«Նոր ժամանակի կրթություն» ՀԿ

ՀԵՐԹԱԿԱՆ ԱՏԵՍՏԱՎՈՐՄԱՆ ԵՆԹԱԿԱ ՈՒՍՈՒՑԻՉՆԵՐԻ ՎԵՐԱՊԱՏՐԱՍՏՄԱՆ ԴԱՍԸՆԹԱՑ

Ա Վ Ա Ր Տ Ա Կ Ա Ն   Հ Ե Տ Ա Զ Ո Տ Ա Կ Ա Ն   Ա Շ Խ Ա Տ Ա Ն Ք

Հետազոտության թեման՝ Սովորողների քննադատական մտածողության զարգացումը առարկայի ուսուցման գործընթացում

Առարկան՝ Մաթեմատիկա

Հետազոտող ուսուցիչ՝ Արուսյակ Գաբրիելյան

Ուսումնական հաստատություն՝ Երևանի Մոնթե Մելքոնյանի անվան թիվ 11 հիմնական դպրոց

Երևան 2022

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

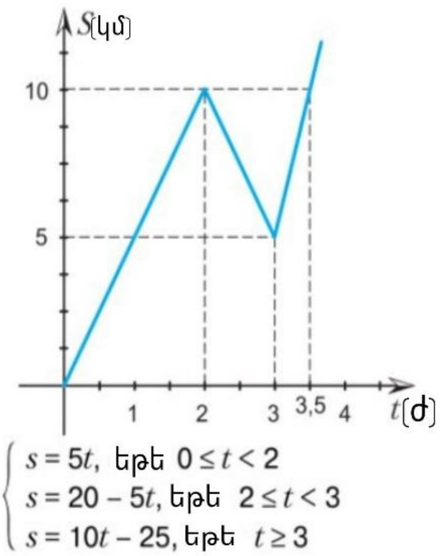
Թեման արդիական է՝ հիմնվելով հետազոտող ուսուցիչների մաթեմատիկա առարկայի դասավանդման երկարատև փորձի վրա և առնչվելով աշակերտների՝ գրաֆիկներ կառուցելու և դրան հետևող հարցերին պատասխանելու դժվարությունների հետ, ինչպես նաև՝ «Կենգուրու» մաթեմատիկական մրցույթում գրաֆիկ պարունակող խնդիրների, իսկ ավագ դասարաններում՝ համակցված հավասարումների բարդությունների հետ: Հետազոտական աշխատանքի հիմնական նպատակն է գրաֆիկների հետ աշխատելու այլընտրանքային օրինակների միջոցով առավելագույնս բարձրացնել աշակերտների հետաքրքրվածությունը գրաֆիկների պատկերման նկատմամբ:

Գրաֆիկները հսկայական դեր են տանում մեր առօրյայում, օրինակ՝ ծնողները երեխայի տարիքը և հասակը ֆիքսում են գրաֆիկներ պատկերելու ունակության շնորհիվ, սրտի ուլտրաձայնային հետազոտությունը ևս պատկերվում է գրաֆիկների տեսքով, եղանակային պայմանների փոփոխության վերաբերյալ տեղեկատվութունը և այլն: «Գրաֆիկ» բառը առաջացել է լատիներեն բառից, որը նշանակում է «երազում էր նկարել, գրել, էսքիզ անել», այսինքն՝ գրաֆիկը տող է թղթի վրա: Սիստեմատիկորեն պատկերել ֆունկցիայի գծապատկերները, իսկ ավելի ստույգ՝ կախվածությունը տարբեր մաթեմատիկական մեծությունների միջև, պատկերել են 17-րդ դարում: Դրանում գլխավոր վաստակը պատկանում է ֆրանսիացի գիտնական Ռենե Դեկարտին, որի հիշատակին կոորդինատային համակարգը կոչվում է դեկարտյան:

