ՀՀ ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ, ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ, ՄՇԱԿՈՒՅԹԻ ԵՎ ՍՊՈՐՏԻ ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅՈՒՆ

ՀՀ ԿԳՄՍՆ «Երևանի Լեոյի անվան հ. 65 ավագ դպրոց» ՊՈԱԿ

ՀԵՏԱԶՈՏԱԿԱՆ ԱՇԽԱՏԱՆՔ

ԹԵՄԱ՝ Հետազոտական աշխատանքների դերը սովորողների ինքնուրույնությունը և ստեղծագործական ունակությունները զարգացնելու գործում

ԿԱՏԱՐՈՂ՝ Օհանյան Սուսաննա

ՂԵԿԱՎԱՐ՝ Սիմոնյան Գայանե

ԵՐԵՎԱՆ 2022

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Ժամանակակից տեխնիկայում, գիտությունում և այլ շատ բնագավառներում հարկ է լինում ինքնուրույնության, ստեղծագործական, նախաձեռնողական մոտեցում:

Դպրոցում հետազոտական աշխատանքներ կատարելիս աշակերտների մոտ

ձևավորվում է վերոնշյալ հատկուրյունները: Հատկապես մաթեմատիկա առարկայի դասաժամերին մեծ է հետազոտական աշխատանքներ կատարելու հնա-րավորությունը: Ավագ դպրոցի խորացված դասարաններում որոշ բանաձևեր

աշակերտները ինքնուրույն, հետազոտական աշխատանք կատարելով կարող են ստանալ: 12-րդ դասարանում երկրաչափություն առարկայից ծավալներ թեման ուսումնասիրելուն զուգահեռ հանրահաշվի դասաժամերին համընկնում է ինտեգրալ թեման: Աշակերտներին հանձնարարվում է նյութեր հավաքել ինտեգրալ հաշվի նախապատմությունից, որը հետաքրքրություն է առաջացնում տվյալ թեմայի շուրջ: Հանրահաշվի պտտման մարմինների ծավալները յուրացնելուց հետո, հաջորդ դասաժամին աշակերտները բաժանվում են խմբերի և սկսում են ինտեգրալի միջոցով դուրս բերել կոնի, գլանի և գնդի ծավալները:

Ինտեգրալ հաշիվը ամենաարդիական և կարևորագույն թեմաներից է: Դպրոցում հետաքրքրություն առաջացնելով, ապագայում կունենանք խելացի սերունդ:

ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՇՎԻ ՆԱԽԱՊԱՏՄՈՒԹՅՈՒՆԸ

XVII դարը միջնադարից նոր ժամանակին անցնելու շրջան էր, սկիզբը կապիտալիզմի ծաղկման: Ճշգրիտ գիտությունները հզոր իմպուլսներ էին ստանում
արագ զարգացման համար:Աստղագիտությունը, օպտիկան, մեխանիկան, ինչպես և
տեխնիկան ինքն անմիջականորեն, իրենց հերթին պահանջում էին այն ժամանակվա, մաթեմատիկայի վճռական նորացում:

Նախ սկսեցին երևան գալ ընդհանուր մեթոդներ միատիպ խնդիրների լուծման համար, և փայլուն կերպով ավարտվեց Նյուտոնի և Լայբնիցի ձեռքերում, դիֆերենցյալ և ինտեգրալ հաշվի հայտնագործումով: Ինտեգրալ հաշվի նախապատմությունը սկիզբ է առնում հնադարյան շրջանից: Ինչ վերաբերվում է մակերեսների ու ծավալների հաշվելուն, ապա այստեղ XVII դարի մաթեմատիկոսների իսկական ուսուցիչն Արքիմեդն է եղել / III դար մթա/:
Մեզ հասած Արքիմեդի աշխատության մեջ հաղորդվում է, որ նար իր արդյունքները ստացել է մի յուրատեսակ մեթոդի օգնությամբ, որի մեջ ձևականորեն օգտագործել է լծակի հավասարակշռության տեսությունը, սակայն ըստ էության եղել է հարթ պատկերները գծերից կազմելու, իսկ մարմինները՝ հարթություններից կազմելու մեթոդը: Այդ մեթոդով գտած ճշմարտությունները հրապարակվել են խիստ
ապացուցումներով, ըստ այն ժամանկվա սովորության՝ հակասող ընդունելության
մեթոդով: Սակայն XVII դարի մաթեմատիկոսներին այդ «ուղերձը» հայտնի չի եղել,
երկու հազարամյակի ընթացքում այն կորած է համարվել և նրա տեսքը բոլորովին
պատահականորեն հայտնաբերվել է միայն XVII դարի սկզբին: Արքիմեդն, այնուամենայնիվ, օգտվել է հարթ պատկերներ /կամ մարմինները/ էլեմենտների

