ՏԱԹԵՎ ԳԻՏԱԿՐԹԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼԻՐ

ՎԵՐԱՊԱՏՐԱՍՏՎՈՂ ՈՒՍՈՒՑՉԻ ՀԵՏԱԶՈՏԱԿԱՆ ԱՇԽԱՏԱՆՔ

Հետազոտության թեմա՝ Մեծությունների մաքսիմում և մինիմում արժեքների որոշումը քառակուսային եռանդամի միջոցով

Հետազոտող ուսուցիչներ՝ Գոհար Մինասյան

Անժելա Ղուկասյան

«Երևանի Հովհաննես Պողոսյանի անվան հ. 82 հիմնական դպրոց» ՊՈԱԿ

ԵՐԵՎԱՆ 2022

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Գիտենալը քիչ է, հարկավոր է նաև կիրառել:
Ցանկանալը քիչ է, հարկավոր է նաև գործել:
ԳՅՈԹԵ

Մարդն առօրյա կյանքում օգտագործում է մաթեմատիկական մտածողություն՝ իր շրջապատում տեղի ունեցող երևույթները ճանաչելու և դրանք մաթեմատիկական բանաձևերի, աղյուսակների միջոցով հասկանալու համար:

Մեծությունների ամենամեծ և ամենափոքր, կամ ինչպես ընդունված է ասել մաքսիմում և մինիմում արժեքների որոշման հարցերը, իրենց բազմազանությամբ և լուծման մաթեմատիկական մեթոդների հորինման հնարամտությամբ, կազմում են մաթեմատիկայի առավել հետաքրքիր թեմաներից մեկը: Այդ հարցերը չափազանց կարևոր են իրենց գործնական, կիրառական նշանակության տեսանկյունից: Նախագծելով որևէ շենք, ճարտարապետը ձգտում է նրա կառուցման համար ծախսել մինիմում ժամանակ, շինանյութեր ու բանվորական ուժ և հասնել մաքսիմալ դիմացկունության, լուսավորվածության և ընդարձակության: Միջնակարգ դպրոցի սովորողների կողմից մաթեմատիկայի դասընթացի խորը և կայուն յուրացման, տեսական գիտելիքները գործնականի հետ կապելու և նրանց տրամաբանական մտածողության զարգացման համար էական նշանակություն ունի մեծությունների մաքսիմում և մինիմում արժեքները գտնելու վերաբերյալ խնդիրների ու վարժությունների լուծումը: Մեծությունների մաքսիմում և մինիմում արժեքները որոշելու վերաբերյալ խնդիրների լուծումը խթանում է հետաքրքրվածությունը, զարգացնում նրանց մաթեմատիկական միտքը և ընդլայնում ստեղծագործական երևակայությունը:

Մեծությունների մաքսիմում և մինիմում արժեքների որոշման վերաբերյալ խնդիրների լուծման ժամանակ գործ ենք ունենում որոշվող մեծության բազմաթիվ արժեքներից՝ գտնելու ամենամեծը կամ ամենափոքրը, որը հնարավորություն է ընձեռում խնդիրների տվյալները տեսնել նրանց արժեքների դինամիկ վիճակում, դրանով իսկ զգալիորեն նպաստելով սովորողների տրամաբանական մտածողության զարգացմանը:

Հայտնի է, որ մեծությունների մաքսիմում և մինիմում արժեքների որոշելը պահանջում է բարձրագույն մաթեմատիկայից «Դիֆերենցիալ հաշիվ» բաժնի իմացություն և լուծման եղանակների մեծ մասը սերտորեն կապված է ավագ դպրոցի մաթեմատիկայի դասընթացի հետ:

Սակայն այս թեման կարելի է ներկայացնել նաև հիմնական դպրոցում՝ շարադրելով մեծությունների մաքսիմում և մինիմում արժեքների որոշման ավելի պարզ եղանակ, որը չի պահանջում դիֆերենցիալ հաշվի՝ ածանցյալի իմացություն:

Ցավոք, նման խնդիրները դուրս են եկել 8-րդ և 9-րդ դասարանների դասագրքերից, իսկ ավագ դասարաններում նմանատիպ խնդիրները լուծվում են միայն ածանցյալի օգնությամբ:

Իհարկե կան խնդիրներ, որոնք առանց ածանցյալի կիրառության հնարավոր չէ լուծել և այդ խնդիրների նկատմամբ հետաքրքրություն պետք է ձևավորել արդեն իսկ 8-րդ և 9-րդ դասարաններում:

Մեր նպատակն է, սովորողների մեջ ձևավորել քառակուսային եռանդամի կիրառությամբ գործնական խնդիրների լուծման հմտություններ և կարողություններ: Այդ նկատառումով էլ ներկայացնում ենք մի քանի գործնական, կիրառական բնույթի խնդիրների լուծումներ:

ԳԼՈՒԽ 1. ԹԵՈՐԵՄ ՔԱՌԱԿՈՒՍԱՅԻՆ ԵՌԱՆԴԱՄԻ ԷՔՍՏՐԵՄՈՒՄ ԱՐԺԵՔԻ ՄԱՍԻՆ

Բազմաթիվ խնդիրների լուծման ժամանակ նրանց մեջ պարունակվող հայտնի և անհայտ տվյալների առնչությունը արտահայտվում է՝

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

քառակուսային եռանդամի կամ նրա մասնավոր տեսքի ձևով: Քառակուսային եռանդամի մի քանի հատկությունների ուսումնասիրությունը թույլ է տալիս տարրական մաթեմատիկայի օգնությամբ լուծելու մեծությունների մաքսիմում և մինիմում արժեքները գտնելու վերաբերյալ բազմաթիվ խնդիրներ: Որոշ քառակուսային եռանդամներ ունեն ամենափոքր, բայց չունեն ամենամեծ, իսկ մյուսները ունեն ամենամեծ, բայց չունեն ամենափոքր արժեքներ: Ընդ որում ամենամեծ և ամենափոքր արժեք ունենալը կախված է եռանդամի ավագ անդամի գործակցի նշանից: Եթե ավագ անդամի գործակիցը ունի դրական նշան, ապա եռանդամն ունի մինիմում արժեք: Իսկ եթե ավագ անդամի գործակիցը ունի բացասական նշան, ապա եռանդամն ունի մեծագույն արժեք և չունի փոքրագույն արժեք: Դիտարկված քառակուսային եռանդամը գրենք հետևյալ տեսքով (առանձնացնենք եռանդամի քառակուսի)՝

$$Ax^2 + Bx + C = A\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 - \left(\frac{B^2 - 4AC}{4A}\right)$$

***<u>Թեորեմ.</u>* $\boldsymbol{y = Ax^2 + Bx + C}$ քառակուսի եռանդամը $\boldsymbol{x}$ անկախ փոփոխականի $\boldsymbol{-\frac{B}{2A}}$ արժեքի դեպքում ունի էքստրեմում (մաքսիմում կամ մինիմում) արժեք, որը հավասար է $\boldsymbol{\frac{B^2-4AC}{4A}}$:** [1]

1. Եթե $A > 0$, ապա $y_{min} = \frac{B^2-4AC}{4A}$
2. Եթե $A < 0$, ապա $y_{max} = \frac{B^2-4AC}{4A}$

---

[1] Մխիթարյան Հր. «Խնդիրներ մեծությունների մաքսիմում և մինիմում արժեքները որոշելու վերաբերյալ», Երևան, 1957թ., էջ՝ 12:

Եթե $A > 0$, ապա $A\left(x+\frac{B}{2A}\right)^2$ գումարելին երբեք չի կարող բացասական լինել, բայց կարող է դառնալ զրո, երբ $x = -\frac{B}{2A}$ ։ x -ի այդ արժեքի դեպքում $A\left(x+\frac{B}{2A}\right)^2$ գումարելին, հետևաբար և ամբողջ եռանդամը կունենա ամենափոքր արժեք՝