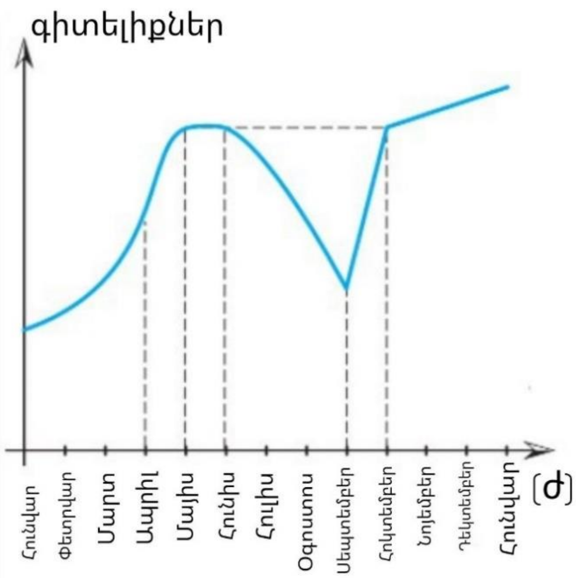
Այդ ժամանակից ի վեր գծապատկերները դարձել են ամենակարևոր գործիքներից մեկը, որոնք ուսումնասիրում են մի շարք գործառույթներ՝ թարգմանելու ունակություն տեղեկատվություն բանաձևերի լեզվից մինչև գրաֆիկական լեզու և հակառակը: Ֆունկցիայի տարբեր հատկություններ նույն գրաֆիկից կարդալը դարձավ մաթեմատիկական մշակույթի կարևոր տարր: Այս հմտությունը տիրապետելը շատ առանձնահատուկ դեր է խաղում մաթեմատիկական կրթության մեջ, մասնավորապես այս մոտեցումը թույլ է տալիս պարզեցնել խնդիրների լայն շրջանակի լուծումը: Հետագա գլուխներում կծանոթանանք գրաֆիկների կիրառման պրակտիկ օրինակների հետ, որոնք կօգնեն աշակերտներին պարզեցված մոտեցում ցուցաբերել գրաֆիկների նկատմամբ:

Գրաֆիկների կիրառման օրինակներ

Դպրոցական հանրահաշվի դասընթացից հասցրել ենք ծանոթանալ տարբեր մեծությունների միջև կախվածության տեսակների հետ: Եթե դիտարկենք հետևյալ շարժման գրաֆիկը (նկ. 1), կտեսնենք, որ գրաֆիկում նշված շարժումը բարդ գործընթաց է, սակայն այս գործընթացի առանձնահատկությունները շատ հստակ տեսանելի են, օրինակ՝ հեշտ է հասկանալ, որ ճամփորդության առաջին 2 ժամում կետը տեղափոխվեց մեկ ուղղությամբ (5 կմ/ժ արագությամբ), այնուհետև՝ կետը շրջվեց և հետ գնաց (նույն արագությամբ), վերջապես ևս մեկ ժամ անց կետը նորից շրջվեց և գնաց սկզբնական ուղղությամբ, բայց 2 անգամ ավելի արագ, քան ավելի վաղ (ուղիղ գծի «կտրուկությունը» կրկնապատկվել է): Արագ հայացք նետելով գրաֆիկին՝ առանց բանաձևերի և հաշվարկների դիմելու կարող ենք ստանալ շարժման պատկերը: Բացի այդ, նշենք, որ այս դեպքում սահմանել ֆունկցիայի բանաձևը չի հաջողվի, քանի որ տարբեր բաժիններում s-ի կախվածությունը t-ից տրված է տարբեր արտահայտություններով:[1]



(նկ. 1)



(նկ. 2)

