ՏԱԹԵՎ ԳԻՏԱԿՐԹԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼԻՐ

ՎԵՐԱՊԱՏՐԱՍՏՎՈՂ ՈՒՍՈՒՑՉԻ

ՀԵՏԱԶՈՏԱԿԱՆ ԱՇԽԱՏԱՆՔ

Հետազոտության թեմա՝ Ինդուկցիայի կիրառությունները հանրակրթական դպրոցում մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում

Հետազոտող ուսուցիչներ՝ Լիլիթ Արսենյան

Հարությունյան Ռուզաննա

Երևանի Խաչատուր Աբովյանի անվան համար 2 հիմնական դպրոց

ԵՐԵՎԱՆ 2022

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Հետազոտության արդիականությունը: Ըստ Հանրակրթության պետական չափորոշչի՝ միջնակարգ դպրոցում «Մաթեմատիկա» ուսումնական բնագավառը նպատակաուղղված է լինելու սովորողների կողմից ինքնուրույն կշռադատություններ կատարելու ձգտմանը, տարաբնույթ խնդիրների լուծման ժամանակ ստեղծագործական մոտեցման ցուցաբերմանը, սովորողի մտավոր ունակությունները խթանելու, շրջապատի և առօրյա կյանքի տարբեր երևույթները մոդելավորելու, հիմնավոր դատողություններ կատարելու գիտելիքների, կարողությունների և հմտությունների զարգացմանը [1,կետ 32] : Այս նպատակների իրականացման գործում բացառիկ մեծ դեր ունեն ինդուկտիվ և դեդուկտիվ մտահանգումները, որոնք լայն կիրառություն ունեն ինչպես տեսական, այնպես էլ գործնական խնդիրներ լուծելիս: Ուսումնամեթոդական գրականության մեջ եթե դեդուկցիայի մասին քիչ թե շատ բացահայտ է խոսվում թեորեմներ ապացուցելու կամ ապացուցման խնդիրներ լուծելու ընթացքում, ապա ինդուկցիայի կիրառությունների հարցը հաճախ անբացահայտ և քողարկված է ներկայացվում:

Հետազոտության **նպատակն** է՝ հանրակրթական դպրոցում աշակերտների ստեղծագործական, հետազոտական մտագործունեության նպաստումը, ընդհանուր օրինաչափություններ հայտնաբերելու և հիմնավորումներ կատարելու համար անհրաժեշտ կարողությունների զարգացումը , ոչ լրիվ և լրիվ ինդուկցիաների կիրառման մեթոդական առանձնահատկությունների բացահայտումը:

Հետազոտության **խնդիրն** է.

- Ինդուկցիայի վերաբերյալ առկա գիտամանկավարժական գրականության քննական վերլուծությունը,
- Մաթեմատիկայի դասընթացում դրսևորվող ինդուկցիայի տեսակների առանձնահատկությունների բացահայտումը,
- Մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում ինդուկտիվ մտահանգումների կիրառության կարևորության հիմնավորումը:

ԳԼՈՒԽ 1. ԻՆԴՈՒԿՑԻԱՅԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ ՁևԱՎՈՐՎԱԾ ՀԱՐՑԱԴՐՈՒՄՆԵՐԸ

1.1 Ժամանակակից հարցադրումը

Մարդկային ճանաչողության, հատկապես գիտության հիմնարար նշանակություն ունեցող խնդիրներից մեկը իրերի և երևույթների ընդհանուր հատկությունների իմացությունն է, դրանց օրենքների հայտնաբերումը, որը շատ կարևոր է մարդու գործունեության համար: Օրինակ, էլեկտրատեխնիկը, իմանալով, որ պղինձը փոքր դիմադրություն է ցույց տալիս էլեկտրական հոսանքին, իսկ վոլֆրամը՝ մեծ, որպես հաղորդալար օգտագործում է պղնձե, իսկ որպես շիկալար՝ վոլֆրամե լարերը: Մաթեմատիկական մտագործունեության ընթացքում ևս հաճախ ստեղծվում են իրավիճակներ, երբ խնդիր է դրվում բացահայտել ընդհանուր օրինաչափությունները, հիմնավորել այդ օրինաչափություններն արտահայտող պնդումների հավաստիությունը:

Ընդհանուր օրինաչափություններ հայտնաբերումը ստեղծագործական բարդ ընթացք է,որի արդյունքում բացահայտվում է նոր գիտելիք: Գիտելիքների ծավալման ընթացքի մեջ, ստեղծագործական ակտիվ մտագործունեություն կազմակերպելու առումով բացառիկ դեր ունեն ինդուկցիան և դեդուկցիան, ուստի և հատուկ քննարկման է արժանի այն հարցը, թե ինչ կերպ են դրանք օգտագործվում ուսուցման գործընթացում:

Դեդուկտիվ մտահանգման շնորհիվ իրականացվում է հետևյալ գործառույթը.

- գիտելիքների ընդլայնում և հիմնավորում արտածումների միջոցով:

Մաթեմատիկայի ուսումնասիրման ընթացքում ինդուկտիվ մտահանգման շնորհիվ իրականացվում է հիմնականում երկու գործառույթ [6].

- ընդհանուր օրինաչափությունների վերաբերյալ հավաստի *<u>գիտելիքների բխեցում և հիմնավորում,</u>*
- ընդհանուր օրինաչափությունների վերաբերյալ հավանական *<u>գիտելիքների կռահում և հայտնաբերում:</u>*

