Մաթեմատիկայի Օլիմպիադա, Դպրոցական Փուլ, 9-րդ դասարան

1. Հայտնի է, որ $x+y=3$, $xy=1$: Գտնել x^3+y^3 արտահայտության արժեքը.

   1) 27 2) 18 3) 24 4) այլ պատասխան

   Լուծում: $x^3+y^3=(x+y)(x^2+y^2-\mathrm{xy})=(x+y)((x+y)^2-3\mathrm{xy})=\mathbf{18}$:

2. Հայտնի է, որ α-ն և β-ն $x^2-10x-3=0$ հավասարման արմատներն են: Գտնել $\alpha^2+\beta^2$ արտահայտության արժեքը:

   1) 100 2) 106 3) 94 4) այլ պատասխան

   Լուծում: Օգտվելով Վիետի թեորեմից, ստանում ենք՝

   $$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=10^2-2\cdot(-3)=\mathbf{106}:$$

3. Գտնել $2^{20}+2^{19}+2^{18}+1$ թվի մնացորդը 7-ի բաժանելիս:

   1) 3 2) 5 3) 0 4) այլ պատասխան

   Լուծում: Ունենք՝ $2^{20}+2^{19}+2^{18}+1=2^{18}\cdot(2^2+2+1)+1=2^{18}\cdot7+1$, հետևաբար մնացորդը կլինի **1**:

4. Գտնել այն բոլոր քառանիշ թվերի քանակը, որոնց առաջին և վերջին նիշերն իրար հավասար են:

   1) 900 2) 4500 3) 1000 4) այլ պատասխան

   Լուծում: Նշված քառանիշ թվերի քանակը հավասար է բոլոր եռանիշ թվերի քանակին:

5. Գտնել $y=5$ ուղղով և $y=|x|+2$ ֆունկցիայի գրաֆիկով սահմանափակված պատկերի մակերեսը:

   1) 25 2) 18 3) 9 4) այլ պատասխան

   Լուծում: Նշված պատկերը եռանկյուն է, որի մի կողմը 6 է, իսկ նրան տարված բարձրությունը՝ 3: Այդ եռանկյան մակերեսը կլինի՝ $\frac{3\cdot6}{2}=\mathbf{9}$:

6. Շրջանագծի AB և CD լարերը հատվում են E կետում, ընդ որում $\angle AEC=125°$, իսկ D կետը չպարունակող $\breve{BC}$ աղեղը $50°$ է: Գտնել C կետը չպարունակող $\breve{AD}$ աղեղի աստիճանային չափը:

   1) 160 2) 90 3) 15 4) այլ պատասխան

   Լուծում: $\breve{AD}$ աղեղի աստիճանային չափը նշանակենք x-ով: Ունենք՝ $\frac{x+50°}{2}=55°$, հետևաբար՝ $x=60°$:

7. Գտնել $y = 3x - 1$ և $y = 5x$ ուղիղների հատման կետի հեռավորությունը $y = 3$ ուղղից:

1) 0,5 2) 5,5 3) 8 4) այլ պատասխան

Լուծում: Գտնենք $y = 3x - 1$ և $y = 5x$ ուղիղների հատման կետը. $3x - 1 = 5x$, $x = -0{,}5$, $y = -2{,}5$: Հատման կետի կոորդինատներն են՝ $(-0{,}5; -2{,}5)$: Այս կետի հեռավորությունը $y = 3$ ուղղից կլինի $\mathbf{5{,}5}$:

8. Դիցուք A-ն այն ամենափոքր բնական թիվն է, որը 19-ի և 23-ի բաժանելիս մնացորդում ստացվում է համապատասխանաբար 17 և 21: Գտնել A թվի թվանշանների գումարը:

1) 12 2) 14 3) 16 4) այլ պատասխան

Լուծում: Ունենք, որ $A + 2$ թիվը բաժանվում է 19-ի և 23-ի վրա: Հետևաբար այն բաժանվում է նաև $19 \cdot 23 = 437$-ի վրա: Հետևաբար A թվի փոքրագույն արժեքը 435-ն է: Նրա թվանշանների գումարը կլինի **12**:

9. Գտնել $(5 - x)(x - 9)$ արտահայտության մեծագույն արժեքը:

1) 10 2) 7 3) 4 4) այլ պատասխան

Լուծում: $y = (5 - x)(x - 9)$ ֆունկցիան քառակուսային ֆունկցիա է: Ընդ որում նրա ավագ անդամի գործակիցը բացասական է, հետևաբար այն ունի մեծագույն արժեք: Քանի որ 5 և 9 թվերը այդ քառակուսային ֆունկցիայի 0-ներն են, ապա այն իր մեծագույն արժեքն ընդունում է 7 կետում: Հետևաբար, նրա մեծագույն արժեքը կլինի $(5 - 7)(7 - 9) = \mathbf{4}$:

10. Տրված է ABC եռանկյունը, որի գագաթների կոորդինտաներն են՝ $A(0; 0)$, $B(6; 0)$, $C(0; 8)$: Գտնել ABC եռանկյան արտագծած շրջանագծի շառավղի երկարությունը:

1) 10 2) $5\sqrt{2}$ 3) 5 4) այլ պատասխան

Լուծում: Պարզ է, որ ABC-ն ուղղանկյուն եռանկյուն է, որի ներքնաձիգը՝ $BC = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$: Հետևաբար, նրա արտագծած շրջանագծի շառավիղը հավասար է ներքնաձիգի կեսին՝ **5**:

11. ABC սուրանկյուն եռանկյան արտագծած շրջանագծի O կենտրոնի հեռավորությունը AB կողմից 5 սմ է, ընդ որում AB կողմի երկարությունը 10 սմ է: Գտնել ACB անկյան աստիճանային չափը:

1) 90 2) 60 3) 45 4) այլ պատասխան

Լուծում: Քանի որ O կետի հեռավորությունը AB-ից հավասար է AB-ի կեսին, ապա AOB եռանկյունն ուղղանկյուն եռանկյուն է ($\angle AOB = 90°$), հետևաբար՝ $\angle ACB = \mathbf{45}°$:

12. $ABCD$ զուգահեռագծի BD անկյունագիծը 5 սմ է, ընդ որում՝ $AB = 5$ սմ, $AD = 6$ սմ: Դիցուք AC կողմի վրա կառուցած քառակուսու մակերեսը S սմ^2 է: Գտնել S թվի թվանշանների գումարը:

1) 16 2) 17 3) 18 4) այլ պատասխան

Լուծում: Տանենք ABD եռանկյան BH բարձրությունը: Քանի որ $AB = BD$, ապա $AH = HD = 3$: Հետևաբար, ըստ Պյութագորասի թեորեմի՝ $BH = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$: Այժմ, C կետից տանենք CE ուղիղ, որն ուղղահայաց է AD-ին (E-ն գտնվում է AD-ի վրա): Օգտվելով Պյութագորասի թեորեմից $\varDelta ACE$-ի մեջ, կստանանք՝ $AC^2 = 9^2 + 4^2 = 97$: Պատասխանը կլինի 9+7=**16**:

13. Հայտնի է, որ $a^2 = a + 1$, $a^5 = ar + t$, որտեղ r և t թվերը ռացիոնալ թվեր են: Գտնել $r \cdot t$ արտահայտության արժեքը:

1) 10 2) 15 3) 5 4) այլ պատասխան

Լուծում: Ունենք $a^4 = (a+1)^2 = a^2 + 2a + 1 = 3a + 2$: Հետևաբար՝ $a^5 = 3a^2 + 2a = 5a + 3$: Այսպիսով՝ $ar + t = 5a + 3$, $a(r-5) = 3 - t$: Նշենք, որ եթե $r \neq 5$, ապա $a = \frac{3-t}{r-5}$: Ստացված հավասարությունը հնարավոր չէ, քանի որ աջ մասը ռացիոնալ է, իսկ a-ն՝ իռացիոնալ: Հետևաբար՝ $r = 5$, որտեղից կստանանք նաև, որ $t = 3$:

14. Դիցուք n-ը այնպիսի ամբողջ թիվ է, որի համար $\frac{n^3-n+1}{n+2}$ կոտորակի արժեքը ամբողջ թիվ է: Գտնել n-ի բոլոր հնարավոր արժեքների գումարը:

1) 2 2) 8 3) -8 4) այլ պատասխան

Լուծում: Ունենք՝ $\frac{n^3-n+1}{n+2} = \frac{n^3+2n^2-2n^2-4n+3n+6-5}{n+2} = \frac{n^2(n+2)-2n(n+2)+3(n+2)-5}{n+2} = n^2 - 2n + 3 - \frac{5}{n+2}$: Հետևաբար՝ 5-ը բաժանվում է $n+2$-ի: Այստեղից կստանանք՝ $n + 2 = \pm 1, \pm 5$:

15. Հայտնի է, որ $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{99\cdot 101} = \frac{a}{b}$, որտեղ a-ն և b-ն իրար հետ փոխադարձաբար պարզ բնական թվեր են: Գտնել $a + b$ արտահայտության արժեքը:

1) 101 2) 151 3) 201 4) այլ պատասխան

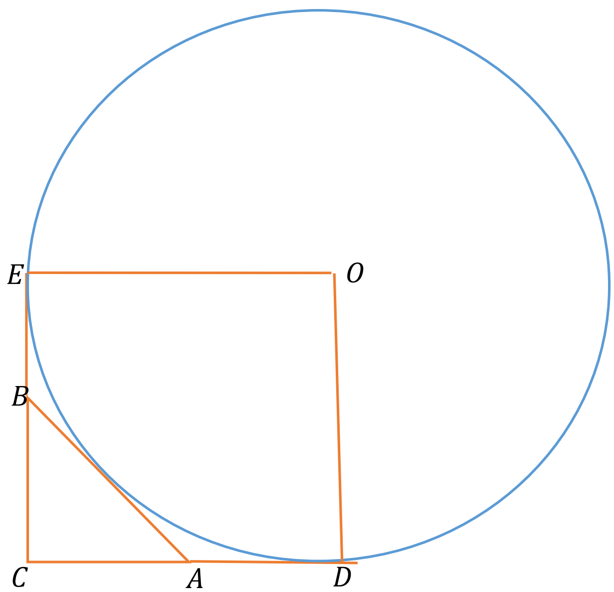
Լուծում: Ունենք՝

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{99\cdot 101} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \cdots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{99} - \frac{1}{101}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{101}\right) = \frac{50}{101}:$$

Հետևաբար՝ $a = 50$, $b = 101$: Պատասխանը կլինի՝ 50+101=**151**:

16. C ուղիղ անկյունով ABC ուղղանկյուն եռանկյան մեջ՝ $CA = 6$, $CB = 8$: Շրջանագիծը շոշափում է ABC եռանկյան կողմերը պարունակող ուղիղները, ընդ որում այն AB ներքնաձիգը շոշափում է AB հատվածի որևէ ներքին կետում, իսկ CA և CB ուղիղները շոշափում է այնպիսի կետերում, որոնք չեն գտնվում CA և CB հատվածների վրա: Գտնել այդ շրջանագծի շառավիղը: 12

Լուծում: Շրջանագծի O կենտրոնը միացնենք D և E շոշափման կետերին: Պարզ է, որ $CEOD$ քառանկյունը քառակուսի է: Հետևաբար, շրջանագծի շառավիղը հավասար է CE հատվածի երկարությանը: Դիցուք K կետը AB-ի և շրջանագծի շոշափման կետն է: Այդ դեպքում՝ $CE = CB + BE = CB + BK$ և $CD = CA + AD = CA + AK$: Գումարելով այս երկու հավասարումները, կունենանք՝ $CE + CD = CB + BK + KA + CA = CB + CA + AB = 6 + 8 + 10 = 24$: Քանի որ $CE = CD$, ապա $CE = \mathbf{12}$:



Դիտողություն: Ստացվեց, որ ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգը ներքին կետում շոշափող առներգծած շրջանագծի շառավիղը հավասար է եռանկյան կիսապարագծին:

17. Լճակում տեղադրված է 10 հատ քար: Այդ քարերը համարակալված են 1, 2, 3, …, 10 թվերով: Գորտը գտնվելով a համարն ունեցող քարի վրա, կարող է ցատկել և հայտնվել մի որևէ այլ քարի վրա, որի b համարը բավարարում է $a < b \leq 2a$ պայմանին: Սկզբում գորտը գտնվում է 1 համարն ունեցող քարի վրա: Ամենաշատը քանի՞ հնարավոր եղանակով նա կարող է հայտնվել 10-րդ համարն ունեցող քարի վրա: 84

Լուծում: Նախ նկատենք, որ 1 համարի քարից հետո գորտը հայտնվելու է 2 համարի քարի վրա: Յուրաքանչյուր քարի համար գտնենք, թե գորտը 1 համարի քարից մինչև այդ քարը քանի ճանապարհով կարող է հասնել: Նշենք, որ յուրաքանչյուր k համարի քարի համար այդ քանակը ստանալու համար, պետք է գումարենք այն քարերի ճանապարհների քանակները , որոնցից գորտը կարող է ցատկել և հայտնվել k քարի վրա: Օրինակ, 8 համարի քարի վրա այդ քանակը ստանալու համար, անհրաժեշտ է գումարել 4, 5, 6, 7 համարների քարերի ճանապարհների քանակները: Այսպիսով 1, 2, 3, …, 10 համարների քարերի համար ստանում ենք հետևյալ քանակները.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	**1**	**1**	**2**	**3**	**6**	**11**	**22**	**42**	**84**

Պատասխան՝ **84**:

18. Օլիմպիադայի 250 մասնակից նստած են շրջանաձև: Ուսուցիչը ընտրում է մի k բնական թիվ ($k < 250$), այնուհետև սկսում է բաժանել թերթիկները հետևյալ կերպ. թերթիկը տալով

առաջին աշակերտին նա ժամսլաքի ուղղությամբ տեղափոխվում է առաջին աշակերտից հաշված k-րդ աշակերտի մոտ և նրան հանձնում թերթիկը: Այսպես շարունակ, նա յուրաքանչյուր քայլում գտնվելով ինչ-որ աշակերտի մոտ, ժամսլաքի ուղղությամբ տեղափոխվում է այդ աշակերտից հաշված k-րդ աշակերտի մոտ և նրան տալիս թերթիկ: Ուսուցիչն ավարտում է իր քայլերն այն պահին, երբ հասնում է մի աշակերտի, ում մոտ արդեն կա թերթիկ: Գտնել k-ի այն բոլոր արժեքների քանակը, որոնցից յուրաքանչյուրի դեպքում ուսուցչի քայլերի ավարտից հետո բոլոր աշակերտների մոտ կլինի մեկական թերթիկ: 100

Լուծում: Մասնակցիների նստատեղերը համարակալենք 0, 1, 2, 3, …, 249 թվերով (ժամսլաքի ուղղությամբ): Ենթադրենք ուսուցիչը սկսում է բաժանել թերթիկները 0 նստատեղն ունեցող աշակերտից: Այդ դեպքում, հաջորդ աշակերտի նստատեղը կունենա k համարը, հաջորդը կլինի $2k$ (եթե $2k \geq 250$, ապա $2k$-ի փոխարեն կլինի նրա մնացորդը 250-ի բաժանելիս): Այսպիսով, n-րդ քայլում ստացված նստատեղի համարը կլինի nk-ի մնացորդը 250-ի բաժանելիս: Եթե k-ն բաժանվի 2-ի կամ 5-ի, ապա nk-ի մնացորդը 250-ի բաժանելիս ևս կբաժանվի 2-ի կամ 5-ի: Հետևաբար, ուսուցիչը թերթիկներ կհանձնի ոչ բոլոր մասնակիցներին:

Մյուս կողմից, կարելի է ապացուցել, որ եթե k-ն չի բաժանվում 2-ի և 5-ի, ապա բոլոր աշակերտները կստանան մեկական թերթիկ: Դրա համար բավական է ցույց տալ, որ 0, k, $2k$, …, $249k$ թվերի մնացորդները զույգ առ զույգ իրարից տարբեր են (այսինքն, կստանանք 250 հատ մնացորդ, հետևաբար, կստանանք շրջանագծի վրա դասավորված բոլոր համարները): Ենթադրենք որևէ երկուսի մնացորդը նույնն է: Այսինքն կան i և j թվեր այնպես, որ $0 \leq i < j \leq 249$ և ik և jk թվերը ունեն նույն մնացորդը 250-ի բաժանելիս: Այդ դեպքում՝ $jk - ik = (j - i)k$ թիվը բաժանվում է 250-ի: Սակայն k-ն 250-ի հետ փոխադարձաբար պարզ է, իսկ $j - i$ -ն չի բաժանվում 250-ի, քանի որ $1 \leq j - i \leq 249$: Հետևաբար, ik և jk թվերը 250-ի բաժանելիս տալիս են տարբեր մնացորդներ:

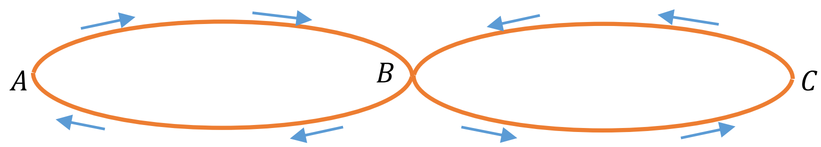
Այսպիսով, k -ի արժեքները 250-ից փոքր այն բոլոր թվերն են, որոնք չեն բաժանվում 2-ի և 5-ի: Այդ թվերի քանակը կլինի՝ $250 - (250/2 + 250/5 - 250/10) = \mathbf{100}$:

19. Դիտարկենք բոլոր (a, b) տեսքի թվազույգերը, որտեղ a-ն և b-ն 100-ը չգերազանցող բնական թվեր են: Ամենաքիչը քանի՞ խմբի կարելի է բաժանել այդ թվազույգերն այնպես, որ միևնույն խմբում չլինեն երկու իրարից տարբեր (a, b) և (c, d) թվազույգեր, որ $a - c = 2b - 2d$: 50