$$y_{min} = \frac{B^2 - 4AC}{4A}$$

Ակնհայտ է, որ այս դեպքում եռանդամը չի կարող ունենալ ամենամեծ արժեք։

Եթե $A < 0$, ապա $A\left(x+\frac{B}{2A}\right)^2$ գումարելին միշտ կլինի բացասական և միայն $x = -\frac{B}{2A}$ արժեքի դեպքում կհավասարվի 0-ի, այսինքն՝ կստանա իր մաքսիմում արժեքը, որի հետևանքով և ամբողջ եռանդամը կունենա մաքսիմում արժեք՝

$$y_{max} = \frac{B^2 - 4AC}{4A}$$

Ակնհայտ է, որ այս դեպքում եռանդամը չի ունենա մինիմում արժեք։

ԳԼՈՒԽ 2. ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄ ՔԱՌԱԿՈՒՍԱՅԻՆ ԵՌԱՆԴԱՄԻ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅԱՄԲ

Այժմ ներկայացնենք թեորեմի մի քանի կիրառություններ:

Խնդիր 1. k դրական թիվը բաժանել երկու գումարելիների այնպես, որ նրանց արտադրյալը լինի ամենամեծը:

Լուծում. Անհայտ գումարելիներից մեկը նշանակենք x, մյուսը կլինի $k-x$, իսկ նրանց արտադրյալը՝ $x(k-x)$: Արտադրյալը նշանակենք y տառով, կունենանք՝

$$y = x(k-x)$$
$$y = -x^2 + kx$$

Խնդիրը հանգեց ազատ անդամ չունեցող քառակուսի եռանդամի ամենամեծ արժեքը որոշելուն: Համաձայն վերը նշված թեորեմի՝ քառակուսային արտահայտությունը կունենա մաքսիմում արժեք, որովհետև նրա ավագ անդամի գործակիցը բացասական է:

Թեորեմ $$\boxed{x = -\frac{B}{2A}} \quad = -\frac{k}{2(-1)} = \frac{k}{2}$$

Մյուս գումարելին կլինի $k-x$՝

$$k - x = k - \frac{k}{2} = \frac{k}{2}$$

Այսպիսով, որպեսզի արտադրյալը լինի ամենամեծը պետք է k թիվը բաժանել երկու հավասար մասերի:

Եզրակացություն. ***Հաստատուն գումար ունեցող երկու դրական արտադրիչների արտադրյալը ունի ամենամեծ արժեք այդ արտադրիչների հավասարության դեպքում:***

Խնդիր 2. Միևնույն P պարագիծն ունեցող բոլոր ուղղանկյուններից գտնել ամենամեծ մակերեսն ունեցող ուղղանկյունը:

Լուծում. P պարագծով ամենամեծ մակերեսն ունեցող ուղղանկյան մի չափումը նշանակելով x, մյուսը կլինի $\frac{P}{2} - x$, իսկ մակերեսը՝ $S = x(\frac{P}{2} - x)$:

$$S = -x^2 + \frac{P}{2}x$$

Կիրառելով վերը նշված թեորեմը՝ կունենանք

Թեորեմ $\boxed{x=-\frac{B}{2A}}$ $=\frac{P}{4}$

$$\frac{P}{2}-x=\frac{P}{4}$$

Այսպիսով ուղղանկյան չափումները կլինեն $\frac{P}{4}$ և $\frac{P}{4}$ ։

Եզրակացություն. **Միևնույն պարագծով բոլոր ուղղանկյուններից ամենամեծ մակերես ունի քառակուսին։**

Այս խնդիրը կարելի է լուծել նաև 1-ին խնդրի լուծումից ստացած եզրակացության հիման վրա։

Իրոք, ստացված $S=x\left(\frac{P}{2}-x\right)$ արտադրյալ x և $\left(\frac{P}{2}-x\right)$ արտադրիչների գումարը հաստատուն է՝ $x+\frac{P}{2}-x=\frac{P}{2}$ ուստի այդ արտադրյալը կստանա մաքսիմում արժեք, երբ $x=\frac{P}{2}-x \Rightarrow x=\frac{P}{4}$ ։

Խնդիր 3. Ինչպիսի՞ն պետք է լինեն 1000մ պարագիծ ունեցող ուղղանկյունաձև հողամասի լայնությունը և երկարությունը, որպեսզի նրա մակերեսը լինի ամենամեծը։