Եթե ներկայումս առաջին գործառույթի մասին ասվում է ավելի բացահայտ ու վստահաբար, ապա երկրորդ գործառույթի մասին առայժմ խոսվում է ավելի զուսպ և քողարկված ձևով: Մի դեպքում, երբ խոսքը գնում է հավաստի և հիմնավոր եզրահանգմանը, գործ ունենք հետազոտման արդեն մշակված արդյունքի հետ, երբ այն ներկայացվում է հանրությանը: Մյուս դեպքում, երբ խոսքը վերաբերում է հավանական և ոչ լիարժեք հիմնավորված եզրահանգմանը, արդեն գործ ունենք բուն հետազոտման ընթացքի հետ : Առաջին դեպքում հավաստի եզրակացություններ ներկայացնելիս, որպես կանոն, գործածվում են խիստ ապացուցումների մեթոդներ, իսկ մյուս դեպքում՝ ընդհանուր օրինաչափությունների վերաբերյալ եզրակացություններ բացահայտելու որոնողական գործընթացում ավելի հաճախ գործածվում է ոչ լրիվ ինդուկցիան և անալոգիան, որն էլ իր հերթին հարակից է ոչ լրիվ ինդուկցիային և ներկայացնում է դրա մեկ այլ դրսևորում: Ոչ լրիվ ինդուկցիան ակտիվացնում է հետազոտական բնույթի ներունակությունը, և այն հնարավորություն է ստեղծում ընդհանուր օրինաչափություններ կռահելու, կանխատեսելու և հայտնագործելու համար: Այստեղ քննարկման է արժանի այն հարցը, թե մաթեմատիկական կրթության բնագավառում արդյո՞ք արդարացի է ոչ լրիվ ինդուկցիայի նկատմամբ թերահավատությունը, միթե՞ լիարժեք է օգտագործվում ճանաչողական և կիրառական այդպիսի ներուժ ունեցող մտահանգման ներքին հնարավորությունները:

Ոչ լրիվ ինդուկցիայի ուսումնական նշանակության մեկնաբանման համար կարևոր է պարզել այն հարցը, թե որն է մաթեմատիկական կրթության առաջնային խնդիրը. պատրաստի գիտելիքների հաղորդու՞մը, թե՞ գիտելիքներ հայտնաբերելու կարողությունների զարգացումը: Անմիջապես նկատենք, որ ժամանակակից կրթակարգերում ավելի է շեշտվում սովորողների ինքնուրույն ճանաչողական կարողությունների զարգացման կարևորությունը: Դա խոսում է այն բանի օգտին, որ մաթեմատիկական կրթության մեջ անհրաժեշտություն է առաջանում չնսեմացնել ոչ լրիվ ինդուկցիայի դերն ու նշանակությունը: Դրան ավելացենք, որ առհասարակ ինդուկտիվ մտահահանգումը գործնական – կիրառական մեծ արժեք է ստանում հատկապես ոչ լրիվ ինդուկցիայի շնորհիվ, իսկ կիրառական ուղղվածության ապահովումը նույնպես ժամանակակից կրթակարգերում դիտվում է որպես առաջնային խնդիր:

Ոչ լրիվ ինդուկցիայի ուսումնական նշանակությունը կարևորվում է մեկ այլ առումով ևս: Ոչ լրիվ ինդուկցիայի եզրակացության հավաստի գիտելիք լինելը դեռևս երաշխավորված չէ: Թեև նախադրյալները որոշակի հիմք են ծառայում եզրակացության նկատմամբ վստահություն ունենալու համար, սակայն քանի որ այդ նախադրյալները չեն սպառում դիտարկվող դասի ամբողջ ծավալը, ուրեմն եզրակացությունը ներկայացնում է հավանական գիտելիք: Դա նշանակում է, որ նախապես պետք է պատրաստ լինել նաև այն բանին, որ եզրակացության ճշմարիտ լինելու վերաբերյալ վստահությունը կարող է չարդարանալ: Իսկ որքա՞ն արժեքավոր է իմացական այդ իրավիճակը: Նախ՝ հավանական գիտելիքի մասին պատկերացումն ինքնին ճանաչողական լուրջ ձեռքբերում է սովորողի համար, քանի որ առօրեական մտածողության ընթացքում մարդը ավելի հաճախ գործում է հենց հավանական գիտելիքներով, և արժի, որ նախապես լիարժեք պատկերացում ունենա դրա մասին: Այնուհետև՝ գիտելիքի հավանական լինելու գիտակցումը դրդում է նպատակային որորնումների, առաջ է բերում հետազոտության շարունակականության գիտակցված պահանջմունք: Վերջապես՝ հավանական գիտելիքի հետագա փաստարկման ընթացքում հնարավոր հերքմանը պատրաստ լինելու գիտակցումը հենց սկզբից ապահովագրում է մոլորություններից, հիասթափությունից ու սահմանափակումներից, ազատագրում է գիտելիքի՝ որպես քարացած ճշմարտության հանդեպ պաշտամունքի բարդույթից և այսպիսով առաջ է բերում գիտելիքի հետ անկաշկանդ վերաբերվելու վստահություն:

Այլ խոսքով՝ կարևոր սկզբունք է դառնում սովորողներին ինքնուրույն սովորել սովորեցնելը, ինքնուրույն մտածողության ձևավորումն ու զարգացումը, որոնք միշտ էլ համարվել են ուսուցման գործընթացի կարևոր նպատակները: Դեռևս Կ. Դ. Ուշինսիկին լուրջ ուշադրություն էր դարձնում աշակերտի ինքնուրույն մտածողության զարգացմանը. «Սովորողի մտքի ինքնուրույնությունը ցանկացած արդյունավետ ուսուցման ամուր հիմքն է»:Այդ ամենի արդյունքում աշակերտները ձեռք կբերեն այնպիսի կարողություններ, որոնք անհրաժեշտ են ինքնուրույն հետազոտություններ կատարելու, գիտելիք կառուցելու և այդ գիտելիքը կյանքում կիրառելու համար: Սա ավելին է, քան այս կամ այն ուսումնական առարկա, այդ թվում և մաթեմատիկա սովորեցնելը: Այդ տեսակետից իմաստ է ստանում փորձարարական մեթոդների կիրառումը մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում. [9]:

Առաջին հայացքից արտամաթեմատիկական բնույթ ունեցող այդ հանգամանքը նոր լույս է սփռում մաթեմատիկական կրթության զարգացման հեռանկարի վրա: Միևնույն ժամանակ այն կատարում է յուրահատուկ դիտակետի դեր, որտեղ առավել բացահայտ են երևում հավանական գիտելիքների հիման վրա կազմակերպվող ուսուցման և դրա հետ փոխկապակցված՝ ոչ լրիվ ինդուկցիայի կրթական արժեքները:

ԳԼՈՒԽ 2. ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԻՆԴՈՒԿՑԻԱՅԻ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅԱՆ ԳԻՏԱՄԵԹՈԴԱԿԱՆ ՀԻՄՈՒՆՔՆԵՐԸ

2.1 Ինդուկցիան որպես մտահանգում

Ինդուկցիայի՝ իբրև մտահանգման առանձնահատկությունն այն է, որ նրա նախադրյալները պարունակում են պնդումներ առանձին-առանձին առարկաների վերաբերյալ և մի պնդում այն մասին, որ այդ առարկաները որևէ դասի անդամ են, իսկ բխեցված եզրակացությունը ներկայացնում է պնդում այդ առարկաների ամբողջ դասի վերաբերյալ: Ինդուկցիայի էությունը, երբեմն առանց անվանումը իմանալու, քաջածանոթ է նաև դպրոցականներին: Այսպես, եթե ուսումնական տարբեր իրավիճակներում որևէ պնդում ապացուցելու համար դիտարկվում են հնարավոր դեպքեր, և այնուհետև ընդհանրացվում է դիտարկման արդյունքը, ապա դրանով հենց գործառվում է ինդուկտիվ մտահանգումը: Ինդուկտիվ մտահանգմանը հատկանշական է նաև այն, որ դիտարկման համար գոյություն ունեն տարբեր դեպքեր.

- Հնարավոր է սպառել պնդմանը վերաբերող բոլոր անդամների դիտարկումը,
- պնդմանը վերաբերող բոլոր անդամների դիտարկումը հնարավոր չէ սպառել:

Առաջին դեպքում գործ ունենք վերջավոր թվով անդամների հետ, ընդ որում բոլոր անդամները դիտարկման համար գործնականորեն հասանելի են: Դա հենց ներկայացնում է լրիվ ինդուկցիան, որը սխեմատիկ կարելի է ներկայացնել հետևյալ կերպ.

S_1-ը P է,

S_2-ը P է,

… ,

S_n-ը P է

S_1-ը, S_2-ը, …, S_n-ը S-ի բոլոր անդամներն են

S-ը P է (կամ՝ բոլոր S-երը P են)

Այս դեպքում, փաստորեն, A պնդմանը (S-ը P է) վերաբերող բոլոր անդամների թիվը n է, որոնք հաստատվում նե A_1, A_2, …, A_n պնդումներով, և եթե նախադրյալներում առկա են այդ բոլոր A_i պնդումները (S_I-ն P է, $1 \le i \le n$), ապա բավարար հիմքեր կան A պնդումը եզրակացնելու համար:

Բերենք լրիվ ինդուկցիայի կիրառության մի պարզ օրինակ միջին դպրոցի երկրաչափության դասընթացից:

Դիցուք՝ ուզում ենք ապացուցել, որ շրջանագծին ներգծյալ անկյունը չափվում է հենման աղեղի աստիճանային չափի կեսով: Այս դեպքում նախ դիտարկվում են հետևյալ մասնավոր դեպքերը.

ա) շրջանագծի կենտրոնն ընկած է անկյան կողմի վրա,

բ) շրջանագծի կենտրոնն ընկած է անկյան ներքին տիրույթում,

գ) շրջանագծի կենտրոնն ընկած է անկյան արտաքին տիրույթում:

Առանձին-առանձին յուրաքանչյուր դեպքի համար պնդման ճշմարիտ լինելը ցույց տալուց հետո, հաշվի առնելով, որ բոլոր հնարավոր դեպքերը սպառված են՝ եզրակացնում ենք , որ պնդումը տեղի ունի բոլոր դեպքերում:

Լրիվ ինդուկցիայի նմանատիպ այլ օրինակներ ևս կարելի է բերել:

Իսկ ինչպիսի՞ն է պատկերը այն դեպքում, երբ եզրակացման ենթակա պնդմանը վերաբերող բոլոր անդաների դիտարկումը հնարավոր չէ սպառել: Ի դեպ՝ սպառման անհնարինությունը ամենևին պարտադիր չէ, որ կապված լինի դիտարկվող անդամների անվերջ բազմությամբ լինելու հետ: Դրանք կարող են և կազմել վերջավոր բազմություն, բայց դրանով հանդերձ դիտարկման համար լինեն անհասանելի, ասենք, գործնական բնույթի սահմանափակությունների պատճառով: Այսպես թե այնպես, եզրակացության բխեցումը կատարվում է տվյալ պնդմանը վերաբերող ոչ թե բոլոր անդամների, այլ դրանց մի մասի դիտարկման հիման վրա, սակայն եզրակացությունը, ինչպես որ լրիվ ինդուկցիայի դեպքում, վերաբերում է առարկաների ամբողջ դասին: Այդպիսի մտահանգումը ոչ լրիվ ինդուկցիա է, որը սխեմատիկ կարելի է արտահայտել հետևյալ կերպ.

S_1-ը P է ,

S_2-ը P է ,

… ,

S_m-ը P է

S_1-ը , S_2-ը , … , S_m-ը S-ի անդամներ են

S-ը P է (կամ՝ բոլոր S-երը P են)

Այս դեպքում, փաստորեն, եզրակացություն հանդիսացող A պնդմանը վերաբերող բոլոր առարկաների թիվը ավելի մեծ է , քան նախադրյալներում առկա A_1 , A_2 , …, A_m պնդումների թիվը: Դրանցից հետևում է, որ արդյունքում ստացվող եզրակացությունը՝ իբրև հավաստի գիտելիք ընդունելու համար հիմքերը դեռևս բավարար չեն:

Դրա հետ մեկտեղ, ոչ լրիվ ինդուկցիայի կապակցությամբ ուշադրության են արժանի մի քանի կարևոր հանգամանքներ:Որքան էլ տարակուսանքներ լինեն ոչ լրիվ ինդուկցիայի եզրակացության հանդեպ, միևնույն է փորձարարական հետազոտություններում և առօրյայում այն ունի անփոխարինելի կիրառություններ: Օրինակ, եթե մարդն իր կենսափորձով նկատել է, որ ամեն օր Արեգակը ծագում է արևելքից և դրա հիման վրա (առանց երկնային մեխանիկայի օրենքների մասին պատկերացում ունենալու) եզրակացնում է, որ վաղը նույնպես արևածագը նույն կողմից է լինելու, ապա նա, ըստ էության, առանց բացահայտ գիտակցելու, օգտվում է ոչ լրիվ ինդուկցիայից և ամենևին չի երկմտում եզրակացության հավաստիության համար: Նմանապես, ամեն մի գործողություն, որում ինչ որ դեր ունի մարդու կենսափորձը, անխուսափելորեն հենվում է հենց ոչ լրիվ ինդուկցիայի վրա: Այսպիսով՝ մարդկային մտածողությունը հակված է դեպի թերի ինդուկցիա. նրան հատուկ է մասնավոր մի քանի դեպքերից ընդհանրական դատողությունների, եզրակացությունների հանգելը: Օրինակ, եթե ինչ-որ բնակավայրում մարդուն մի քանի անգամ խաբել են, ապա նա եզրակացնում է, որ այդ բնակավայրում բոլոր մարդիկ խաբեբաներ են, կամ եթե մարդկանց մի խումբ լքում է հայրենիքը, ապա մարդիկ եզրակացնում են, որ բոլորը լքում են հայրենիքը և այլն: Այդ առումով՝ կենսափորձով ձեռք բերված գիտելիքները, գրեթե առանց բացառության, ոչ լրիվ ինդուկցիայի տարրեր են պարունակում իրենց հիմքում, բայց և այնպես այդպիսի գիտելիքները մարդու կողմից արժանահավատ են համարվում:

Ոչ լրիվ ինդուկցիայի կիրառությունների նկատմամբ անտարբեր չեն նաև մաթեմատիկական դասընթացների շարադրանքները: Այսպես, աշակերտների համար, տարիքային առանձնահատկություններից ելնելով, քանի դեռ անմատչելի են ապացուցումների առավել հիմնավոր մեթոդները, անփոխարինելի դեր ունի հենց ոչ լրիվ ինդուկցիան: Այդ կերպ է, որ երեխան հայտաբերում է, ասենք, գումարելիների տեղափոխության օրենքը, առաջին n բնական թվերի գումարի հաշվման բանաձևը, բազմանկյան անկյունների գումարի հաշվման բանաձևը և շատ-շատ այլ օրենքներ: Այստեղ հարցն այն է, թե մաթեմատիկայի դասընթացում որքա՞ն նպատակային է կազմակերպվում ոչ լրիվ ինդուկցիայի կիրառությունը ապահովող կարողությունների զարգացումը, չէ՞ որ առօրյայում հսկայական կիրառություն ունեցող այդ մտահանգման համար լավագույն օրինակներ կարող է տալ հենց մաթեմատիկայի դասընթացը:

Ոչ լրիվ ինդուկցիայի համար կարևոր է երկու հիմնական դիտողություն.

1) Ոչ լրիվ ինդուկցիայի եզրակացությունը կարող է և ճշմարիտ չլինել: Դա ցույց տանք Էյլերի կողմից առաջարկված հանրահայտ օրինակով:

Դիտարկենք $f(n)=n^2-n+41$ տեսքի թիվը: Անմիջական ստուգումով կարելի է համոզվել, որ n=1, 2, …, 40 արժեքների դեպքում f(n)-ը պարզ թիվ է: Սակայն $f(41)=41^2$, այսինքն պարզ թիվ չէ: Նմանապես $P(n)=n^2-79n+1601$ տեսքի թիվը n-ի 1-ից մինչև 79 արժեքների դեպքում ներկայացնում է պարզ թիվ, սակայն P(80)-ը արդեն պարզ չէ [10]:

2) Ոչ լիրվ ինդուկցիան կիրառական մեծ արժեք ունի բուն հետազոտության գործընթացում, երբ հարկավոր է լինում հայտնաբերել և գտնել որևէ օրինաչափություն, այսինքն առաջադրել որևէ վարկած:

Դիտարկենք օրինակ, դիցուք՝ մեզ անհրաժեշտ է գտնել բանաձև առաջին n բնական թվերի խորանարդների գումարի համար: Նպատակահարմար է նախ կատարել փորձարկումներ.

$1^3+2^3=1+8=9=3^2$

$1^3+2^3+3^3=9+27=36=6^2$

$1^3+2^3+3^3+4^3=36+64=100=10^2$

$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3=100+125=225=15^2$

Նկատի ունենալով, որ $3^2=\left(\frac{2\cdot3}{2}\right)^2$, $6^2=\left(\frac{3\cdot4}{2}\right)^2$, $10^2=\left(\frac{4\cdot5}{2}\right)^2$, $15^2=\left(\frac{5\cdot6}{2}\right)^2$ և այլն, կարող ենք ձևակերպել այսպիսի վարկած. $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$:

Ունենալով վարկածը, կարող ենք այն հաստատել օգտվելով մաթեմատիկական ինդուկցիայից

ա/n=1 դեպքի համար $1^3=\left(\frac{1\cdot2}{2}\right)^2$, այսինքն ինդուկցիայի բազիսի պահանջը բավարարված է :

բ/Ենթադրենք $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left(\frac{m(m+1)}{2}\right)^2$: Այդ դեպքում՝

$1^3+2^3+3^3+\ldots+m^3+(m+1)^3=\left(\frac{m(m+1)}{2}\right)^2+(m+1)^3==\frac{(m+1)^2(m^2+4m+4)}{4}=\frac{(m+1)^2(m+2)^2}{4}=\left(\frac{(m+1)(m+2)}{2}\right)^2$

Սա էլ նշանակում է, որ ինդուկցիոն քայլի պահաջը բավարարված է :

Այսպիսով ոչ լրիվ ինդուկցիան հնարավորություն է տալիս օրինաչափությունը նկատելու և հայտնաբերելու համար, իսկ մաթեմատիկական ինդուկցիան՝ այդ օրինաչափությանը վերաբերող պնդումը ապացուցելու համար:

ԳԼՈՒԽ 3. ԻՆԴՈՒԿՑԻԱՅԻ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ԴԱՍԸՆԹԱՑՈՒՄ