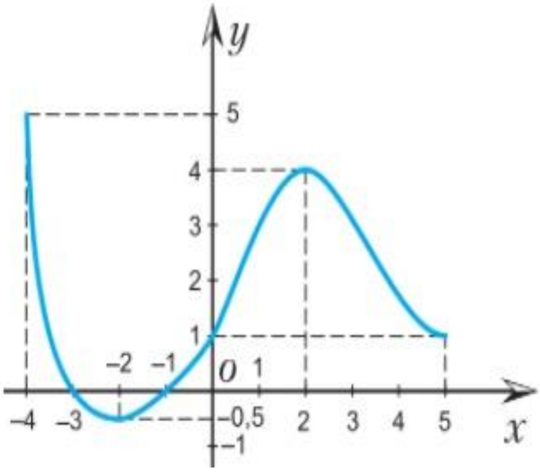
Դիտարկենք այժմ մաթեմատիկայից հեռու մի օրինակ, որում բանաձևերը ոչ միայն անհարմար կլինեն, այլև անտեղի: Նկ. 2-ը ցույց է տալիս Ալենի գիտելիքների քանակի փոփոխության գրաֆիկը ամբողջ տարվա ընթացքում, որտեղ չգիտենք, թե ինչպես է հնարավոր չափել գիտելիքները: Հասկանալի է, որ դրանք կարող են ավելանալ և նվազել արագ կամ դանդաղ տեմպերով: Հետևաբար, այս փոփոխությունները կարելի է ներկայացնել գրաֆիկների միջոցով: Տվյալ օրինակում

[1] Е. Рисс, «Глядя на график», Центр технологии тестирования «Кенгуру плюс», Санкт-Петербург, 2015, стр. 4

տեսնում ենք, որ մինչև ապրիլը Ալենի իմացությունը ամեն ամիս ավելի ու ավելի արագ էր աճում («գիտելիքի կորը» բարձրանում է ավելի կտրուկ)։ Ըստ երևույթին՝ Ալենը պատրաստվում էր «Կենգուրու» մրցույթին։ Ապրիլին Ալենը հավանաբար հոգնած էր, և նրա գիտելիքները դանդաղեցին․ կորը դարձավ ավելի հարթ։ Մայիսին գիտելիքների կորը մնաց անփոփոխ, քանի որ այդ պահին դպրոցը կրկնում էր տարվա անցած նյութերը։ Այսպիսով՝ Ալենը նոր գիտելիքներ ձեռք չբերեց, չնայած ոչ էլ մոռացել էր։ Ամռանը շատ բան էր մոռացվել, (կորը իջնում է, աճում է դրա կտրուկությունը)։ Սեպտեմբերին, կրկնելով մոռացվածը, Ալենը հիշեց ամեն ինչ. իսկ հոկտեմբերից նա սկսեց հանգիստ, համաչափ ու վստահ կուտակել նոր գիտելիքներ։ Այսպիսով՝ գրաֆիկը կարող է շատ բան պատմել երկու արժեքների միջև կախվածության մասին։ Տվյալ խնդրի օրինակը որոշեցինք ներառել, քանի որ աշակերտների համար պրակտիկորեն կիրառելի է և դյուրամատչելի։[2]

Դիտարկենք այժմ դեպքեր, որտեղ ներկայացված իրավիճակները պահանջում են աշակերտից գրագետ կարդալ նշված գրաֆիկը և ընտրել ճիշտ պնդումներ։

Խնդիր 1. Ճի՞շտ են արդյոք y = f(x) ֆունկցիայի վերաբերյալ հետևյալ պնդումները տրված հատվածի վրա [–4; 5] գրաֆիկ (նկ. 3).