վերլուծելուց, ճիշտ է, վերցրած վերջավոր թիվ և վերջավոր հաստությամբ, այդ կապակցությամբ նա դիտարկել է նաև ներգծած ու արտագծած աստիճանաձև պատկերներ /մարմիններ/, որոնք երկրաչափական նախապատկերացումներ են եղել
մեր ինտեգրալային գումարների:
Արքիմեդյան մեթոդը բացահայտելու և նրա կիրառման ասպարեզն
ընդլայնելու առաջին փորձը կատարել է գերմանացի աստղագետ ու մաթեմատիկոս
Իոհան Կեպլեր /1571-1630/: Նա հրապարակեց «Գինու տակառների նոր տարածաչափություն» խորագրով գիրքը: Հարթ պատկերը վերլուծվում է անվերջ թվով անվերջ փոքր էլեմենտների և ապա նույն էլեմենտներից անհրաժեշտության դեպքում` դեֆորմացիայի ենթարկված, կազմվում է նոր պատկեր` արդեն հայտնի մակերեսով /համանման եղանակով նաև մարմնի համար/:

Այս ճանապարհով Կեպլերը նախ ստանում է դեռևս Արքիմեդին հայտնի մի շարք արդյունքների ուղղակի արտածումները և ապա այն բաժանում, որ նա անվանել է «Լրացում Արքիմեդին», հաշվում է 87 նոր պտտման մարմինների ծավալները

Այդպիսով արդեն հող էր պատրաստված նոր հաշվի համար, սակայն հաշիվ որպես այդպիսին, դեռևս չկար Հարկավոր էր ընդհանուր ձևով սահմանել նոր հաշվի
հիմնական հակասությունները և փոխադարձ կապ ստեղծել նրանց միջև Այնուհետև,
հարմար պայմանանշաններ մուծելով, հարկավոր էր ստեղծել հաշվման ալգորիթմ
Հենց այդ էլ արեցին Նյուտոնը և Լայբնիցը, մեկը մյուսից անկախ և տարբեր ձևերով

Իսահակ Նյուտոնի /1642-1727/ հիմնական աշխատությունը «ֆլյուքսիաների և

անվերջ շարքերի մեթոդը» տրակտատն է։ Փոփոխական մեծությունները Նյուտոնը
անվանում էր «ֆլյուենտներ» այսինքն՝ «ընթացող» և նշանակում է լատիներեն այբուբենի վերջին տառերով , u,y,x,z, դրանք դիտարկվում են որպես աճող /կամ նվազող/ ժամանակի ընթացքում։ Նյուտոնի համար արագությունն անմիջականորեն
պարզ գաղափար էր, որը սահմանման կարիք չունի:

Ի տարբերություն Նյուտոնի, Գոտֆրիդ Վիլհելմ Լայբնիցից /1646-1716/ հետո մնացել է հսկայական ձեռագիր մատենագրություն։ Նրա ձեռագրերից մեկում, որի վրա նշված է 1675թ. առաջին անգամ հանդիպում է ∫ նշանը , «հարմար կլինի, ասում է Լայբնիցը, «բոլորի» փոխարեն դնել ∫ նշանը , որը S գումար բառի I տառն է։ Շուտով երևան է գալիս նաև տարբերություն d նշանը։ Միայն աստիճանաբար է Լայբնիցը սկսում գրում dx ∫ նշանի տակ։ Ինտեգրալը /լատ՝ integer – ամբողջական, վերականգնված/ մաթեմատիկայի կարևորգույն հասկացությունը դարձավ:

Հենց Լայբնիցյան նշանակումներն են պահպանվել մինչև մեր ժամանակները:
Նպատակահարմար սիմվոլիկան, անկասկած, հեշտացրել է իսկական ալգորիթմի
ստեղծումը, որի մասին նա երազում էր հենց սկզբից: Այդ ալգորիթմը

ԱՆՈՐՈՇ ԻՆՏԵԳՐԱԼ

Գիտության և տեխնիկայի շատ հարցերում հարկ է լինում վերականգնել ֆունկցիան նրա հայտնի ածանցյալով:

Այդպիսի խնդիրներ լուծելու համար ներշուծում են ածանցման հակադարձ գործողություն, որն անվանում են ինտեգրում։

F ֆունկցիան կոչվում է f ֆունկցիայի նախնական տրված միջակայքում, եթե այդ միջակայքի բոլոր x-երի համար

$$F'(x) = f(x)$$

Եթե $F'(x) = f(x)$ հավասարությունը տեղի ունի f ֆունկցիայի որոշման տիրույթում, որը միջակայքից է /վերջավոր կամ անվերջ/, ապա կասենք, որ F ֆունկցիան f -ի նախնականն է, առանց նշելու միջակայքը։

Եթե F(x) ֆունկցիան f (x) ֆունկցիայի նախնականն է տրված միջակայքում, ապա կամայական C իրական թվի համար F(x)+C ֆունկցիան նույնպես f (x) ֆունկցիայի նախնականն է։

Տրված միջակայքում f (x) ֆունկցիայի նախնականների համախմբությունն անվանում են f (x) ֆունկցիայի անորոշ ինտեգրալ և նշանակում

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C \qquad C \in R$$

Անորոշ ինտեգրալի հատկությունները, որոնք հետևում են ածանցման կանոններից.

ա) $\int Kf(x)\, dx = K\int f(x)dx \quad K -$ն որևէ հաստատուն է

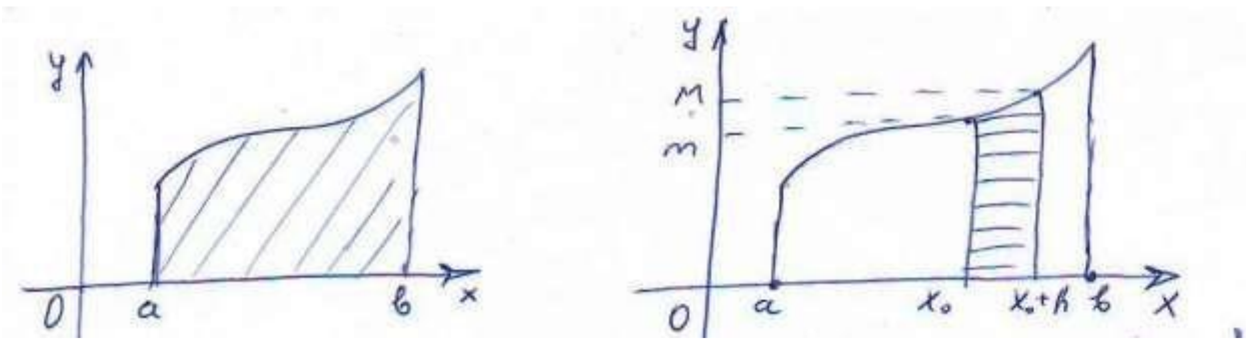
բ) $\int (f_, (x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$

գ)Եթե $\int (f(x)dx = F(x) + C \qquad a, b \in R \qquad a \neq 0$

ապա $\int (f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C \qquad a, b \in R$

ԻՆՏԵԳՐԱԼ, ՆՅՈՒՏՈՆ-ԼԱՅԲՆԻՑԻ ԲԱՆԱՁԵՎԸ

Դիցուք [a,b] միջակայքում տրված է y= f(x) անընդհատ ֆունկցիան, որը միայն դրական արժեքներ է ընդունում։ Գտնենք նրա գրաֆիկով և x-a, x=b, y=0 ուղիղներով անսահմանափակ պատկերի S մակերեսը.