3.1 Ինդուկցիայի օգտագործումը մաթեմատիկայի ուսուցման ընթացքում

Ինչպես տեսանք մեծ է ինդուկցիայի դերը մաթեմատիկական գործունեության իրականացման մեջ: Դիտարկելով այն՝ առաջին հերթին անհրաժեշտ է օգնել աշակերտներին տիրապետել այդ մեթոդին, ցույց տալ նրանց ինչում է կայանում դրա էությունը, ինչպիսի հնարավորություն ունի նրա կիրառությունը: Ինդուկցիոն մեթոդի կիրառությունը՝ որպես մաթեմատիկայի ուսուցման մեթոդ, առաջին հերթին նշանակում է մաթեմատիկական մտագործունեության կազմակերպում և երկրորդ հերթին ՝այդ գործունեության արդյունքների ուսուցում: Եթե դիտարկենք ինդուկտիվ մեթոդը հատկապես այդ ասպեկտում, ապա նրա առաջին փուլում առաջ է գալիս բացահայտ պատրաստակամություն, հետազոտական առաջընթաց ուսումնական աշխատանքում, որի ընթացքում դպրոցականները ձեռք են բերում բացահայտ գիտելիքներ՝ ծագած էվրիստիկ գործունեության արդյունքում:

Թերևս ինդուկցիայի մասին խոսք գնում է ավելի բարձր դասարաններում , սակայն այն կարելի է նեմուծել հիմնական դպրոցում՝ առանց դրա մասին բացահայտ խոսելու: Օրինակ արդեն 5-րդ դասարանում «Պարզ և բաղադրյալ թվեր» թեմայի յուրացումից հետո կարելի է տալ հետևյալ առաջադրանքը. Կարելի՞ է արդյոք զույգ թիվը ներկայացնել երկու պարզ թվերի գումարի տեսքով:

Այստեղ կներկայացնենք ընտրված օրինակներ, որոնց միջոցով կկարողանանք լուսաբանել ոչ լրիվ ինդուկցիայի, անալոգիայի, լրիվ ինդուկցիայի և մաթեմատիկական ինդուկցիայի կիրառության հարցերը, դրանց առանձնահատկությունները և յուրաքանչյուրի կրթական նշանակությունը:

Օրինակ1. Դիտարկենք հետևյալ օրինակը, որում օրինաչափությունը հայտնաբերվում է ոչ լրիվ ինդուկցիայի օգնությամբ: Նպատակն է խթանել տրամաբանական մտածողության զարգացմանը՝ ուղղորդելով բացահայտելու և բանաձևով ներկայացնելու օրինաչափությունը:

Ուսուցիչը դասարանը բաժանում է 2 խմբի: Դասարանի կենտրոնում մի շարքով իրար կողք կողքի 7 աթոռ է դնում: Յուրաքանչյուր խմբից 3-ական աշակերտ է հրավիրում կենտրոն. մի խմբից 3 աղջիկ, մյուսից՝ 3 տղա: Խնդրում է, որ աղջիկները նստեն մի կողմից, տղաները՝ մյուս կողմից: Մեջտեղի աթոռը ազատ է մնում: Առաջարկում է, որ աթոռների վրա տեղաշարժվելով՝

աղջիկներն ու տղաները փորձեն տեղերով փոխվել: Տեղաշարժվել կարելի է միայն երկու տեսակ քայլերով՝ տեղափոխվել կողքի աթոռին (պայմանականորեն այդ քայլը կանվանենք՝ սահել), տեղափոխվել `մեկ հոգու բաց թողնելով (պայմանականորեն այդ քայլը՝ անվանենք ցատկել):

Երեխաները փորձում են կատարել հանձնարարությունը, ինչը սովորաբար հաջողվում է մի քանի փորձից հետո: Ապա ուսուցիչը խնդրում է վերադառնալ իրենց խմբերը և հաշվել, թե նվազագույնը քանի քայլ է անհրաժեշտ տեղափոխումն իրագործելու համար:

Ավարտելով ` խմբերը ներկայացնում են արդյունքը. պարզվում է, որ ստացված  թվերն իրարից շատ են  տարբեր: Պարզելու համար, թե  դրանցից որն է  ճիշտ, ուսուցիչը առաջարկում է խնդիրը դիտարկել ` սկսելով ավելի պարզ դեպքերից, որի համար կենտրոնում թողնում է 3 աթոռ: Ապա խմբերից մեկ աղջիկ և մեկ տղա է կանչում և խնդրում կրկնել առաջադրանքը, որն այս դեպքում շատ հեշտությամբ կատարում են:

Ուսուցիչն առաջարկում է գրատախտակին գրել շարժումների հերթականությունը`սահել նշելով Ս, իսկ ցատկը՝ Ց տառով:

Ստացվում է ՍՑՍ

Ապա գրատախտակին աղյուսակ է գծում, որը պետք է հերթով լրացնեն.

ի կողմում նստած-անակը	յներ	ւր	րժումների թիվը

Հետո ավելացնում են 2 աթոռ և յուրաքանչյուր կողմում ևս մեկական անդամ: Կրկնում են առաջադրանքը՝ միաժամանակ գրատախտակին շարժումները նշելով.

ՍՑՍ

ՍՑՍՑՑՍՑՍ

Ի կողմում նստած-անակը	յներ	ւր	րժումների թիվը

Այնուհետև ևս 2 աթոռ է ավելացվում և ևս մեկական անդամ: Ստացվում է.

ՑՅՍ

ՑՅՍՅՅՍՅՍ

ՑՅՍՅՅՍՅՅՅՍՅՅՍՅՍ

Մի կողմում նստած-անակը	յներ	ւր	րժումների թիվը

Այժմ ուսուցիչը կարող է երեխաներին առաջարկել՝ փորձել առանց վարժությունը կատարելու շարունակել լրացնել աղյուսակը՝ ենթադրելով, որ ամեն անգամ նույն կերպ ավելացվում են աթոռներ և մասնակիցներ: Այն աշակերտը , ում հաջողվում է դա անել, դասարանին բացատրում է, թե ինչպես հաշվեց: Եթե աշակերտներին չի հաջողվում գտնել օինաչափությունը, ուսուցիչը կարող է մեկ անգամ էլ շարունակել վարժությունը՝ ևս մեկական աթոռ և մեկական անդամ ավելացնելով:Այս անգամ կստացվի հետևյալ պատկերը.

