$$=(2-1)(2+1)+(4-3)(4+3)+(6-5)(6+5)\dots+(100-99)(100+99)=$$
$$=1+2+3+4+5+6+\dots+99+100=\frac{100\cdot 101}{2}=\mathbf{5050}:$$

8. Գտնել $3^{2022}+3^{2021}+2^{2022}+2^{2021}$ թվի մնացորդը 10-ի բաժանելիս:

1) 2 2) 4 3) 0 4) այլ պատասխան

Լուծում: Քանի որ 2^4-ը վերջանում է 6-ով, ապա $2^{2020}=(2^4)^{505}$-ը վերջանում է 6-ով: Հետևաբար, $2^{2022}+2^{2021}=2^{2020}\cdot(2^2+2)=2^{2020}\cdot 6$ թիվը վերջանում է 6-ով:

Քանի որ 3^4-ը վերջանում է 1-ով, ապա $3^{2020}=(3^4)^{505}$-ը վերջանում է 1-ով: Հետևաբար, $3^{2022}+3^{2021}=3^{2020}\cdot(3^2+3)=3^{2020}\cdot 12$ թիվը վերջանում է 2-ով:

Այսպիսով, $3^{2022}+3^{2021}+2^{2022}+2^{2021}$ թիվը վերջանում է **8**-ով:

9. Գտնել $\{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$ բազմության այն բոլոր ենթաբազմությունների քանակը, որոնցից յուրաքանչյուրը պարունակում է գոնե մեկ պարզ թիվ:

1) 1024 2) 992 3) 960 4) այլ պատասխան

Լուծում: Բոլոր ենթաբազմությունների քանակից հանենք այն բոլոր ենթաբազմությունների քանակը, որոնք պարզ թիվ չեն պարունակում: Կստանանք՝ $2^{10}-2^6=\mathbf{960}$:

10. $ABCD$ քառանկյան անկյունագծերը փոխուղղահայաց են: Գտնել AD կողմի երկարությունը, եթե $AB=3$, $BC=4$, $CD=5$:

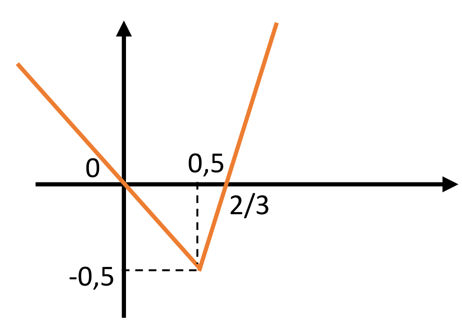
1) 4 2) $3\sqrt{2}$ 3) $4\sqrt{2}$ 4) այլ պատասխան

Լուծում: Օգտվելով Պյութագորասի թեորեմից, կարելի է ապացուցել, որ եթե քառանկյան անկյունագծերը փոխուղղահայաց են, ապա նրա հանդիպակաց կողմերի քառակուսիների գումարները իրար հավասար են: Այսինքն՝ $AB^2+CD^2=BC^2+AD^2$, որտեղից՝ $AD=\mathbf{3\sqrt{2}}$:

11. Հայտնի է, որ $y=x-1+|2x-1|$ ֆունկցիայի գրաֆիկով և OX առանցքով սահմանափակված պատկերի մակերեսը կարելի է ներկայացնել $\frac{m}{n}$ տեսքով, որտեղ m-ը և n-ը իրար հետ փոխադարձաբար պարզ բնական թվեր են: Գտնել $m+n$ արտահայտության արժեքը:

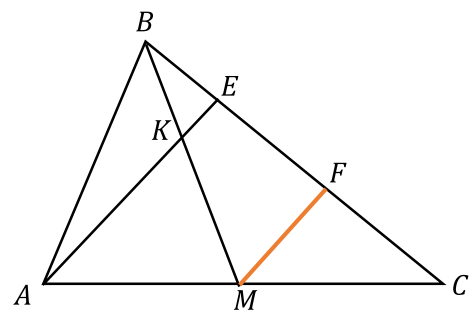
1) 7 2) 8 3) 9 4) այլ պատասխան

Լուծում: Նախ կառուցենք $y=x-1+|2x-1|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը: Եթե $x\ge\frac{1}{2}$, ապա $y=3x-2$, իսկ եթե $x\le\frac{1}{2}$, ապա $y=-x$: Հետևաբար այդ ֆունկցիայի գրաֆիկը կունենա նկարում պատկերված տեսքը: Այսպիսով, տրված ֆունկցիայի գրաֆիկով և OX առանցքով սահմանափակված պատկերը եռանկյուն է, որի կողմը $\frac{2}{3}$ է, իսկ նրան տարված բարձրությունը՝ $\frac{1}{2}$: Այդ եռանկյան մակերեսը կլինի $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$: Հետևաբար՝ $m=1, n=6, m+n=\mathbf{7}$:



12. ABC եռանկյան BM միջնագծի վրա վերցված է K կետ այնպես, որ $\frac{BK}{KM}=\frac{2}{5}$: Հայտնի է, որ AK ուղիղը BC կողմը հատում է E կետում: Քանի՞ անգամ է BC կողմի երկարությունը մեծ BE կողմի երկարությունից:

1) 3 2) 5 3) 6 4) այլ պատասխան



Լուծում: M կետից տանենք AE ին զուգահեռ ուղիղ, որի հատման կետը BC-ի հետ նշանակենք F-ով: Քանի որ $AM = MC$, ապա ըստ Թալեսի թեորեմի, ունենք՝ $EF = FC$: Քանի որ $BK:KM = 2/5$, ապա, ըստ Թալեսի ընդհանրացված թեորեմի, $BE:EF = \frac{2}{5}$: Այսպիսով, ընդունելով $BE = 2x$, կստանանք՝ $EF = FC = 5x$: Հետևաբար՝ $BC:BE = \frac{12x}{2x} = \mathbf{6}$:

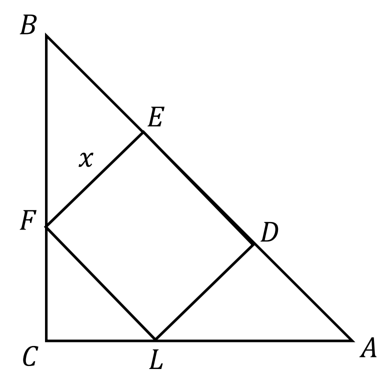
13. Գտնել $y = 3x - 1$ և $y = 2x$ ուղիղների հատման կետի հեռավորությունը $y = x$ ուղղից:

1) 1 2) 0,5 3) $\sqrt{0{,}5}$ 4) այլ պատասխան

Լուծում: $y = 3x - 1$ և $y = 2x$ ուղիղների հատման կետը $M(1;\ 2)$ կետն է: Դիտարկենք $A(1;1)$ և $B(2;2)$ կետերը, որոնք գտնվում են $y = x$ ուղղի վրա: Անհրաժեշտ է գտնել MAB եռանկյան M կետից տարված բարձրության երկարությունը: Քանի որ MAB-ն M ուղիղ անկյունով հավասարասրուն ուղղանկյուն եռանկյուն է, ապա նրա ներքնաձիգին տարված բարձրությունը հավասար է ներքնաձիգի կեսին: Իսկ ներքնաձիգի երկարությունը $\sqrt{2}$ է: Հետևաբար, M կետի հեռավորությունը AB ուղղից կլինի $\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\mathbf{0,5}}$:

14. ABC եռանկյան մեջ՝ $AC = 6$, $BC = 8$, $AB = 10$: Այդ եռանկյանը ներգծած է ուղղանկյուն այնպես, որ նրա երկու գագաթները գտնվում են AB կողմի վրա, իսկ մյուս երկու գագաթները՝ AC և BC կողմերի վրա: Գտնել այդպիսի ուղղանկյան մակերեսի հնարավոր ամենամեծ արժեքը:

1) 6 2) 9 3) 12 4) այլ պատասխան

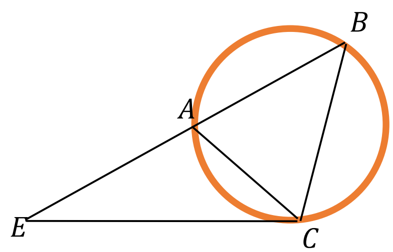


Լուծում: Պարզ է, որ $\angle C = 90°$: Նշանակենք՝ $EF = x$: Նկատենք, որ $\triangle BEF$ և $\triangle LDA$ նման են $\triangle BCA$-ին: Օգտվելով նմանությունից, կարող ենք գտնել BE-ն և AD-ն x-ի միջոցով՝ $BE = \frac{3x}{4}$, $AD = \frac{4x}{3}$: Հետևաբար՝ $ED = AB - BE - AD = 10 - \frac{25}{12}x$: Այսպիսով, $DEFL$ ուղղանկյան մակերեսը կլինի՝ $x(10 - \frac{25}{12}x)$: Ստացված արտահայտության միջոցով տրվում է քառակուսային ֆունկցիա, որն ունի մեծագույն արժեք (քանի որ x^2-ու գործակիցը բացասական է): Այդ ֆունկցիան իր մեծագույն արժեքն ընդունում է այն կետում, որն OX առանցքի վրա գտնվում է այդ ֆունկցիայի զրոների միջնակետում: Այդ ֆունկցիայի զրոներն են՝ 0 և $\frac{24}{5}$: Հետևաբար, ֆունկցիան իր մեծագույն արժեքը կընդունի $\frac{12}{5}$ կետում: Այսինքն, մեծագույն արժեքը կլինի $\frac{12}{5}\left(10 - \frac{25}{12} \cdot \frac{12}{5}\right) = \mathbf{12}$:

15. ABC սուրանկյուն եռանկյան արտագծած շրջանագծի O կենտրոնի հեռավորությունը AB կողմից 15 սմ է, ընդ որում AB կողմի երկարությունը 30 սմ է: Հայտնի է, որ BA ճառագայթը C

կետից շրջանագծին տարված շոշափողի հետ կազմում է 35°-ի անկյուն: Գտնել BAC անկյան աստիճանային չափը:

1) 45 2) 65 3) 85 4) այլ պատասխան



Լուծում: Քանի որ O կենտրոնի հեռավորությունը AB կողմից հավասար է նրա կեսին, ապա $\angle AOB = 90°$: Հետևաբար՝ $\angle ACB = 45°$: Նշանակենք՝ $\angle ABC = x$, այդ դեպքում՝ $\angle ACE = x$: Քանի որ $\angle E = 35°$, ապա $\angle BAC = x + 35°$: Այժմ օգտվենք ABC եռանկյան անկյունների գումարից: Կստանանք՝ $x + 35° + x + 45° = 180°$: Այստեղից՝ $x = 50°$: Հետևաբար՝ $\angle BAC = x + 35° = \mathbf{85}°$:

16. x-ը և y-ը այնպիսի ամբողջ թվեր են, որ $17x + 25y = 1$ և $x + 2y > 0$: Գտնել $x + 2y$ արտահայտության ամենափոքր արժեքը: 8

Լուծում: Ունենք՝ $18x + 27y = 1 + x + 2y$, հետևաբար $1 + x + 2y$-ը բաժանվում է 9-ի, այսինքն, $x + 2y$-ը 9-ի բաժանելիս տալիս է 8 մնացորդ: Հաշվի առնելով, որ $x + 2y > 0$, կստանանք՝ $x + 2y \geq 8$: Մյուս կողմից, կարող ենք բերել տրված հավասարման լուծման օրինակ, որ $x + 2y = 8$: Այդ օրինակը ստանալու համար անհրաժեշտ է լուծել $x + 2y = 8$ և $17x + 25y = 1$ հավասարումների համակարգը ($x = -22, y = 15$): Պատասխան՝ **8**:

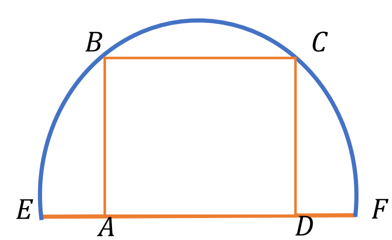
17. Գտնել բնական թվերի այն բոլոր (a, b) զույգերի թիվը, որոնց համար տեղի ունեն $a < b \leq 50$, $b \leq 2a$ անհավասարությունները: 625

Լուծում: Դիտարկենք երկու դեպք: Եթե a, b թվերը մեծ են 25-ից, ապա այդպիսի զույգերի քանակը կլինի՝ $C_{25}^2 = \frac{25\cdot24}{2}$:

Եթե $a \leq 25$, ապա յուրաքանչյուր ֆիքսված a-ի համար b թիվը կարելի է ընտրել a հատ ձևով՝ $a + 1, a + 2, \ldots, 2a$: Հետևաբար, այս դեպքում ընտրությունների քանակը կլինի $1 + 2 + 3 + \cdots + 25 = \frac{25\cdot26}{2}$:

Այս երկու դեպքերը միասին վերցրած կստանանք $\frac{25\cdot24}{2} + \frac{25\cdot26}{2} = 25^2 = \mathbf{625}$ ընտրություն:

18. $ABCD$ ուղղանկյան A և D գագաթները գտնվում են 1 սմ շառավղով կիսաշրջանագծի EF տրամագծի վրա, իսկ B և C գագաթները՝ կիսաշրջանագծի վրա (տես՝ նկարը): Դիցուք $ABCD$ ուղղանկյան պարագծի հնարավոր մեծագույն արժեքը P սմ է: Հայտնի է, որ P թիվը կարելի է գրել $a\sqrt{b}$ տեսքով, որտեղ a-ն և b-ն բնական թվեր են, b-ն պարզ թիվ է: Գտնել $a + b$-ն: 7



Լուծում: Շրջանագծի կենտրոնը նշանակենք O-ով: Նշանակենք՝ $AO = x$, $AB = y$: Ըստ Պյութագորասի թեորեմի՝ $x^2 + y^2 = 1$: Ուղղանկյան պարագիծը կլինի՝ $P = 4x + 2y$: Գտնենք P-ի այն արժեքները, որոնց համար հետևյալ համակարգն ունի լուծում դրական թվերի բազմության մեջ.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 4x + 2y = P \end{cases}$$

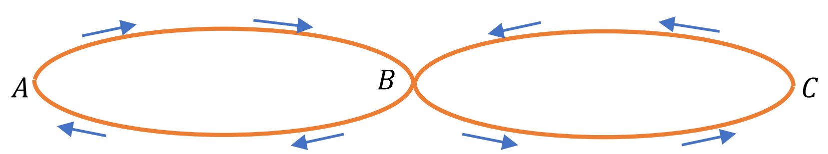
Ունենք՝ $y = \frac{P}{2} - 2x, x^2 + (\frac{P}{2} - 2x)^2 = 1$: Ստացված քառակուսի հավասարումը պետք է ունենա լուծում: Այն գրենք ստանդարտ տեսքով՝ $5x^2 - 2Px + \frac{P^2}{4} - 1 = 0$: Որպեսզի այս հավասարումը ունենա լուծում, անհրաժեշտ է, որ նրա տարբերիչը լինի ոչբացասական, այսինքն՝ $4P^2 - 20\left(\frac{P^2}{4} - 1\right) \geq 0, 20 - P^2 \geq 0$, որտեղից՝ $P \leq 2\sqrt{5}$: Մնում է ցույց տալ, որ $P = 2\sqrt{5}$ դեպքում վերը նշված համակարգն ունի լուծում (դրական թվերի բազմության մեջ): Նշված քառակուսի հավասարման լուծումը կլինի՝ $x = \frac{P}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, որտեղից՝ $y = \frac{P}{2} - 2x = \frac{\sqrt{5}}{5}$: Դժվար չէ ստուգել, որ այս արժեքները բավարարում են վերը նշված համակարգին: Այսպիսով, P-ի մեծագույն արժեքը կլինի՝ $P = 2\sqrt{5}$: Հետևաբար՝ $a = 5, b = 2, a + b = \mathbf{7}$:

19. Դիտարկենք բոլոր (a, b) տեսքի թվազույգերը, որտեղ a-ն և b-ն 100-ը չգերազանցող բնական թվեր են: Ամենաքիչը քանի՞ խմբի կարելի է բաժանել այդ թվազույգերն այնպես, որ միևնույն խմբում չլինեն երկու իրարից տարբեր (a, b) և (c, d) թվազույգեր, որ $a - c = 3b - 3d$: 34

Լուծում: Նկատենք, որ $(1; 1)$, $(4; 2)$, $(7; 3)$,…, $(100; 34)$ զույգերից ցանկացած երկուսը չեն կարող գտնվել նույն խմբում: Հետևաբար, խմբերի քանակը կլինի առնվազն 34: Մնում է ցույց տալ, որ այդ զույգերը կարելի է դասավորել 34 խմբերում:

Այդպիսի 34 խումբ կարելի է կառուցել հետևյալ կերպ. առաջին խմբում վերցնենք բոլոր $(1, x), (2, y), (3, z)$ տեսքի զույգերը $(x, y, z \in N, x \leq 100, y \leq 100, z \leq 100)$: Նշենք, որ այս խմբում տեղի ունի խնդրի մեջ նշված պայմանը՝ $1 - 2 \neq 3x - 3y$, $1 - 3 \neq 3x - 3z$, $2 - 3 \neq 3y - 3z$ (քանի որ $3x - 3y$-ը բաժանվում է 3-ի): Երկրորդ խմբում վերցնենք բոլոր $(4, x)$, $(5, y)$, $(6, z)$ տեսքի զույգերը $(x, y \in N, x \leq 100, y \leq 100)$, և այդպես շարունակ: 33-րդ խումբը կազմված է բոլոր $(97, x)$, $(98, y)$, $(99, z)$ տեսքի զույգերից $(x, y \in N, x \leq 100, y \leq 100, z \leq 100)$: 34-րդ խումբը կազմված է բոլոր $(100, x)$ տեսքի զույգերից: Այսպիսով կստանանք **34** խումբ:

20. Նշված պատկերը կազմված է միևնույն շրջանագծի չորս հատ իրար հավասար աղեղներից (տես՝ նկարը): Երկու հեծանվորդ միաժամանակ սկսում են շարժվել A և C կետերից նկարում սլաքներով նշված երթուղիով (նշված կորը համաչափ է AC ուղղի նկատմամբ): Հեծանվորդների արագություն-ներն են 25 մ/վ և 14 մ/վ, ընդ որում նրանք նշված երթուղիով շարժվում են անվերջ: Քանի՞ կետ կա նշված կորի վրա, որտեղ նրանք կարող են հանդիպել: (Յուրաքանչյուր հեծանվորդ A կետից B-ին հասնելուց հետո շարժվում է դեպի C կետը, իսկ C-ից B գալուց հետո շարունակում է դեպի A կետը): 11



Լուծում: Կորի ընդհանուր երկարությունը նշանակենք S մ: Նախ ապացուցենք, որ B կետը հանդիպման կետ չէ: Ենթադրենք, որ B կետում ինչ-որ պահի հանդիպել են: Սկզբում դիտարկենք այն դեպքը, երբ B կետում հանդիպումից առաջ առաջինը շարժվել է A-ից դեպի B, իսկ երկրորդը՝ C-ից դեպի B (շարժման մնացած ուղղությունների դեպքը համանման է): Այս դեպքում շարժման սկզբից մինչև այդ պահը հեծանվորդներն անցել են $nS+\frac{S}{4}$մ և $kS+\frac{S}{4}$ մ երկարությամբ ճանապարհներ (որտեղ $n, k \in N$)։ Քանի որ իրենց ծախսած ժամանակներն իրար հավասար են, ապա՝ $\frac{nS+\frac{S}{4}}{25}=\frac{kS+\frac{S}{4}}{14}$, որտեղից՝ $14(4n+1)=25(4k+1)$, որը հնարավոր չէ, քանի որ ձախ մասը զույգ է, իսկ աջ մասը՝ կենտ։

Այժմ գտնենք այդ կորի կետերի քանակը, որտեղ հեծանվորդները կարող են հանդիպել։ Նախ պարզ է, որ նրանք ինչ-որ կետում հանդիպում են (քանի որ արագությունները տարբեր են)։ Այդ կետը նշանակենք E_0-ով։ Քանի որ E_0-ն B-ից տարբեր է, ապա այդ կետից սկսած նրանք շարժվում են նույն ուղղությամբ։ Հետևաբար, այդ կետից հաշված հաջորդ հանդիպումը կլինի $\frac{S}{25-14}=\frac{S}{11}$ վայրկյան հետո։ Այդ ժամանակահատվածում երկրորդ հեծանվորդը կանցնի $\frac{14S}{11}$ մ։

Տրոհենք կորը 11 հավասար մասերի սկսած E_0 կետից (նկարում նշված ուղղությամբ)։ Առաջացած տրոհման կետերը նշանակենք՝ E_0, E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, …, E_{10}։ Քանի որ երկրորդ հեծանվորդը E_0-ից սկսած մինչև հաջորդ հանդիպումն անցել է $\frac{14S}{11}=S+\frac{3S}{11}$ մ երկարությամբ ճանապարհ, ապա հաջորդ հանդիպումը տեղի է ունենալու E_3 կետում։ Այնուհետև մյուս հանդիպումը E_6 կետում և այսպես շարունակ։ Այսպիսով, հանդիպման կետերը ըստ հերթականության կլինեն՝

$$E_0, E_3, E_6, E_9, E_1, E_4, E_7, E_{10}, E_2, E_5, E_8, E_0, \dots :$$

Այսպիսով, կա հանդիպման **11** կետ։