Լուծում. Ըստ խնդրի պայմանի P = 1000մ, սրանից հետևում է, որ AB + BC = 500մ։
Նշանակենք AB = xմ, BC = (500 − x)մ

$$S=x(500-x)=-x^2+500x$$

Թեորեմ $\boxed{x=-\frac{B}{2A}}$ $=-\frac{500}{-2}=250$

Այսպիսով ստանում ենք, որ AB = 250մ, BC = (500 − 250)մ = 250մ

Այսպիսով ուղղանկյան չափումները կլինեն 250մ և 250մ։

Եզրակացություն. **Որպեսզի 1000մ պարագիծ ունեցող ուղղանկյունաձև հողամասի մակերեսը լինի ամենամեծը՝ պետք է նրա լայնությունը և երկարությունը լինեն իրար հավասար՝ 250մ:**

Խնդիր 4. a թիվը բաժանել երկու գումարելիների այնպես, որ նրանց քառակուսիների գումարը լինի ամենափոքրը:

Լուծում. Թվերից մեկը նշանակենք x, մյուսը՝ $a-x$, քառակուսիների գումարը կլինի՝

$$y = x^2 + (a-x)^2 = x^2 + a^2 - 2ax + x^2 = 2x^2 - 2ax + a^2$$

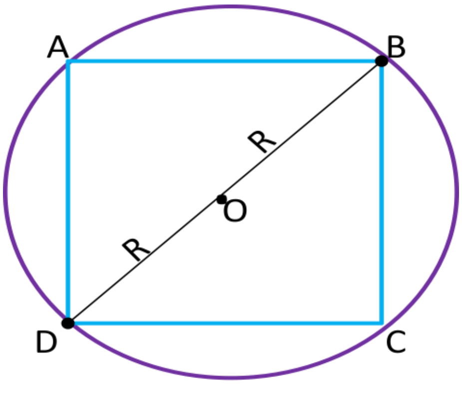
Համաձայն վերը նշված թեորեմի.

Թեորեմ $\boxed{x = -\frac{B}{2A}}$ $= \frac{2a}{2\cdot 2} = \frac{a}{2}$

Մյուս գումարելին կլինի. $a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}$

Եզրակացություն. Հաստատուն գումար ունեցող երկու մեծությունների քառակուսիների գումարը ունի ամենափոքր արժեք, երբ այդ մեծությունները իրար հավասար են:

Խնդիր5. R շառավիղ ունեցող շրջանին ներգծել ամենամեծ մակերեսով ուղղանկյուն:



Լուծում. Նշանակենք AB կողմը x, ըստ Պյութագորասի թեորեմի՝

$$AD^2 = (2R)^2 - x^2 = 4R^2 - x^2$$

$AD = \sqrt{4R^2 - x^2}$

Որոնելի ուղղանկյան մակերեսը կլինի՝

$$S = x\sqrt{4R^2 - x^2} = \sqrt{x^2}(4R^2 - x^2)$$

Նշանակենք $x^2 = t, t \geq 0$ կունենանք՝

$$S = \sqrt{t(4R^2 - t} = \sqrt{-t^2 + 4R^2 t}$$

S-ը մաքսիմում արժեք կունենա, եթե՝

Թեորեմ $\boxed{t = -\frac{B}{2A}}$ $= \frac{4R^2}{2} = 2R^2$

$$t = 2R^2 => x^2 = 2R^2 => x = R\sqrt{2}$$

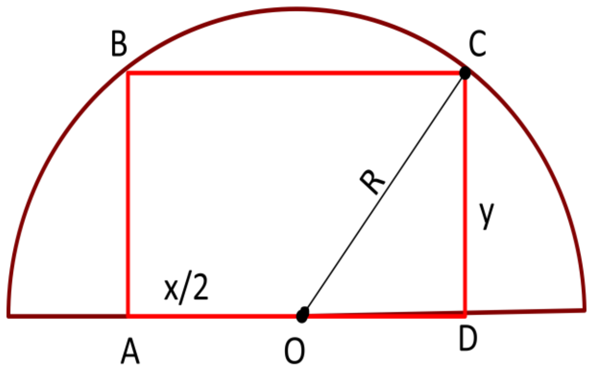
Ուղղանկյան մյուս կողմը կլինի՝

$$AD = \sqrt{4R^2} - x^2 = \sqrt{4R^2 - 2R^2} = \sqrt{2R^2} = R\sqrt{2}$$

Որոնելի ուղղանկյունը քառակուսի է, որի մակերեսը կլինի՝ $S = 2R^2$

Եզրակացություն. **Միևնույն շրջանին ներգծած ուղղանկյուններից ամենամեծ մակերեսն ունի քառակուսին:**