Օրինաչափությունը տեսանելի դարձնելու համար ուսուցիչը աթոռների մի կողմում նստած անդամների թիվը նշանակում է n տառով և երեխաների ուշադրությունը հրավիրում մյուս տվյալներին՝ առաջարկելով գնահատել դրանք:

՟ի կողմում նստած-անակը	յներ	ւր	ւրժումների թիվը

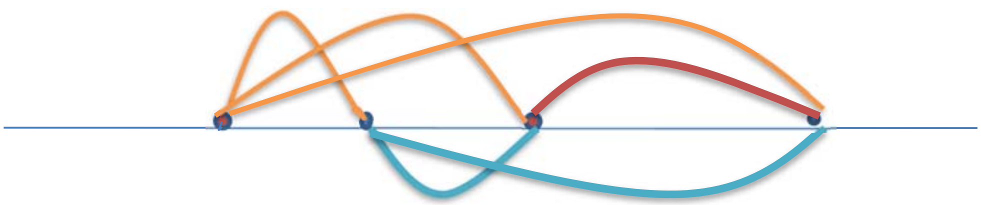
Օրինաչափությունը պարզ է դառնում. սահոցների թիվը կլինի 2n, ցատկերի թիվը՝ n^2 , ընդհանուր շարժումների թիվը՝ $2n+ n^2$:

Դասավանդման մեր փորձը ցույց տվեց, որ տվյալ օրինաչափությունը բացահայտելուն էապես օգնում է փորձարկումներ կատարելը, երբ աշակերտները եզրակացության են հանգում ոչ թե վերացական դատողությունների, այլ անմիջական, իրենց կողմից ստացված տվյալների հետազոտության միջոցով: Իսկ այդ հետազոտության հիմքում ընկած է ոչ լրիվ ինդուկցիայի մեթոդը:

Օրինակ 2 .

Մի ուղղի վրա նշված չորս կետերով քանի՞ հատված է առաջանում: Նույն հարցին պատասխանել 5; 6; 10; 100 կետերի դեպքում:

Այս խնդիրը ևս կարելի է լուծել ոչ լրիվ ինդուկցիայի միջոցով՝ կռահելով օրիանաչափությունը:



4 կետի դեպքում կունենանք՝ 3+2+1=6 (հատված)

5կետի դեպքում՝ 4+3+2+1=10 (հատված)

6 կետի դեպքում՝ 5+4+3+2+1= 15(հատված)

…

10 կետի դեպքում՝ 9+8+7+6+5+4+3+2+1=45 (հատված)

…

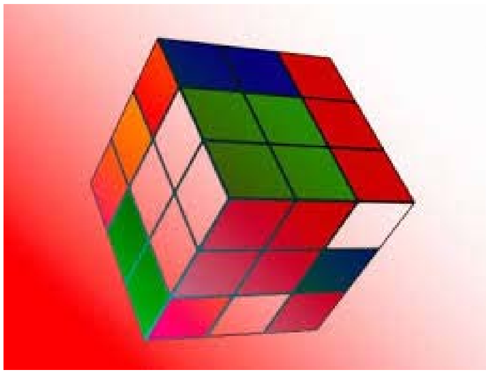
n կետի դեպքում՝ 1+2+3+4+…+ n-1= n(n-1)/2 (հատված):

Օրինակ 3.

Խորանարդի բոլոր նիստերը դրսի կողմից ներկված են : Մի գագաթից ելնող կողերը նշագծումով բաժանել են 3-ական հավասար հատվածների, և այդ նշված կետերով տարել են հատույթներ այնպես, որ խորանարդը տրոհվել է 27 խորանարդիկների:Որոշեք այն խորանարդիկների քանակը, որոնք ունեն ՝ա/ ներկված 3 նիստ, բ/ ներկված 2 նիստ, գ/ ներկված 1 նիստ, դ/ ներկված ոչ մի նիստ:

Դիտարկել խնդիրը նաև այն դեպքերի համար, երբ խորանարդի կողերը բաժանվել է 4-ական, 5-ական , 6-ական և ընդհանրապես n-ական հատվածների:

Լուծում:



Դիտարկենք այն դեպքը, երբ մի գագաթից ելնող կողերը նշագծումով բաժանել են 3-ական հավասար հատվածների: Այդ դեպքում կունենանք $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ իրար հավասար խորանարդիկներ:

ա/ ներկված 3 նիստ-8 հատ(բոլոր այն խորանարդիկները, որոնք գտնվում են խորանարդի գագաթում)

բ/ ներկված 2 նիստ-12 հատ(բոլոր այն խորանարդիկները, որոնք ընկած են կողերի վրա)

գ/ ներկված 1 նիստ-6 հատ(բոլոր այն խորանարդիկները, որոնք ընկած են նիստերի վրա)

դ/ ներկված ոչ մի նիստ-1 հատ

Այժմ Դիտարկենք այն դեպքը, երբ մի գագաթից ելնող կողերը նշագծումով բաժանել են 4-ական հավասար հատվածների : Այդ դեպքում կունենանք $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ իրար հավասար խորանարդիկներ:

ա/ ներկված 3 նիստ-8 հատ

բ/ ներկված 2 նիստ-2·12=24 հատ

գ/ ներկված 1 նիստ-4·6 =24հատ

դ/ ներկված ոչ մի նիստ-8 հատ

Այժմ Դիտարկենք այն դեպքը, երբ մի գագաթից ելնող կողերը նշագծումով բաժանել են 5-ական հավասար հատվածների : Այդ դեպքում կունենանք $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ իրար հավասար խորանարդիկներ:

ա/ ներկված 3 նիստ-8 հատ

բ/ ներկված 2 նիստ-3·12=36 հատ

գ/ ներկված 1 նիստ-9·6 =54 հատ

դ/ ներկված ոչ մի նիստ- 27 հատ

Դիտարկենք այն դեպքը, երբ մի գագաթից ելնող կողերը նշագծումով բաժանել են 6-ական հավասար հատվածների: Այդ դեպքում կունենանք $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ իրար հավասար խորանարդիկներ:

ա/ ներկված 3 նիստ-8 հատ

բ/ ներկված 2 նիստ-4·12=48 հատ

գ/ ներկված 1 նիստ- 16·6 =96 հատ

դ/ ներկված ոչ մի նիստ- 64 հատ

Եվ վերջապես դիտարկենք այն դեպքը, երբ մի գագաթից ելնող կողերը նշագծումով բաժանել են n-ական հավասար հատվածների : Այդ դեպքում կունենանք $n \cdot n \cdot n = n^3$ իրար հավասար խորանարդիկներ:

ա/ ներկված 3 նիստ-8 հատ

բ/ ներկված 2 նիստ-(n-2)·12 հատ

գ/ ներկված 1 նիստ- $(n-2)^2 \cdot 6$ հատ

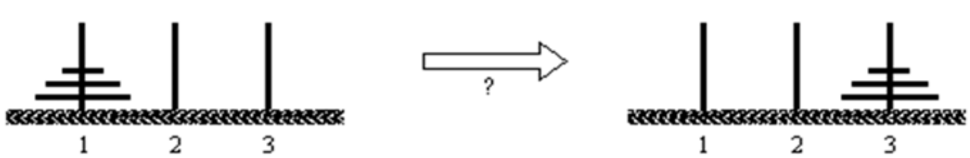
դ/ ներկված ոչ մի նիստ- $(n-2)^3$ հատ

Կատարենք ստուգում.

$8+(n-2)\cdot 12 + (n-2)^2 \cdot 6 + (n-2)^3 = 8+12n-24+6n^2-24n+24+n^3-6n^2+12n-8=n^3$

Խնդիրը լուծելու համար օգտվեցինք ոչ լրիվ ինդուկցիայից: Ոչ լրիվ ինդուկցիան հնարավորություն է տալիս օրինաչափությունը նկատելու և հայտնաբերելու համար:

Օրինակ 4. Հանոյան աշտարակներ.խաղ, որ զարգացնում է տրամաբանությունը, ուշադրությունը, այն լայն տարածում գտած խաղերից է: Նրա էությունը հետյալում է. մի ուղղի վրա (չնայած դա պարտադիր չէ) իրարից հեռու կանգնեցված է 3 ձող, որոնցից մեկի վրա գտնվում է օղակների բուրգ (օղակները փոքրանում են ներքևից վերև ուղղությամբ) , հարկավոր է բուրգը տեղափոխել մեկ ուրիշ ձողի վրա հետևելով կանոններին՝ չի կարելի տեղափոխել միանգամից մի քանի օղակ և չի կարելի ավելի մեծ օղակը դնել ավելի փոքր օղակի վրա:



Օրինակ , եթե ունենք երկու օղակներով բուրգ , ապա կարելի է տեղափոխել այսպես. փոքր օղակը դնենք երկրորդ ձողի վրա, հետո մեծը երրորդ ձողի վրա, ապա փոքրը մեծի վրա (համարակալելով ձողերը ձախից աջ՝ $1\to2$, $1\to3$, $2\to3$):

Մեր նպատակն է ցույց տալ, որ կարելի է տեղափոխել ցանկացած քանակով օղակներ՝ չխախտելով և ոչ մի կանոն:

Լուծում: Ենթադրենք բուրգն ունի երեք օղակ, մտովի անտեսենք ամենամեծ օղակը և այդ ժամանակ կմնա երկուսը, որի համար մենք գիտենք տեղափոխելու կարգը: Այժմ վերին երկու օղակը տեղափոխոխենք վերջին ձողին և հիշելով ամենամեծի մասին , այն տեղափոխենք երկրորդ ձողի վրա: Հետո երրորդ ձողի վրայի երկու օղակները տեղափոխենք երկրորդի վրա, ինչպես արված է ստորև բերված նկարում: Այն կարող ենք ներկայացնել նաև հետևյալ կերպով՝ $1\to2$, $1\to3$, $2\to3$, $1\to2$, $3\to1$, $3\to2$,$1\to2$:

Այսպիսով ,հանգունորեն, երկու օղակների տեղափոխության միջոցով ստացանք երեք օղակներով բուրգի տեղափոխությունը, երեքի միջոցով կստանանք չորս օղակներով բուրգի տեղափոխությունը, ... :

Ավելին , նույն եղանակով կարող ենք հաշվել նաև տեղափոխման քայլերի քանակը՝ օղակների n թվից կախված: Դժվար չէ նկատել, որ եթե n օղակների տեղափոխումը կատարվել է P_n քայլերի միջոցով, ապա $n+1$ օղակների համար պետք է կատարել $2P_n+1$ քայլ, այսինքն՝ ստացվում է $P_{n+1}= 2P_n+1$ ռեկուրենտ բանաձևը:

Օրինակ 5. Ոչ լիրվ ինդուկցիան կիրառական մեծ արժեք ունի բուն հետազոտության գործընթացում, երբ հարկավոր է լինում հայտնաբերել և գտնել որևէ օրինաչափություն, այսինքն առաջադրել որևէ վարկած: Երկրաչափության, հանրահաշվի դասընթացի շրջանակներում կարելի է կազմակերպել հետազոտական աշխատանք,որի ընթացքում աշակերտները չգիտակցելով որ կիրառում են ոչ լրիվ ինդուկցիան՝ կստանան կարևոր թեորեմներ, բանաձևեր,հատկություններ և այդ եղանակով ստացված արդյունքները ավելի լավ կմտապահվեն նրանց կողմից:

Օրինակ 1) Կազմակերպել հետազոտական աշխատանք, որի ընթացքում աշակերտները կձևակերպեն եռանկյան անհավասարության թեորեմը, այն է՝ եռանկյան յուրաքանչյուր կողմը փոքր է մյուս երկու կողմերի գումարից: Այդ նպատակով դասարանը կարելի է բաժանել մի քանի խմբերի: Խմբերից յուրաքանչյուրին բաժանել թղթից պատրաստված տարբեր չափերի եռանկյուններ (սուրանկյուն, ուղղանկյուն, բութանկյուն): Այնուհետև խմբերից յուրաքանչյուրին հանձնարարել չափել տրված եռանկյունների կողմերի երկարությունները և ցանկացած երկու կողմերի երկարությունների գումարը համեմատել երրորդ կողմի երկարության հետ:Այնուհետև ուսուցիչը կարող է հանձնարարել խմբերին իրենց ստացած արդյունքները գրանցել գրատախտակին գծված հետևյալ աղյուսակում.