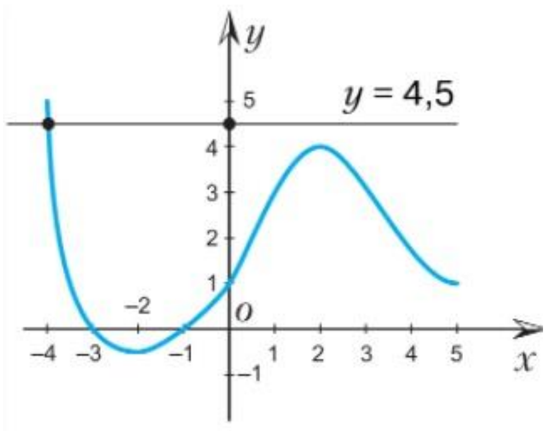


1) a-ի որոշման տիրույթից ցանկացած արժեքի համար պատշաճ միջակայք f(x) = a հավասարումը ունի առնվազն երկու արմատ։
2) Կա այդպիսի արժեք a, որտեղ f(x) ≤ a անհավասարության լուծումը 1,5 երկարությամբ հատված է։

(նկ. 3)

3) Կա այնպիսի դրական a արժեք, որի համար f (x) = a հավասարումը ունի ճիշտ երկու արմատ։
4) f (f (x))> 0 անհավասարությունը ճշմարիտ է y = f(x) ֆունկցիայի որոշման տիրույթից բոլոր x-երի համար։

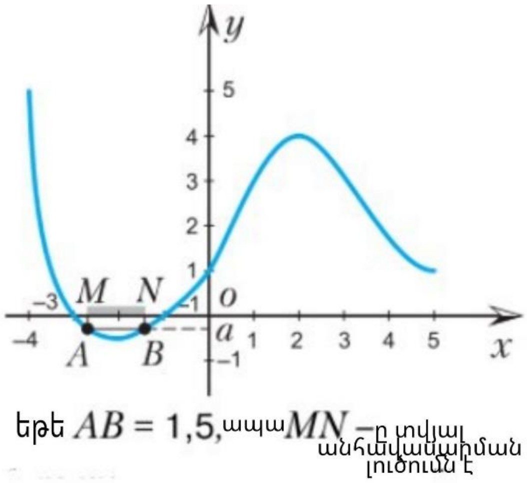
Փորձելով պատասխանել առաջադրանքի հարցերին՝ *(նկ. 3ա)*



[2] Е. Рисс, «Глядя на график», Центр технологии тестирования «Кенгуру плюс», Санкт-Петербург, 2015, стр. 5

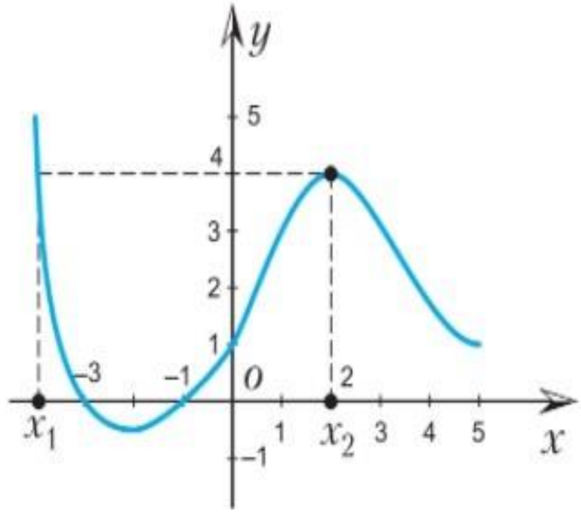
1) Թարգմանել ենք առաջին հարցը երկրաչափական լեզվով. y = a հորիզոնական գիծը հատում է գրաֆիկը առնվազն երկու անգամ: Պարզ է, որ դա այդպես չէ, օրինակ՝ y = 4.5 ուղիղ գիծը հատում է գրաֆիկը միայն մեկ անգամ (նկ. 3ա), այսպիսով՝ 1-ին պնդումը սխալ է:

2) Ինչպես գտնել գրաֆիկի վրա f (x) ≤ a անհավասարության լուծումների բազմությունը: Անհրաժեշտ է անցկացնել հորիզոնական ուղիղ y = a, ընտրել f x) գրաֆիկի այն մասը, որը գտնվում է այդ ուղղից ներքև և գտնել նրան բավարարող x-ի բոլոր արժեքները: Նախ մենք անմիջապես նկատում ենք, որ պետք է հաշվի առնել միայն a-ի միայն բացասական արժեքները (այլ դեպքերում՝ լուծումների բազմությունը արտահայտվում է մեծ հատվածում, կամ ընդհանրապես բաժանվում է երկու հատվածի): a = 0-ի համար լուծումների բազմությունը 2 երկարության միջակայք է, այսինքն՝ ավելին, քան մեզ անհրաժեշտ է, բայց եթե աստիճանաբար տեղափոխենք y = a ուղիղը ներքև, ապա համապատասխան միջակայքի երկարությունը կնվազի մինչև a = –0.5 կետի (նկ. 4): Հիմա մեզ բավական է ճշգրիտ նշել, որ «ճանապարհի երկայնքով» պետք է հատվածներ լինեն բոլոր հնարավոր երկարությունները 0-ից 2, հետևաբար՝ ստացվում է 1,5 երկարությամբ հատված: Այսպիսով՝ 2-րդ պնդումը ճշմարիտ է:



(նկ. 4)

3) Հասկանալի է, որ a = 4 ուղիղը շոշափում է գրաֆիկը x = 2 կետում և հատվում է [-4; –3] հատվածից ինչ-որ մի կետում: Այսպիսով՝ a = 4-ի համար հավասարումը ունի ճիշտ երկու արմատ, այսինքն՝ 3-րդ պնդումը ճիշտ է: *(նկ. 4ա x_1 և x_2-ը տվյալ հավասարման լուծումն են)*



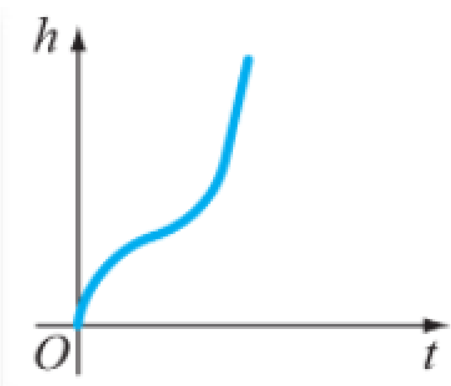
4) Վերոնշյալ հարցի պատասխանն անհնար է ուղղակիորեն տեսնել գրաֆիկից, ինչպես մենք արեցինք նախկինում: Բայց մտածելով, թե ինչպես գտնել f (f (x)) արժեքը, պետք է հաշվարկել b = f (x) և այնուհետև գտնել f(b): Գրաֆիկից հեշտությամբ կարող ենք որոշել f(x) ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը [–0,5; 5]-ի միջակայքում, հետևաբար՝ b-ն կարող է ընդունել արժեքներ միայն այս միջակայքից: Նշենք, որ f(x) ֆունկցիան ընդունում է դրական արժեքներ փոփոխականի այն

արժեքների համար, որոնք մեծ են -1-ից: Հետևաբար՝ [–0,5; 5] միջակայքից բոլոր արժեքների համար f(b)-ն դրական է, իսկ 4-րդ պնդումը ճիշտ է:[3]

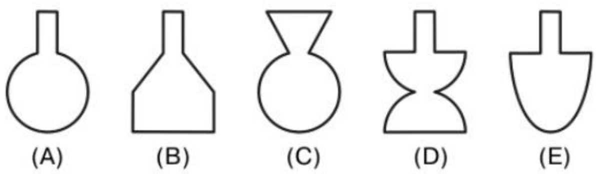
Փորձենք կիրառել մեր դիտարկումներից «Կենգուրու» մրցույթի առաջադրանքներից մեկը լուծելու համար՝

Խնդիր 2. Շիշը լցված է ջրով հավասարաչափ հոսող ծորակից: Գրաֆիկը ցույց է տալիս կախվածությունները շշի մեջ ջրի h բարձրության և ժամանակի միջև (նկ. 5): Ինչպիսի՞ն կարող է լինել շշի ձևը (նկ. 5ա):