Խնդիր 6. Տրված կիսաշրջանագծին ներգծել ուղղանկյուն, որն ունենա ամենամեծ մակերեսը:



Լուծում. Նշանակենք $AD = x, CD = y$

Ուղղանկյան մակերեսը կլինի՝ $S = xy$

Դիտարկենք ΔOCD:

Ըստ Պյութագորասի թեորեմի՝ $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 = R^2$

$$y^2 = R^2 - \frac{x^2}{4} => y = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}}$$

Տեղադրենք ստացված մակերեսի բանաձևի մեջ.

$$S = x\sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{R^2x^2 - \frac{x^4}{4}}$$

Նշանակենք $x^2 = t \; => S = \sqrt{R^2 t - \frac{t^2}{4}}$:

Ստացված արտահայտությունը, հետևաբար S-ը կունենա մաքսիմում արժեք, եթե՝

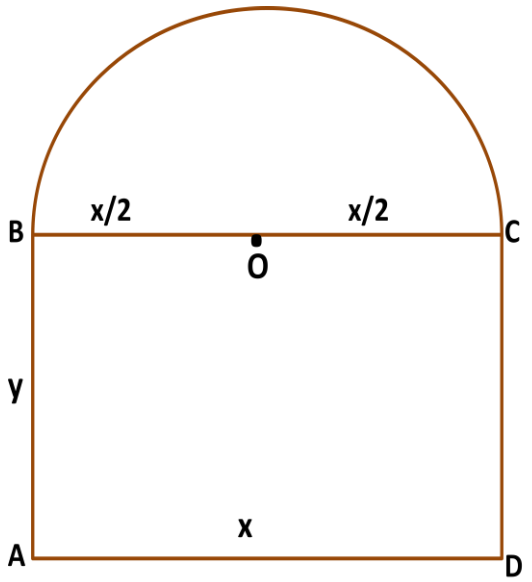
$$\boxed{t = -\frac{B}{2A}} = \frac{R^2}{2 \cdot \frac{1}{4}} = 2R^2 => x = \sqrt{2}R$$

<u>**Թեորեմ**</u>

Ուղղանկյան մյուս կողմը կլինի $y = \frac{R\sqrt{2}}{2}$

Որոնելի եռանկյան մակերեսը կլինի՝ $S = xy = R^2$

<u>***Խնդիր 7.***</u> Նորմանդական պատուհանն ունի կիսաշրջանով վերջացող ուղղանկյան ձև: Ինչպիսին պիտի լինեն նրա չափսերը, որպեսզի նրանով ներթափանցի մաքսիմում քանակի լույս, եթե պարագիծը հավասար է P-ի:



<u>***Լուծում.***</u> Պատուհանի ուղղանկյունաձև մասի լայնությունը նշանակենք x , իսկ բարձրությունը y, այդ դեպքում պատուհանի մակերեսը կլինի՝

$$S = xy + \frac{1}{8}\pi x^2$$

Հաշվենք պարագիծը՝ $P = x + 2y + \frac{1}{2}\pi x \; => \; y = (P - x - \frac{\pi x}{2}) \cdot \frac{1}{2}$

