11-12-րդ դասարաններ, Լուծումներ

Խնդիր 1: Լուծել $a^3 - 1 = p^k$ հավասարումը, որտեղ a, k, p-ն բնական թվեր են, p-ն պարզ թիվ է:

Լուծում: Ունենք, որ $(a-1)(a^2+a+1) = p^k$: [+1 **միավոր**]

Հետևաբար $a-1, a^2-a+1$ թվերը p^k թվի բաժանարարներ են: Այստեղից, հաշվի առնելով, որ p-ն պարզ թիվ է, կստանանք՝ $a-1 = p^m$, $a^2+a+1 = p^n$ [+1 **միավոր**], որտեղ $m, n \in Z, m, n \geq 0, m+n = k$: Քանի որ $a^2+a+1 \geq a-1$, ապա $n \geq m$, հետևաբար $a^2+a+1 \vdots a-1$ [+2 **միավոր**]: Նշանակելով՝ $a-1 = b$, կունենանք՝ $b^2+3b+3 \vdots b$, որտեղից՝ $3 \vdots b$ [+2 **միավոր**]: Այսպիսով, $b = 1$ կամ $b = 3$, ուստի $a = 2$ կամ $a = 4$: Նշենք, որ a=4 դեպքը չի բավարարում: Այսպիսով ստանում ենք միայն մեկ եռյակ՝ $a = 2, p = 7, k = 1$: [+2 **միավոր**]

Խնդիր 2: Դիցուք n-ը և r-ը բնական թվեր են, ընդ որում՝ $3r > n > 2$: Տրված են կամայական ամբողջ թվեր՝ $a_1, a_2, \ldots, a_r$: Ապացուցել, որ գոյություն ունեն $i, j \in \{1,2,\ldots,r\}$ իրարից տարբեր թվեր, որոնց համար $a_i - a_j$ թվի մնացորդը n-ի բաժանելիս մեծ չէ 2-ից:

Լուծում: Դիտարկենք $a_1, a_2, \ldots, a_r$, $a_1+1, a_2+1, \ldots, a_r+1, a_1+2, a_2+2, \ldots, a_r+2$ հաջորդականությունը [+1 **միավոր**]: Քանի որ այն պարունակում է $3r$ հատ տարր, ընդ որում $3r > n$, ապա ըստ Դիրիխլեի սկզբունքի, այդ հաջորդականության տարբեր համարներ ունեցող որևէ երկու տարրեր n-ի բաժանելիս տալիս են նույն մնացորդը : Այսպիսով, գոյություն ունեն $i, j \in \{1,2,\ldots,r\}$ և $\lambda, \mu \in \{0,1,2\}$ թվեր այնպես, որ $a_i + \lambda$ և $a_j + \mu$ թվերի տարբերությունը բաժանվում է n-ի [+2 **միավոր**]: Ընդ որում, եթե ենթադրենք, որ $i = j$, ապա կստանանք $\lambda - \mu \vdots n$, որտեղից, հաշվի առնելով, որ $n > 2$, կստանանք՝ $\lambda = \mu$, որը հնարավոր չէ, քանի որ $a_i + \lambda$-ն և $a_j + \mu$-ն վերը նշված հաջորդականության տարբեր համարներով անդամներ են: Այսպիսով՝ $i \neq j$ [+1 **միավոր**]: Առանց ընդհանրությունը խախտելու, կարող ենք համարել, որ $\lambda \leq \mu$: Ունենք՝

$$(a_i + \lambda) - (a_j + \mu) = (a_i - a_j) - (\mu - \lambda) \ \vdots n: \quad [+\mathbf{1} \text{ միավոր}]$$

Քանի որ $2 \geq \mu - \lambda \geq 0$, ապա $a_i - a_j$-ի մնացորդը կլինի $\mu - \lambda$, որը 2-ը չգերազանցող թիվ է [+2 **միավոր**]:

Խնդիր 3: ω շրջանագծին տարված են BA և BC շոշափողները: Դիցուք M-ը BC հատվածի միջնակետն է, AM հատվածը ω-ն հատում է P կետում , BP ուղիղը ω-ն հատում է E կետում, իսկ

AC հատվածը՝ T կետում: Ապացուցել, որ M-ը, T-ն և AE հատվածի միջնակետը գտնվում են մի ուղղի վրա:

Լուծում: Ըստ շոշափողի և հատողի հատկության՝ $MB^2 = MC^2 = MP \cdot MA$ [**+1 միավոր**], ուստի $\frac{MB}{MP} = \frac{MA}{MB}$: Այստեղից, հաշվի առնելով, որ $\angle BMA$-ն ընդհանուր է, կստանանք՝ $\triangle BPM \sim ABM$ [**+2 միավոր**], որտեղից $\angle PBM = \angle BAP$: Քանի, որ, $\angle PBM = \angle BAP = \angle AEP$, ապա $BC \parallel AE$ [**+2 միավոր**], հետևաբար $\triangle BTC \sim ATE$: Դիցուք R-ը AE հատվածի միջնակետն է: Քանի, որ $BC \parallel AE$, իսկ M-ը և R-ը համապատասխանաբար BC և AE նմանակ կողմերի միջակետերն են (այսինքն՝համապատասխան կետեր են), հետևաբար M, T և R կետերը գտնվում են մի ուղղի վրա: [**+2 միավոր**]

Խնդիր 4: Տրված են 100 հատ հատվածներ, որոնք ունեն համապատասխանաբար 1 սմ, 2 սմ, 3 սմ, …, 100 սմ երկարություններ: Այդ հատվածներից յուրաքանչյուրը ներկում են 16 գույներից որևէ մեկով: Ապացուցել կամ հերքել հետևյալ պնդումը. ցանկացած ներկման դեպքում գոյություն ունեն երեք միագույն հատվածներ, որոնցով հնարավոր է կազմել եռանկյուն:

Լուծում: Պատասխան. Միագույն եռանկյուն գոյություն ունի:

Մենք կենթադրենք, որ այդպիսի եռանկյուն չկա, որից հետո կստանանք հակասություն: Գույները համարակալենք $A_1, A_2, \dots, A_{16}$ ըստ յուրաքանչյուրում եղած փոքրագույն տարրի (այսինքն, 1-ը ունի առաջին գույնը, որից հետո հանդիպող ամենափոքր թիվը, որը չունի առաջին գույնը, ներկված կլինի երկրորդ գույնով և այդպես շարունակ):

Տրված k բնական թվի համար դիտարկենք այն աճող հաջորդականությունը, որի տարրերը ≤ 100, որը գրված է հնարավոր փոքրագույն թվերով, և չի պարունակում այնպիսի կողմեր, որոնք կազմում են եռանկյուն: Նշանակենք $f(k)$-ով այդ հաջորդականության տարրերի քանակը: Այսպիսով,

$$|A_i| \leq f(i):$$

$$\text{եթե } \min(A_i) = k, \text{ապա } |A_i| \leq f(k):$$

Օրինակ, $k = 1$ դեպքում այն ստացվում է Ֆիբոնաչիի հաջորդականության 10 տարրերը:

Ունենք՝ $f(1) = 10$, $f(2) = 9$, $f(3) = f(4) = 8$, $f(5) = f(6) = f(7) = 7$, $f(8) = \cdots = f(11) = 6, f(12) = \cdots = f(19) = 5, f(20) = 4 \dots$

Եթե $1, 2, 3 \in A_1$, ապա $\sum_{i=1}^{16} |A_i| \leq f(1) + f(4) + f(5) + \cdots + f(18) = 98 < 100$, որը հնարավոր չէ:

Եթե 1,2,3-ը միաժամանակ նույն գույնի չեն, ապա $|A_1| \leq 9$:

Դիցուք 1,2,3,…,11 թվերը դասավորված են m հատ ոչդատարկ խմբերի մեջ: Եթե $m \leq 7$, ապա

$$\sum_{i=1}^{16} |A_i| \leq 9 + f(2) + \cdots + f(7) + f(12) + \cdots + f(20) < 100:$$

Եթե $m = 8$, ապա 1,2,3,4 թվերի մեջ կա մեկը, որի հաջորդ նույն գույնի թիվը ≥ 12: Նշված թվերից յուրաքանչյուրի դեպքում փոքրագույն հաջորդականությունը պարունակում է 6 թիվ (օրինակ՝ 1, 12, 13, 25, 38, 63): Հետևաբար՝

$$|A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| \leq 9 + 9 + 8 + 8 - 2 = 32:$$

Հետևաբար՝ $\sum_{i=1}^{16} |A_i| \leq 32 + f(5) + \cdots + f(8) + f(12) + \cdots + f(19) < 100$:

Եթե $m = 9$, ապա 1,2,3,4 թվերի մեջ կա առնվազն երկու թիվ՝ x, y, որոնցից յուրաքանչյուրի հաջորդ նույն գույնի թիվը ≥ 12: Հետևաբար՝ $|A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| \leq 9 + 9 + 8 + 8 - 2 - 2 = 30$, որտեղից՝ $\sum_{i=1}^{16} |A_i| \leq 30 + f(5) + \cdots + f(9) + f(12) + \cdots + f(18) < 100$:

Եթե $m = 10$ կամ $m = 11$, ապա 1,2,3,4 թվերի մեջ կա առնվազն երեք թիվ, որոնցից յուրաքանչյուրի հաջորդ նույն գույնի թիվը ≥ 12: Հետևաբար՝ $|A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| \leq 9 + 9 + 8 + 8 - 2 - 2 - 2 = 28$, որտեղից՝ $\sum_{i=1}^{16} |A_i| \leq 28 + f(5) + \cdots + f(16) < 100$:

Չափանիշներ

1) Դիտարկված է Ֆիբոնաչիի հաջորդականությունը կամ այդ բնույթի այլ հաջորդականություն **+ 1 միավոր**
2) Ապացուցված է այն դեպքը, երբ 1, 2, 3 -ը միագույն են (**1 միավոր)**

   [1) և 2) կետերի միավորները չեն գումարվում, միավորը տրվում է այն դեպքում, երբ այդ երկու կետերից գոնե մեկը արված է]
3) Դիտարկված է խմբերի m քանակը 1, 2, …, 11 թվերի բազմության (կամ նմանատիպ այլ բազմության համար), Ցույց է տրվում, որ m-ը մեծ է նշված բազմության տարրերի քանակի կեսից, կամ որևէ համարժեք պնդում: **+2 միավոր**
4) Դիտարկված են m-ի մյուս արժեքները ամբողջությամբ **+4 միավոր**

[մասնակի միավորներ այս կետում տրվում են, եթե m-ի որոշ արժեքների դեպքը կատարված է]