Նման պատկերն անվանում են կորագիծ սեղան։ Ներմուծենք S(x) $x \in$[a;b] ֆունկցիան, որի արժեքը x_0 կետում հավասար է աբցիսների առանցքով $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկով և $x=a,\ x=x_0$ ուղիղներով սահմանափակված պատկերի մակերեսին։

Պարզ է, որ

$S(a)=0 \qquad S(b)=S$

$S(x_0+h)-S(x_0)$ տարբերությունը նշագծված պատկերի մակերեսն է։ Եթե $f(x)$ –ի փոքրագույն և մեծագույն արժեքները $[x_0, x_0+h]$ հատվածում նշանակենք համապատասխանաբար m-ով և M-ով, ապա այդ պատկերի մակերեսը

$$mh \le S(x_0+h)-S(x_0) \le Mh$$

$$m \le \frac{S(x_0+h)-S(x_0)}{h} \le Mh$$

Քանի որ $f(x)$ֆունկցիան անընդհատ է, h-ն անվերջ փոքրացնելիս m-ն և M-ը և $\frac{S(x_0+h)-S(x_0)}{h}$ հարաբերությունը ձգտում են $f(x_0)$ –ին՝

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{S(x_0 + h) - S(x_0)}{h}\right) = f(x_0)$$

Այսինքն$S(x_0)$ ֆունկցիան $f(x)$ –ի նախնականնէ

$$S(x) = f(x) \qquad x \in [a;b]$$

Քանի որ $f(x) -$ ի նախնականներն իրարից տարբերվում են հաստատուններով, ապա

$$F(x) - S(x) = C \qquad x \in [a;b]$$

Որտեղ $C \in R$: Տեղադրելով x=a, x=b և հաշվի առնելով $S(a) = 0$ $S(b) = S$,կստանանք $F(a) = C$ $F(b) - S = C$

որտեղից

$$S = F(b) - F(a)$$

Կորագիծ սեղանի մակերեսը գտնելու համար բավական է գտնել $f(x)$ –ի որտեղ $F(x)$ նախնական և$S = F(b) - F(a)$ բանաձևով հաշվել մակերեսը

Եթե $F(x)$ֆունկցիան $f(x)$անընդհատ ֆունկցիայի նախնականն է, ապա $F(b) - F(a)$ տարբերությունը անվանում են $f(x)$ֆունկցիայի որոշյալ ինտեգրալ [a;b] հատվածով և նշանակում

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad F'(x) = f(x)$$

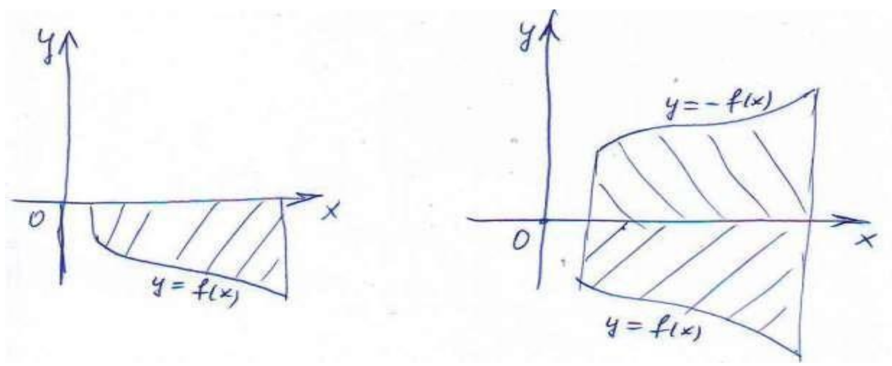
Այս բանաձևը կոչվում է Նյուտոն Լայբնիցի բանաձև Այս ինտեգրալ հաշվի հիմնական բանաձևն է $F(b) - F(a)$տարբերությունը ընդունված է նշանակել $F(x)\int_a^b$ ։Այս նշանակումով բանաձևը ստանում է հետևյալ տեսքը