Ստացված արժեքը տեղադրենք մակերեսի արտահայտության մեջ, կունենանք՝

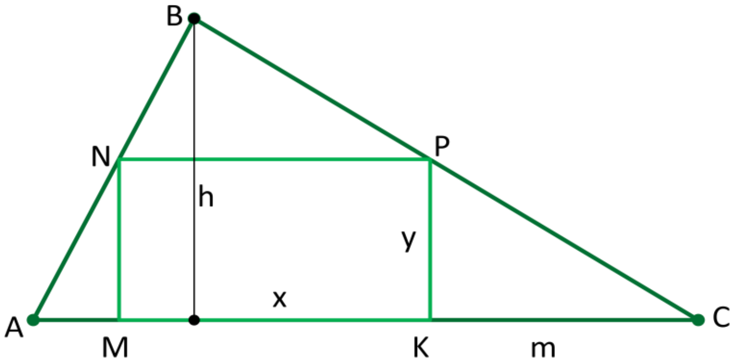
$$S = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\pi}{4}\right)x^2 + \frac{P}{2}x$$

Ստացված քառակուսային եռանդամը կունենա մաքսիմում արժեք, երբ՝

<u>Թեորեմ</u> $\boxed{x = -\frac{B}{2A}}$ $x = \frac{2P}{4+\pi} \Rightarrow y = \frac{P}{4+\pi}$

<u>Եզրակացություն.</u> **որպեսզի նորմանդական պատուհանով ներթափանցի մաքսիմում քանակի լույս, անհրաժեշտ է, որ նրա ուղղանկյունաձև մասի լայնությունը երկու անգամ մեծ լինի բարձրությունից:**

<u>Խնդիր 8.</u> m հիմք և h բարձրություն ունեցող ABC եռանկյան մեջ AC հիմքին տանել զուգահեռ այնպես, որ առաջացած MNPK ուղղանկյան մակերեսը լինի ամենամեծը:



<u>Լուծում.</u> Նշանակենք ուղղանկյան չափումները x և y, մակերեսը կլինի՝ $S = xy$:

Դիտարկենք ABC և NBP եռանկյունների նմանությունը՝

$\frac{h}{BD} = \frac{m}{x}$ կամ $\frac{h}{h-y} = \frac{m}{x} \Rightarrow y = \frac{h(m-x)}{m}$

Տեղադրելով $S = xy$ հավասարման մեջ կստանանք՝

$S = \frac{hx(m-x)}{m}$ կամ $S = -\frac{h}{m}x^2 + hx$

<u>Թեորեմ</u> $\boxed{x = -\frac{B}{2A}}$ $\Rightarrow x = \frac{h}{2h/m} = \frac{m}{2}$

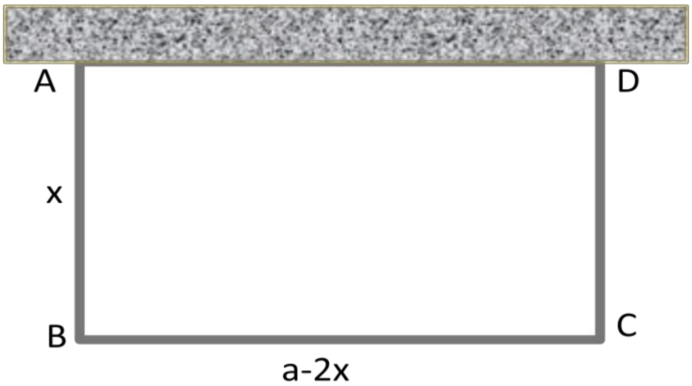
Ստացանք՝ $x = \frac{m}{2} \Rightarrow y = \frac{h}{2}$

$$S_{max} = xy = \frac{m}{2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{mh}{4}$$

$$S_{max} = \frac{1}{4}mh$$

<u>Եզրակացություն.</u> **եռանկյանը ներգծյալ ուղղանկյան մակերեսը կունենա ամենամեծ արժեքը, երբ եռանկյան հիմքին տարված զուգահեռ ուղիղը անցնի h բարձրության միջնակետով:**

<u>Խնդիր 9.</u> Գործարանի պատին կից հրապարակը a մետր երկարություն ունեցող լարով ցանկապատել ուղղանկյունաձև այնպես, որ ցանկապատած հրապարակն ունենա ամենամեծ մակերես։



<u>Լուծում.</u> Նշանակենք $AB = x$, $BC = a - 2x$

Մակերեսը կլինի՝ $S = x(a - 2x)$

$$S = -2x^2 + ax$$

<u>Թեորեմ</u> $\boxed{x = -\frac{B}{2A}}$ $\quad x = \frac{a}{2 \cdot (+2)} = \frac{a}{4}$