Լուծում. Գրաֆիկը մեզ հուշում է, որ նախ՝ ջրի բարձրությունը բարձրանում է շատ արագ, իսկ հետո, մինչև t1 կետը ամեն ինչ ավելի է դանդաղում: Գրաֆիկի համապատասխան հատվածը նման է գավաթի՝ ուրվագիծը գլխիվայր շրջված․ այսպիսի գծապատկերներ կոչվում են ուռուցիկ դեպի վեր: Ինչո՞ւ կարող է նման դանդաղում առաջանալ: Միայն այն պատճառով, որ անոթի հիմքը ընդլայնվում է: Սա նշանակում է, որ B և D պատասխաններն անմիջապես անհետանում են: Այնուհետև՝ t1 ժամանակից t2 արագությունը մեծանում է. գրաֆիկը կորցնում է իր կտրուկությունը և դառնում ուռուցիկ: Սա նշանակում է, որ աստիճանաբար անոթը սկսեց նեղանալ: Հետևաբար՝ E-ն չի կարող ճշմարիտ լինել: Գրաֆիկի վերջին հատվածը ուղիղ գիծ է: Այստեղ անոթի լցման արագությունը հաստատուն է՝ հավասար ժամանակային ընդմիջումներով, բարձրությունը նույն կերպ մեծանում է: Սա նշանակում է, որ անոթը լցվում է գլանաձև խողովակով, ուստի պետք է ընտրել A, ոչ թե C:[4]



(նկ. 5)



(նկ. 5ա)

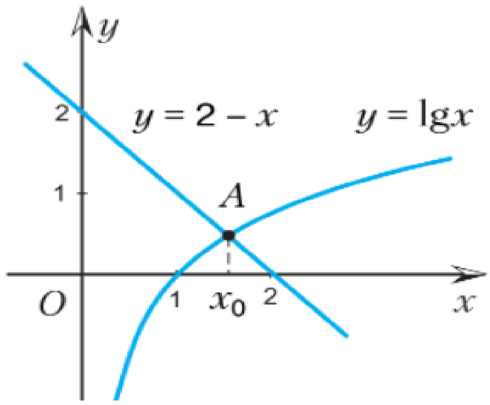
[3] Е. Рисс, «Глядя на график», Центр технологии тестирования «Кенгуру плюс», Санкт-Петербург, 2015, стр. 10
[4] В. Кучкуда, «Кенгуру» журнал № 25, Санкт-Петербург, 2004, стр. 14

Համակցված հավասարումների լուծումը գրաֆիկների օգնությամբ

Տվյալ բաժնում դիտարկել ենք գրաֆիկների օգնությամբ լուծումներ համակցված հավասարումները աշակերտներին ավելի պատկերավոր բացատրելու համար։ Գրաֆիկների լեզվով անհրաժեշտ է լուծել f(x) = g(x) հավասարումը նշանակում է գտնել y = f(x) և y = g(x) ֆունկցիաների գրաֆիկների հատման կետերը։ Նման կետերի աբսցիսները մեզ կտան հավասարման արմատները։

Օրինակ 1. Քանի՞ արմատ ունի lgx = 2 - x հավասարումը։ Այս հավասարման ճշգրիտ լուծման համար մենք միջոցներ չունենք։ Անհրաժեշտ է սահմանել առնվազն արմատների քանակը և դրանց մոտ արժեք։ Սրա համար օգտվել ենք y = lgx և y = 2 - x ֆունկցիաների հատկություններից։ Նախ նշենք, որ եթե x-ը գտնվում (0; 1) միջակայքում, ապա y = 2 - x գծային ֆունկցիայի արժեքները դրական են, իսկ լոգարիթմի արժեքները՝ բացասական։ Սա նշանակում է, որ գծային ֆունկցիայի գրաֆիկը (ուղիղը) գտնվում է լոգարիթմական ֆունկցիայի գրաֆիկից վեր։ Այնուամենայնիվ, եթե x = 2 գծային ֆունկցիան 0 է, իսկ լոգարիթմական ֆունկցիան դրական է, նշանակում է, որ ուղիղ գծի համապատասխան կետը գտնվում է լոգարիթմի գրաֆիկի տակ։ Բայց երկու գրաֆիկներն էլ անընդհատ գծեր են, ուստի նրանք կհատվեն որոշ միջանկյալ կետում, որը գտնվում է կոորդինատային հարթությունում x = 1 և x = 2 ուղիղների միջև (նկ. 6-ում դա տեղի է ունեցել A (x_0; 2 - x_0) կետում)։