$$\int_a^b \boldsymbol{f(x)dx = Fx|_b^a}$$

ԻՆՏԵԳՐԱԼԻ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

1. Հաշվենք $y = f(x)$ անընդհատ, բացասական ֆունկցիայի գրաֆիկով, $y = 0$, $x = a$, $x = b$ ուղիղներով սահմանափակված պատկերի S մակերեսը։

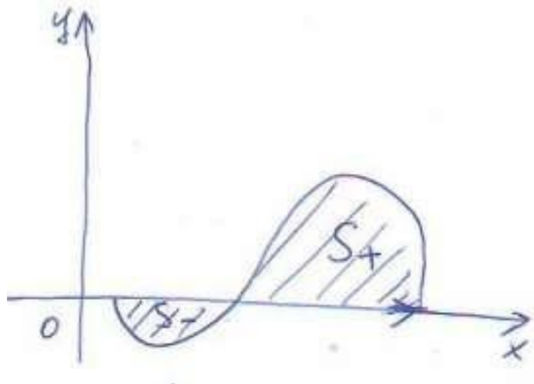
   Նման պատկերը նույնպես կորագիծ սեղան է։ Պարզ է, որ այդ պատկերի մակերեսը հավասար է $y = 0$, $y = -f(x)$, $x = a$, $x = b$ ուղիղներով սահմանափակված պատկերի մակերեսին, քանի որ այդ պատկերներն համաչափ են աբցիսների առանցիք նկատմամբ:



   Հետևաբար

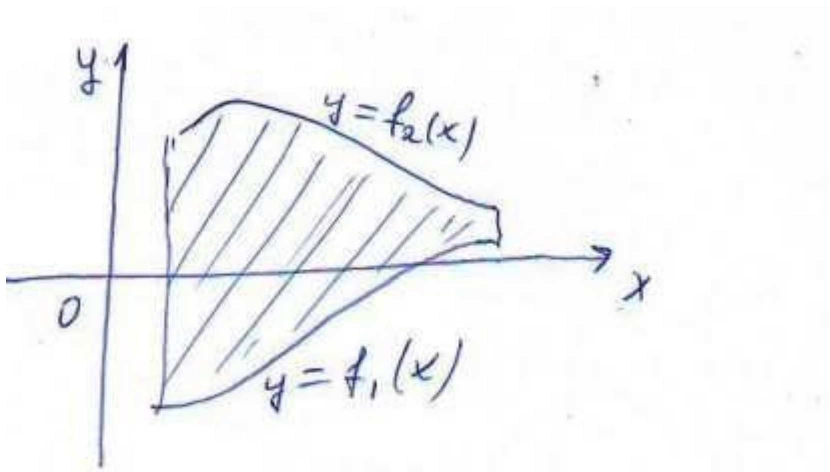
$$S = \int_a^b \bigl(-f(x)\bigr)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

2. Եթե $y = f(x)$ անընդհատ ֆունկցիան [a;b] միջակայքում ընդունում է և դրական, և բացասական արժեքներ, ապա նրա ինտեգրալն այդ միջակայքով կլինի աբսցիզների առանցքից վեր ընկած կորագիծ սեղանի S_+ մակերեսի և աբցիսների առանցքից վար ընկած կորագիծ S_- մակերեսի տարբերությունը