Ցանկապատի մյուս կողմը կլինի՝ $a - 2x$:

$$a - 2x = a - 2\frac{a}{4} = a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}$$

<u>Եզրակացություն</u> **՝ցանկապատի երկարությունը պետք է կրկնակի երկար լինի լայնությունից:**

ԳԼՈՒԽ 3. ԱՌԱՋԱԴՐԱՆՔՆԵՐ

1. Գտնել քառակուսային եռանդամի մաքսիմում և մինիմում արժեքները.

ա) $y = 5x^2 + 8x + 6$

բ) $y = x^2 + 5x + 6$

գ) $y = 2x^2 + 8x - 19$

դ) $y = \frac{2}{3}x^2 - 7x + \frac{7}{4}$

ե) $y = x(8 - x)$

զ) $y = x(a - 2x)$

է) $y = mx^2 + x^4$

2. 45 թիվը բաժանել երկու գումարելիների այնպես, որ նրանց քառակուսիների գումարը լինի ամենափոքրը:

3. Նորմանդական պատուհանն ունի կիսաշրջանով վերջացող ուղղանկյան ձև: Ինչպիսին պիտի լինեն նրա չափսերը, որպեսզի նրանով ներթափանցի մաքսիմում քանակի լույս, եթե պարագիծը հավասար է 10մ-ի:

4. a կողմ ունեցող քառակուսուն ներգծել ամենափոքր մակերես ունեցող քառակուսի:

5. Հարթ պատկերը բաղկացած է ուղղանկյունուց և նրա վերին հիմքի վրա կառուցված հավասարակողմ եռանկյունուց: Որոշել պատկերի չափսերն այնպես, որ նա ունենա ամենամեծ մակերեսը, եթե նրա պարագիծը հավասար է 2P:

ԵԶՐԱԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆ

8-րդ դասարանի «Հանրահաշիվ» առարկայի գործող դասագրքում վերը նշված թեորեմը ներկայացված է որպես $ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}\right)$ հավասարության հետևություն, դիտողության տեսքով: Այնուհետ այս փաստը դասագրքում այլևս չի զարգանում և չի գտնում իր կարևորությունը կիրառության տեսանկյունից: Չկան գործնական կիրառության խնդիրներ, բացառությամբ մի քանի վարժությունների: Մինչդեռ թեման շատ ավելի է հետաքրքրանում գործնական կիրառական բնույթի խնդիրներ լուծելիս, երբ սովորողը կիրառելով իր գիտելիքներն ու հմտությունները, ստանում է արդյունք:

Հիմնական դպրոցում վերը ներկայացված խնդիրներին անդրադառնալը կմեծացնի հետաքրքրությունը թեմայի նկատմամբ և նախադրյալներ կստեղծի հետագայում դրա խորը ուսումնասիրման համար:

Լուծելով մեծագույն և փոքրագույն արժեքների վերաբերյալ գործնական բնույթի խնդիրներ, սովորողներն էլ ավելի խորությամբ են ուսումնասիրում քառակուսային եռանդամը, հեշտությամբ են կառուցում պարաբոլը և արագ գտնում պարաբոլի գագաթը՝ ընկալելով այն ոչ թե զուտ հարթության կետ, այլ ինչ-որ մեծության ամենամեծ կամ ամենափոքր արժեք:

ՕԳՏԱԳՈՐԾՎԱԾ ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՑԱՆԿ

1. Մխիթարյան Հր. «Խնդիրներ մեծությունների մաքսիմում և մինիմում արժեքները որոշելու վերաբերյալ», Երևան, ՀԱՅՊԵՏՈՒՍՄԱՆԿՀՐԱՏ, 1957թ.

2. Ларичев П. А., «Сборник задач по алгебре», часть вторая, Госучпедгиз Министерства Просвещения РСФСР, 1951г.

3. Новоселов С. И., «Специальный курс элементарной алгебры», Госучпедгиз Министерства Просвещения РСФСР, 1951г.