8-րդ դասարան, Լուծումներ

Խնդիր 1. Դիցուք a, b և c թվերը բնական են: Հնարավո՞ր է, արդյոք $ab+1, bc+1, ac+1$ թվերից յուրաքանչյուրը ներկայացնել երկուսից ավելի հաջորդական բնական թվերի արտադրյալի տեսքով:

Առաջին Լուծում: Քանի,որ երկուսից ավելի հաջորդական թվերից մեկը բաժանվում է 3-ի, հետևաբար $ab+1, bc+1, ac+1$ թվերից յուրաքանչյուրը բաժանվում է 3-ի [+**1 միավոր**], այսինքն ab, bc, ac թվերից յուրաքանչյուրը 3-ի բաժանելիս մնացորդում տալիս է 2 [+**1 միավոր**]: Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք ենթադրել, որ a=3n+1, b=3k+2 [+**1 միավոր**], որտեղից c=3l+2(ac+1 բաժանվում է 3-ի) [+**2 միավոր**], հետևաբար bc+1=3m+2, որը չի բաժանվում 3-ի, ինչը հակասություն է [+**2 միավոր**]:

Երկրորդ Լուծում: Քանի,որ երկուսից ավելի հաջորդական թվերից մեկը բաժանվում է 3-ի, հետևաբար $ab+1, bc+1, ac+1$ թվերից յուրաքանչյուրը բաժանվում է 3-ի [+**1 միավոր**], այսինքն ab, bc, ac թվերից յուրաքանչյուրը 3-ի բաժանելիս մնացորդում տալիս է 2 [+**1 միավոր**], հետևաբար $ab \cdot bc \cdot ac = a^2b^2c^2$ թիվը 3-ի բաժանելիս մնացորդում տալիս է 2 [+**3 միավոր**], որը հակասություն է քանի, որ բնական թվի քառակուսին 3-ի վրա բաժանելիս մնացորդում տալիս է 0 կամ 1 [+**2 միավոր**]:

Խնդիր 2: Ապացուցել $(a^2+b^2)^2+ab \le a^2+b^2$ անհավասարությունը, որտեղ $a \ge 0, b \ge 0$ և $a+b=1$:

Ապացույց:

$((a+b)^2-2ab)^2+ab \le (a+b)^2-2ab$ [+**2** միավոր] $\Leftrightarrow (1-2ab)^2 \le 1-3ab$ [+**1** միավոր] $\Leftrightarrow ab(4ab-1) \le 0$ [+**1** միավոր] $\Leftrightarrow ab(4ab-(a+b)^2) \le 0$ [+**2** միավոր] $\Leftrightarrow -ab(a-b)^2 \le 0$ [+**1** միավոր]:

Խնդիր 3: ABC հավասարասրուն ուղղանկյուն եռանկյում AB էջի և AC ներքնաձիգի վրա համապատասխանաբար նշված են E և F կետեր այնպես, որ $AE=EB$ և $AF=3CF$: F կետից AC–ին տարված ուղղահայացը BC էջը հատում է P կետում: Ապացուցել, որ $\angle AFE = \angle BFP$:

Լուծում: Տանենք ABC եռանկյան BK բարձրությունը: Այդ դեպքում $AE=EB=EK, KF=FC$, որտեղից $BP=PC$ [+**2 միավոր**]: Քանի, որ $BP=\frac{BC}{2}=\frac{AB}{2}=EK$, $FP=\frac{BK}{2}=\frac{AK}{2}=FK$

[+**2 միավոր**] և $\angle BPF = \angle EKF = 135^\circ$ հետևաբար $\Delta BPF = \Delta EKF$ [+**2 միավոր**], որտեղից՝ $\angle BFP = \angle EFK$ [+**1 միավոր**]:

Խնդիր 4: Բնական թիվը կանվանենք հետաքրքիր, եթե այն ստացվում է 1,2,3,4,5,6,8 թվանշանների տեղափոխությունից և բաժանվում է 11-ի: Գտնել հետաքրքիր բնական թվերի քանակը:

Լուծում: Դիցուք հետաքրքիր թիվը ունի $\overline{abcdefg}$ տեսքը: Ըստ 11-ի բաժանելիության հայտանիշի հնարավոր են հետևյալ երեք դեպքերը:

1) $a + c + e + g = b + d + f$:

Քանի, որ 1+2+3+4+5+6+8=29 թիվը կենտ է, ապա այս դեպքը չի բավարարում [+**1 միավոր**]:

2) $a + c + e + g + 11k = b + d + f$, որտեղ $k \in N$:

Քանի, որ $29 = 2(a+c+e+g)+11k > 2(1+2+3+4)+11 = 31$, որը հնարավոր չէ [+**1 միավոր**]:

3) $a + c + e + g = b + d + f + 11k$, որտեղ $k \in N$:

Երբ $k \geq 2$, ապա $29 = 2(b+d+f)+11k > 2(1+2+3)+22 = 34$, որը հնարավոր չէ: Հետևաբար՝ $k = 1$, ուստի $b + d + f = 9$, $a + c + e + g = 20$: [+**2 միավոր**]

Նշենք, որ $b + d + f = 9$ հավասարմանը բավարարում են (1,2,6),(1,3,5),(2,3,4) եռյակները և նրանց տեղափոխությունները: Այդպիսի (b, d, f) եռյակների քանակը կլինի՝ $3 \cdot 3! = 18$: [+**2 միավոր**] Յուրաքանչյուր այդպիսի (b, d, f) եռյակի համար կա $4! = 24$ հատ (a, c, e, g) քառյակ: Հետևաբար հետաքրքիր թվերի քանակը կլինի $18 \cdot 24 = 432$: [+**1 միավոր**]