$\int_a^b f(x)dx = S_+ - S_-$

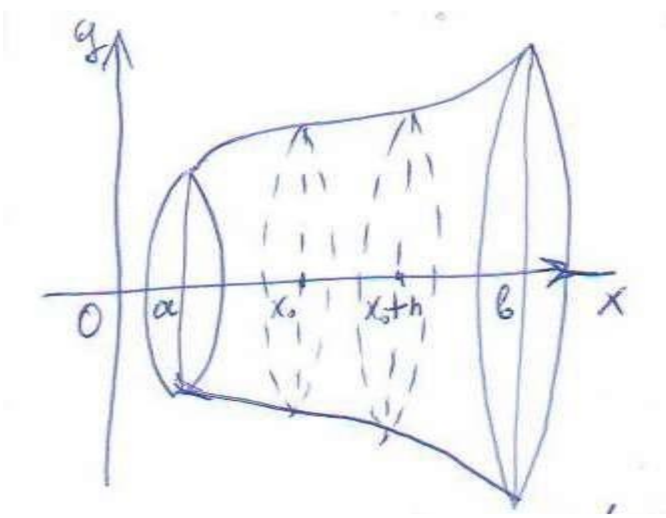
3. Եթե պատկերը սահմանափակված է $y = f_1(x)$և$y = f_2(x)$ անընդհատ ֆունկցիաների գրաֆիկով և x=a, x=b ուղիներով, ընդ որում՝ $f_1(x) \leq f_2(x)$ և$x \in [a;b]$, ապա այդ պատկերների մակերեսն է.



$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$$

ՊՏՏՄԱՆ ՄԱՐՄՆԻ ԾԱՎԱԼԸ

Հաշվենք $y = f(x)$ անընդհատ, դրական ֆունկցիայի գրաֆիկով, x=a, x=b ուղիղներով և աբսցիսների առանցքով սահմանափակված կորագիծ սեղանը աբսցիսների առանցքի շուրջ պտտելուց առաջացած մարմնի V ծավալը։



[a;b]հատվածի ցանկացած x կետով տանենք աբսցիսների առանցքին ուղղահայաց հարթություն։ Այդ հարթությամբ մարմնի հատույթը կլինի շրջան, որի շառավիղը $f(x)$-ն է, և հատույթի մակերեսը կլինի

$$S(x) = \pi f^2(x)$$

Ընդ որում $S(x)$ ֆունկցիան նույնպես կլինի անընդհատ [a;b] միջակայքում։

Դիտարկենք V(x), $x \in [a; b]$ֆունկցիան, որի արժեքը x_0 կետում հավասար է մարմնի՝ $x = a$և$x = x_0$ հարթությունների միջև ընկած մասի ծավալին: Եթե s-ով և S-ով նշանակենք $[x_0, x_0 + h]$ միջակայքում $S(x)$ ֆունկցիայի համապատասխանաբար
փոքրագույն և մեծագույն արժեքները, ապա

$$sh \leq V(x_0 + h) \leq Sh$$

$$s \leq \frac{V(x_0 + h) - V(x_0)}{h} \leq S$$

Հաշվի առնելով S(x) ֆունկցիայի անընդհատությունը կարող ենք ասել, որ h-ը անվերջ փոքրացնելիս, s-ը և S-ը, և հետևաբար նրանց միջև գտնվող

$$\frac{V(x_0 + h) - V(x_0)}{h}$$

Հարաբերությունը ձգտում են $S(x_0)$-ին

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{V(x_0 + h) - V(x_0)}{h}\right) = S(x_0)$$

Այսինքն՝ V(x)-ը S(x) –ի նախնականն է

$$V'(x) = S(x) \qquad x \in [a;b]$$

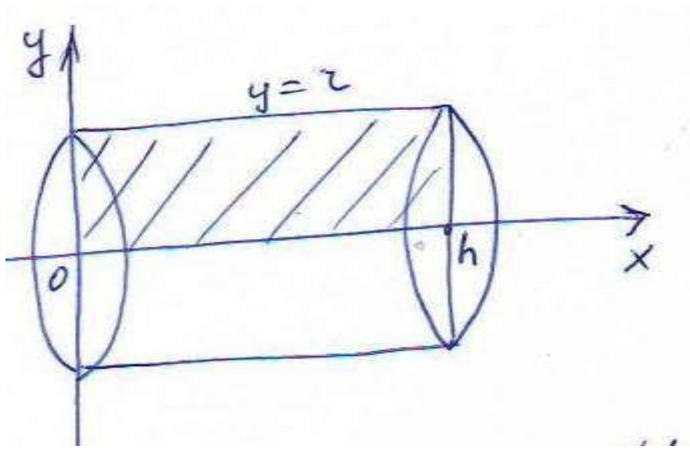
Քանի որ $V(b) = V$ և $V(a) = 0$, ապա Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևից կստանանք

$$V = V(b) - V(a) = \int_a^b S(x)dx$$

Քանի որ $S(x) = \pi f^2(x)$, կստանանք $V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$

ԳԼԱՆԻ, ԿՈՆԻ, ԳՆԴԻ ԾԱՎԱԼՆԵՐԸ

1. Օգտվելով պտտման մարմնի ծավալի բանաձևից գտնենք գլանի ծավալը.

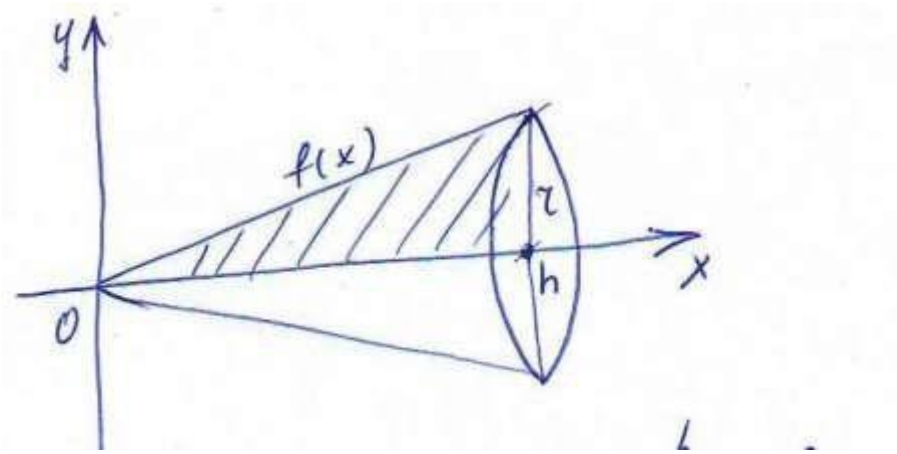


y=r ֆունկցիայի գրաֆիկով, $y = 0, x = 0, x = h$ ուղիղներով սահմանափակված
ուղղանկյունը աբսցիսների առանցքի շուրջ պտտելով կստանանք գլան: Ըստ բանաձևի՝

$$V = \pi \int_0^h r^2 dx = \pi r^2 x|_0^h = \pi r^2 h$$

Vգլան= $\pi r^2 h$

2. Ուղղանկյուն եռանկյունը h և r էջերով, պտտենք աբսցիսների առանցքի շուրջը կստանանք կոն