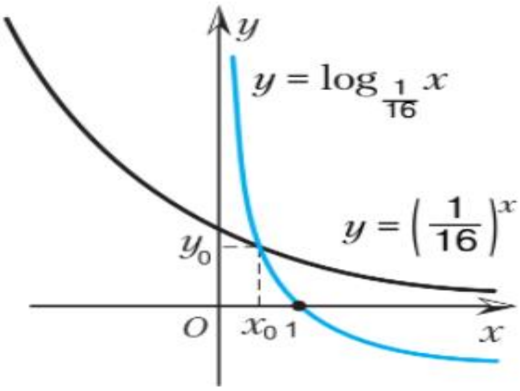
Այժմ մենք պետք է հասկանանք, թե արդյոք այս գծապատկերները ունեն ևս որևէ հատման կետ, բայց y = lgx ֆունկցիան աճում է ամբողջ որոշման տիրույթում, իսկ y = 2 - x ֆունկցիան՝ նվազում։ Հետևաբար, x_0 -ից ձախ կողմում գտնվող կետերի օրդինատները մեծ են A կետի օրդինատից, իսկ lgx գրաֆիկի օրդինատները՝ փոքր։ Այստեղից հետևում է, որ ոչ մի տեղ բացի A կետից, սրանց օրդինատները չեն կարող համընկնել, այսինքն՝ այդ ֆունկցիաների գրաֆիկները այլևս հատման կետեր չունեն։ Այսպիսով՝ lgx = 2 - x հավասարումը ունի մեկ արմատ։[5]



(նկ. 6)

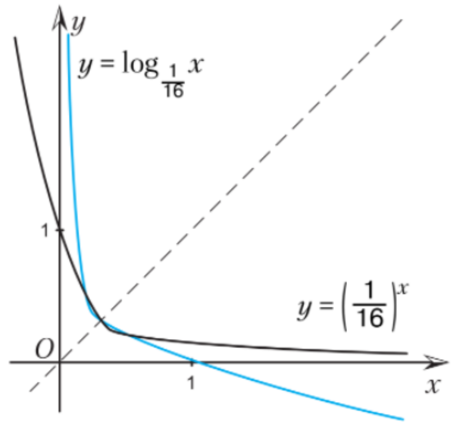
[5] Е. Рисс, «Глядя на график», Центр технологии тестирования «Кенгуру плюс», Санкт-Петербург, 2015, стр. 96

Օրինակ 2. Քանի՞ արմատ ունի $\log_{\frac{1}{16}} x = (\frac{1}{16})^x$ հավասարումը: Փորձենք պատասխանել այս հարցին՝ օգտագործելով y = $\log_{\frac{1}{16}} x$, $y = (\frac{1}{16})^x$ ֆունկցիաների գրաֆիկները: Ձեռքն ինքն է նկարում նկարը, որը հստակ երևում է գրաֆիկների հատման կետ: Արդյո՞ք այս հավասարումը ունի մեկ արմատ: Փորձելով տարբեր թվեր՝ պարզվում է, որ ճիշտ է, եթե x=$\mathbf{\frac{1}{2}}$ $\log_{\frac{1}{16}} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $(\frac{1}{16})^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$: Այսպիսով՝ M ($\mathbf{\frac{1}{2}}$; $\frac{1}{4}$) կոորդինատներով կետը այդ երկու գրաֆիկների հատման կետն է: Այս կետը պատկերված է նկ. 7-ում:



(նկ. 7)

Բայց y = $\log_{\frac{1}{16}} x$, $y = (\frac{1}{16})^x$ ֆունկցիաների գրաֆիկները սիմետրիկ են y = x ուղղի նկատմամբ: Այնուամենայնիվ, եթե փորձենք նկարով ցույց տալ, որ երկու գրաֆիկները հատվում են 2 կետում, պարզվում է, որ ծայրերը հանդիպում են և պատկերում են երկու հարթ ուռուցիկ և սիմետրիկ կորեր, որոնք հատվում են ուղիղ երկու կետով, հնարավոր չէ հատվեն: Եվ փաստն այն է, որ այս հավասարումն ունի 3 արմատ: Երրորդ հատման կետը գտնվում է y = x համաչափության առանցքի վրա: Իրոք, այդպիսի կետ կա, որը գտնվում է y = x ուղղի վրա, սակայն, նույնիսկ գիտակցելով դա՝ այնքան էլ հեշտ չէ պատկերել երկու նվազող և ներքևից ուռուցիկ կորերի հարաբերական դիրքը: Չափազանց տարօրինակ այս երկու գրաֆիկները միահյուսվում են: Նկ. 8-ում երևում է, որ գրաֆիկները ունեն 3 հատման կետ:[6]



(նկ. 8)

[6] Е. Рисс, «Глядя на график», Центр технологии тестирования «Кенгуру плюс», Санкт-Петербург, 2015, стр. 101

ԵԶՐԱԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆ ԵՎ ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Ամփոփելով հետազոտական աշխատանքը՝ կարող ենք եզրակացնել, որ գրաֆիկների հետ աշխատանքի արդիականության և առօրյայում կիրառելիության բազմազանության առումով դրա նկատմամբ հետաքրքրության բարձրացումը առաջնային է աշակերտների շրջանակներում: Ցույց տվեցինք, որ տարբեր տեսակի գրաֆիկներ կարող են պատասխանել տարբեր տեսակի պրակտիկ հարցերի (շարժման գրաֆիկ, տարվա կտրվածքով երեխայի գիտելիքների փոփոխության գրաֆիկ և այլն): Այն նաև օգնում է լուծել բավականին բարդ բնույթի համակցված հավասարումներ: Սակայն վերը նշված խնդիրներից բացի գոյություն ունեն բազմաթիվ հնարավոր դեպքեր, որոնց լուծման համար անհրաժեշտ է ճշգրիտ պատկերացում ունենալ գրաֆիկների կառուցման և նրանց հետ աշխատելու մասին:

Ուստի ցանկանում ենք առաջարկել գրաֆիկների օգտագործումը ոչ միայն համակցված հավասարումների, այլև անհավասարումներով խնդիրների լուծման պարագայում, ինչպես նաև՝ աշակերտներին ներկայացնելով տարբերակներ գրաֆիկների օգնությամբ լուծել եռանկյունաչափական անհավասարումների, պարամետր պարունակող հավասարումների և անհավասարումների խնդիրները: Առաջարկում ենք գրաֆիկների հետ աշխատանքի այս և նմանատիպ օրինակները կիրառել ավարտական դասարանների քննությունների, միասնական ավարտական ընդունելությունների ժամանակ, ինչպես նաև՝ մաթեմատիկական ուղղվածություն ունեցող արտադասարանական խմբակների դասընթացների ընթացքում:

ՕԳՏԱԳՈՐԾՎԱԾ ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. «Глядя на график», Е. Рисс, Центр технологии тестирования «Кенгуру плюс», Санкт-Петербург, 2015
2. В. Кучкуда, «Кенгуру» журнал № 25, Санкт-Петербург, 2004