Ուղղանկյուն եռ. 1	Ուղղանկյուն եռ. 2	Ուղղանկյուն եռ. 3	Եզրակացություն
5+4>3, 4+5>3, 3+4>5	…	…	
Սուրանկյուն եռ. 1	Սուրանկյուն եռ. 2	Սուրանկյուն եռ. 3	
	…	…	
Բութանկյուն եռ. 1	Բութանկյուն եռ. 2	Բութանկյուն եռ.3	
…	…	…	

Այս ձևով աշակերտները իրենք հանգեցին թեորեմի ձևակերպմանը, որը նրանք հայտնաբերեցին թերի ինդուկցիայի կիրառության շնորհիվ: Այս ամենից հետո, ուսուցիչը կարող է տալ թեորեմի ապացույցը:

Օրինակ 2). Կազմակերպել հետազոտական աշխատանք, որի արդյունքում աշակերտները կորոշեն π հաստատունի մոտավոր արժեքը: Դասարանը կարելի է բաժանել մի քանի խմբերի, յուրաքանչյուր խմբին տալ թղթից նախապես կտրտած տարբեր շառավիղներով շրջանագծեր: Ապա հանձնարարել իրենց մոտ ունեցած թելի և քանոնի միջոցով հաշվել իրենց տրված շրջանագծերի տրամագծերն ու երկարությունները: Այնուհետև առաջարկել նրանց ստացված տվյալները , լրացնել հետևյալ աղյուսակում.

Խումբ 1	Խումբ 2	Խումբ 3

d = … սմ	d =… սմ	d =… սմ
C =…սմ	C =…սմ	C =…սմ
C/d =… սմ	C/d =… սմ	C/d =… սմ

Աշակերտները աղյուսակը լրացնելուց հետո, կնկատեն, որ C/d – ի համար գրեթե նույն արդյունքն են ստանում և կեզրակացնեն, որ շրջանագծի երկարության հարաբերությունը տրամագծին հաստատուն թիվ է, այս արդյունքը նրանք հենց կստանան թերի ինդուկցիայի կիրառությամբ:

ԵԶՐԱԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆ

1. Մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում լայն կիրառություններ ունեն դեդուկտիվ և ինդուկտիվ մտահանգումները, որոնք ուսումնասիրության ընթացքում դրսևորվում են ինչպես անբացահայտ, այնպես էլ բացահայտ եղանակներով: ընդ որում` կրտսեր և միջին դասարաններում ավելի հաճախ գործածվում են ոչ լրիվ և լրիվ ինդուկցիաները, իսկ բարձր դասարաններում ` նաև մաթեմատիկական ինդուկցիան և դեդուկցիան:

2. Մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում դեռևս լիարժեք և նպատակային չեն գործածվում ոչ լրիվ ինդուկցիայի ու դրան հարակից հնարների ընձեռած հնարավորությունները: Մինչդեռ, հանրակրթության հիմնական նպատակների իրականացման առումով մեծ կարևորություն ունի սովորողների կողմից ինքնուրույն հետազոտություններ և դիտարկումներ կատարելու, օրինաչափություններ որոնելու, վարկածներ ձևակերպելու կարողությունների զարգացումը, ինչին էապես նպաստում է ոչ լրիվ ինդուկցիայի կիրառությունը:

3. Մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում ոչ լրիվ, լրիվ և մաթեմատիկական ինդուկցիաներից յուրաքանչյուրն ունի առանձնահատուկ դերակատարություն, դրանք միմյանցով չեն կարող փոխարինվել, և մեկը մյուսին լրացնում է: Ընդ որում` ոչ լրիվ ինդուկցիան լավագույն միջոցն է օրինաչափություններ որոնելու և վարկածներ ձևակերպելու համար, դեդուկցիան և մաթեմատիկական ինդուկցիան` արդեն բացահայտված օրինաչափության վերաբերյալ ձևակերպված վարկածը ապացուցելու համար, իսկ լրիվ ինդուկցիան ` ինչպես օրինաչափություններ գտնելու, այնպես էլ այն ապացուցելու համար:

ՕԳՏԱԳՈՐԾՎԱԾ ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Հանրակրթության պետական չափորոշիչ, հաստատված ՀՀ կառավարության կողմից 2011թ.
2. Բրուտյան Գ. Ա., Ձևական տրամաբանության դասընթաց, Երևան: Երևանի համալսարանի հրատարակչություն, 1987
3. ՄիքայելյանՀ. Ս. Բարձրագույն հանրահաշվի դասընթաց ,Երևան: Էդիթպրինտ, 2004
4. ԳևորգյանՀ. Ա., Բաղդասարյան Վ. Ի. Տրամաբանություն. ուսումնական ձեռնարկ, Երևան, Էդիթպրինտ, 2015
5. ՄիքայելյանՕնիկ, Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը և միացություններ: Երևան : Էդիթպրինտ, 2008
6. Ս. Հակոբյան, Ինդուկցիան մաթեմատիկայում և մաթեմատիկական ինդուկցիա, «Մաթեմատիկան դպրոցում». Գիտամեթոդական ամսագիր, №3-4, 2003
7. Գևորգյան Գ. Գ., Սահակյան Ա. Ս. Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր, դասագիրք 11-րդ դասարան, Երևա, Տիգրան Մեծ , 2010 թ.
8. Соминский И.С. Метод математической индукции, Москва, 1965
9. Ю. М. Колягин, В. А. Оганесяан, …, Методика преподабания математики, В средней школе, Процвещение,1975
10. Курант Р., Роббинс Г. , Что такое математика?, МЦНМО, 2000,
11. А. Шень, Математическая индукция, Москва, МЦНМО,2007
12. Арифметика/Энциклопедия элементарной математики,Москва, Государственное издотельство технико-теоритический литературы, 1951
13. Михаленко Ю. П.. Античные учения об индукции и их современные интерпретации, Москва, 1990
14. А. Г. Мардкович, И. М. Смирнова и др.: Математика. 11 класс: учебник: Мнемозина, 2008 г.