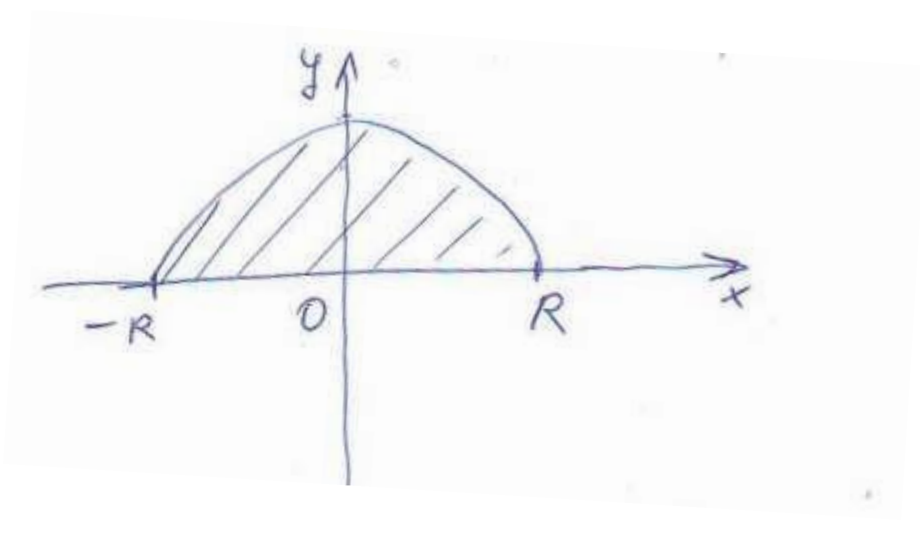


$$f(x) = \frac{r}{h}x$$

$$V = \pi \int_0^h \frac{r^2}{h^2} x^2 dx = \frac{r^2\pi}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$V_{կոն} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

3. $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2} \quad x \in [-R; R]$ ֆունկցիայի գրաֆիկով և y=0 ուղղով սահմանափակված պատկերները՝ կիսաշրջանը, աբսցիսների առանցքի շուրջը պտտելով կստանանք գունդ.



$$V = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)dx = \pi R^2 x\rfloor_{-R}^{R} - \pi \frac{x^3}{3}\bigg|_{-R}^{R} =$$

$$= \pi R^3 + \pi R^3 - \frac{\pi R^3}{3} - \frac{\pi R^3}{3} =$$

$$= 2\pi R^3 - \frac{2\pi R^3}{3} = \frac{6\pi R^3 - 2\pi R^3}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Vգունդ$= \frac{4}{3}\pi R^3$

ԵԶՐԱԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆ

Հետազոտական աշխատանքի դերը շատ մեծ է ուսուցման ընթացքում՝ հատկապես մաթեմատիկայի դասաժամերին: Սովորողների մոտ զարգանում է ինքնուրույնությունը և ստեղծագործական ունակությունները: 12-րդ դասարանում առաջին անգամ աշակերտները հանրահաշվի դասաժամերին ուսումնասիրում են ինտեգրալ հաշիվը: Միայն հետազոտական աշխատանքների շնորհիվ ավելի մատչելի է դառնում ուսումնասիրվող նյութը: Ինտեգրալ հաշվի նախապատմությունը տարբեր աղբյուրներից հավաքելը շատ մեծ հետաքրքրություն է առաջացնում սովորողների մոտ: Ինքնուրույն դուրս բերված բանաձևերը ավելի լավ են տպավորվում և հիշվում, ձևավորվում է աշակերտների նախաձեռնողականությունը:

Ինտեգրալ հաշվին զուգահեռ, երկրաչափություն առարկայից ուսումնասիրում են ծավալներ թեման, որտեղ կոնի, գլանի և գնդի ծավալների ճշգրիտ դուրս բերումներ չի տրվում: Ցանկալի կլինի, որպես հետազոտական աշխատանք , սովորողներին հանձնարարել ինտեգրալի միջոցով ճշգրիտ ստանալ կոնի, գլանի և գնդի ծավալները:

Ժամանակակից գիտությունում համարյա բոլոր ճշգրիտ ապացույցները կատարվում են ինտեգրալ հաշվով: Հետևաբար, հարկավոր է դպրոցում ինտեգրալ թեման հետազոտական աշխատանքների միջոցով դարձնել ավելի մատչելի և հետաքրքիր:

ՕԳՏԱԳՈՐԾՎԱԾ ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Գ. Գ. Գևորգյան, Ա. Ա. Սահակյան, «Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր 12»՝ բնագիտամաթեմատիկական հոսքի համար, «Տիգրան Մեծ» հրատարակչություն, Երևան 2017, https://online.fliphtml5.com/fumf/ehaz/#p=1
2. Հանրակրթության պետական չափորոշիչ, Երևան 2021 https://www.arlis.am/documentview.aspx?docid=149788
3. Մաթեմատիկա: Հանրակրթական դպրոցի առարկայական չափորոշիչ և ծրագիր, Անտարես, Երևան, 2006:
4. Ֆիխտենգոլց Գ. Մ., Մաթեմատիկական անալիզի հիմունքները, «Լույս» հրատարակչություն, Երևան 1970