Լուծում: Նկատենք, որ $(2;1)$, $(4;2)$, $(6,3),\ldots$, $(100;50)$ զույգերից ցանկացած երկուսը չեն կարող գտնվել նույն խմբում: Հետևաբար, խմբերի քանակը կլինի առնվազն 50: Մնում է ցույց տալ, որ այդ զույգերը կարելի է դասավորել 50 խմբերում:

Այդպիսի 50 խումբ կարելի է կառուցել հետևյալ կերպ. առաջին խմբում վերցնենք բոլոր $(2,x)$ և $(1,\ y)$ տեսքի զույգերը $(x,y \in N, x \leq 100, y \leq 100)$: Նշենք, որ այս խմբում տեղի ունի խնդրի մեջ նշված պայմանը՝ $2-1 \neq 2x-2y$ (քանի որ $2x-2y$-ը զույգ թիվ է): Այնուհետև, երկրորդ խմբում վերցնենք բոլոր $(3,x)$ և $(4,\ y)$ տեսքի զույգերը $(x,y \in N, x \leq 100, y \leq 100)$, և այդպես շարունակ: 50-րդ խումբը կազմված է բոլոր $(100,x)$ և $(99,\ y)$ տեսքի զույգերից $(x,y \in N, x \leq 100, y \leq 100)$: Այսպիսով կստանանք **50** խումբ:

20. Նշված պատկերը կազմված է միևնույն շրջանագծի չորս հատ իրար հավասար աղեղներից (տես՝ նկարը): Երկու հեծանվորդ միաժամանակ սկսում են շարժվել A և C կետերից նկարում սլաքներով նշված երթուղիով (նշված կորը համաչափ է AC ուղղի նկատմամբ): Հեծանվորդների արագություն-ներն են 15 մ/վ և 12 մ/վ, ընդ որում նրանք նշված երթուղիով շարժվում են անվերջ: Քանի՞ կետ կա նշված կորի վրա, որտեղ նրանք կարող են հանդիպել: (Յուրաքանչյուր հեծանվորդ A կետից B-ին հասնելուց հետո շարժվում է դեպի C կետը, իսկ C-ից B գալուց հետո շարունակում է դեպի A կետը): 1



Լուծում: Կորի ընդհանուր երկարությունը նշանակենք S մ: Նախ ապացուցենք, որ B կետը հանդիպման կետ չէ: Ենթադրենք, որ B կետում ինչ-որ պահի հանդիպել են: Սկզբում դիտարկենք այն դեպքը, երբ B կետում հանդիպումից առաջ առաջինը շարժվել է A-ից դեպի B, իսկ երկրորդը՝ C-ից դեպի B (շարժման մնացած ուղղությունների դեպքը համանման է): Այս դեպքում շարժման սկզբից մինչև այդ պահը հեծանվորդներն անցել են $nS+\frac{S}{4}$ մ և $kS+\frac{S}{4}$ մ երկարությամբ ճանապարհներ (որտեղ $n,k \in N$): Քանի որ իրենց ծախսած ժամանակներն իրար հավասար են, ապա՝ $\frac{nS+\frac{S}{4}}{15} = \frac{kS+\frac{S}{4}}{12}$, որտեղից՝ $12(4n+1) = 15(4k+1)$, որը հնարավոր չէ, քանի որ ձախ մասը զույգ է, իսկ աջ մասը՝ կենտ:

Այժմ գտնենք այդ կորի կետերի քանակը, որտեղ հեծանվորդները կարող են հանդիպել: Նախ պարզ է, որ նրանք ինչ-որ կետում հանդիպում են (քանի որ արագությունները տարբեր են): Այդ կետը նշանակենք E-ով: Քանի որ E-ն B-ից տարբեր է, ապա այդ կետից սկսած նրանք շարժվում են նույն ուղղությամբ: Հետևաբար, այդ կետից հաշված հաջորդ հանդիպումը կլինի

$\frac{S}{15-12}=\frac{S}{3}$ վայրկյան հետո: Այդ ժամանակահատվածում հեծանվորդները կանցնեն համապատասխանաբար $15\cdot\frac{S}{3}=5S$ մ և $12\cdot\frac{S}{3}=4S$ մ: Քանի որ նրանց անցած ճանապարհների երկարությունները (E կետից սկսած) S -ին բազմապատիկ են, ապա երկրորդ հանդիպումը կլինի նորից E կետում: Այսպիսով, նրանք միշտ հանդիպելու են միայն E կետում:

Պատասխան: **1:**

Նշենք, որ կարելի է ցույց տալ, որ հանդիպման E կետը C կետն է: