

ՀՀ ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ, ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ, ՄՇԱԿՈՒՅԹԻ ԵՎ ՍՊՈՐՏԻ  
ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅՈՒՆ



ՀՀ ԿԳՄՄՆ «Երևանի Լեոյի անվան հ. 65 ավագ  
դպրոց» ՊՈԱԿ

## ՀԵՏԱԶՈՏԱԿԱՆ ԱՇԽԱՏԱՆՔ

**Թեմա՝** Պյութագորասի թեորեմի 4 ապացույցներ և նրա  
կիրառությունը հանրահաշվական խնդիրներում

**Կատարող՝** Լիա Զոհրաբյան

**Ղեկավար՝** Գայանե Սիմոնյան

ԵՐԵՎԱՆ 2022

## ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Ներածություն	3
<b>§1. ՊՅՈՒԹԱԳՈՐԱՍԻ ԹԵՈՐԵՄԻ 4 ԱՊԱՑՈՒՅՑՆԵՐԸ</b>	7
Ապացույց N 1	7
Ապացույց N 2	8
Ապացույց N 3	9
Ապացույց N 4	9
<b>§2. ՊՅՈՒԹԱԳՈՐԱՍԻ ԹԵՈՐԵՄԻ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆԸ</b>	
<b>ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԱԿԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ</b>	10
Խնդիր N 1	10
Խնդիր N 2	11
Խնդիր N 3	12
Եզրակացություն	13
Գրականություն	13

## ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Աշխատանքը ուսումնասիրում է հայտնի մաթեմատիկոս, փիլիսոփա Պյութագորասին և իր մշակած թեորեմը: Պյութագորասի թեորեմն ունի բազմազան և բազմատիպի ապացույցներ, որոնցից մի քանիսը ներկայացված են աշխատանքում: Աշխատանքի նպատակն է խորությամբ ուսումնասիրել թեորեմը, ապացուցել այն մի քանի եղանակներով և կիրառել այն խնդիրներում: Ուսումնասիրվել է նաև Պյութագորասի կյանքը, կենսագրությունը, անդրադարձ է կատարվել նրա կողմից հնչած ասույթներին և թեևավոր խոսքերին:



## *Պյութագորաս Սամոսացի*

Հին հույն մաթեմատիկոս և փիլիսոփա, պյութագորասյանների կրոնա-փիլիսոփայական դպրոցի հիմնադիրը:

Պյութագորասը ծնվել է Սամոս կղզում, Փոքր Ասիայի ափի մոտ, մ.թ.ա. 570 թ.:

Պատմաբանների մի մասը պնդում է, որ նրա հայրը եղել է քարհատ: Կան նաև կարծիքներ, որ նա հարուստ առևտրական էր: Պյութագորասի ծնունդը գուշակել է Դելփիքի գուշակը, դրա համար էլ նրա անունը վերծանվում է ինչպես «նա, ում մասին ասել է Պյութիան»: Ապոլլոնի քուրմն ասել է Պյութագորասի հորը՝ Մնեսարխին, որ նրա զավակը մարդկանց կրերի այնքան բարիք և օգուտ, որ մինչ այդ որևէ մեկը չէր բերել:

Պատանի տարիքում Պյութագորասը մեկնում է Եգիպտոս, սովորելու եգիպտական քրմերի գաղտնի գիտելիքները: Սամոսի տիրանը՝ Պոլիկրատը նրան էր տվել մի նամակ ուղղված Եգիպտոսի փարավոն Ամասիսին: Նամակի շնորհիվ Պյութագորասին թույլատրվում է մասնակցել քրմերի գաղտնի ծեսերին:

Կան տեսություններ, որ նա 18 տարեկանում թողել է հարազատ կղզին և այցելել բազմաթիվ այլ վայրեր, հանդիպելով տարբեր իմաստունների, և ի վերջո հասել է Եգիպտոս: Եգիպտոսում ապրել է 22 տարի, մինչև որ հազարավոր այլ գերիների հետ պարսիկները տեղահան են արել նրան ու տարել Բաբելոն:

Բաբելոնում Պյութագորասն ապրել է 12 տարի, որտեղ ևս շփվել է քրմերի ու մոգերի հետ: Սամոս է վերադարձել 56 տարեկանում, ուր արժանացել է հարգանքի ու ճանաչման:

Համաքաղաքացիների հետ ունեցած կոնֆլիկտի պատճառով նա թողնում է հայրենի քաղաքը և ուղևորվում հարավային Իտալիայի հունական գաղութներից մեկը: Կրտստնում նա գտնում է բազմաթիվ հետևորդներ: Նրանց գրավում էր ոչ միայն Պյութագորասի միստիկական փիլիսոփայությունը, այլ

նան նրա համեստ ու խիստ կենցաղը: Պյութագորասը քարոզում էր անկիրթ ժողովրդի բարոյական դաստիարակությունը, որին կարելի էր հասնել միայն, եթե իշխանությունը պատկանում է իմաստունների կաստային:

Պյութագորասի աշակերտները հիմնեցին եղբայրություն կամ միաբանություն, ուր ներգրավված էին միայն Պյութագորասի համախոհները:

Կյանքի վերջում Պյութագորասը տեղափոխվեց մեկ այլ հունական գաղութ, որտեղ էլ մահացավ մ.թ.ա. 490 թ.:

### *Պյութագորաս. Կյանքի գաղտնիքներ...*

- ❖ Առավոտյան արթնանալիս հարցրու ինքդ քեզ՝ ի՞նչ պետք է անեմ, իսկ գիշերը քնելիս՝ ի՞նչ արեցի:
- ❖ Խնայեք ձեր երեխաների արցունքները, դրանք պետք կգան ձեր գերեզմանին:
- ❖ Առանց մեծ բաներ խոստանալու, մեծ գործեր արա:
- ❖ Կատակը, ինչպես աղը, պետք է չափավոր օգտագործել:
- ❖ Կյանքը նման է մղձավանջի, որտեղ ամենահիմար մարդիկ երբեմն գրավում են լավագույն տեղերը:
- ❖ Մարդը, իր կրքերի գերին լինելով, ազատ լինել չի կարող:
- ❖ Երջանիկ ապրելու գաղտնիքը միմիայն ներկայով ապրելու մեջ է:
- ❖ Եթե ուզում եք երկար ապրել, ձեռք բերեք հին գինի և հին ընկեր:
- ❖ Ամեն ինչ զննիր, տուր մտքին առաջին տեղը:
- ❖ Զայրույթի պահին ոչ խոսի՛ր, ոչ գործի՛ր:
- ❖ Երկու բան այս կյանքում մարդուն աստվածակերպ են դարձնում՝ ապրել հանուն հասարակության բարօրության և ճշմարտության:
- ❖ Սկիզբն ամբողջի կեսն է:
- ❖ Քանդակին տեսքն է գեղեցկացնում, մարդուն՝ իր արարքները:
- ❖ Ավելի լավ է քար նետել, քան դատարկ բառ:
- ❖ Քեզ համար ընկեր ընտրիր: Դու չես կարող միայնակ երջանիկ լինել: Երջանկությունը երկուսինն է:

- ❖ Նա, ով կենդանի է սպանում, որպեսզի ուտի միսը, հանգիստ կարող է նաև իր նմանին սպանել:
- ❖ Որքան էլ կարճ լինեն «այո» և «ոչ» բառերը, դրանք ամենաերկար մտածելու առիթ են տալիս:
- ❖ Լռիր կամ լռությունից լավ բան ասա:
- ❖ Նմանապես վտանգավոր է խելագարին թուր և անպատիվ մարդուն իշխանություն տալը:

# §1. ՊՅՈՒԹԱԳՈՐԱՍԻ ԹԵՈՐԵՄԻ 4 ԱՊԱՑՈՒՅՑՆԵՐԸ

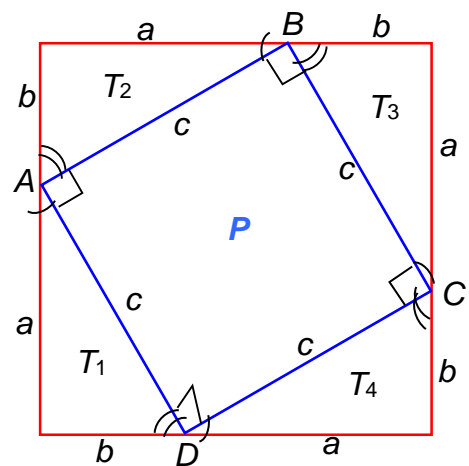
## Ապացույց N 1.

Դիցուք,  $T$ -ն ուղղանկյուն եռանկյունի է, որի էջերն են  $a, b$ , իսկ ներքնաձիգը՝  $c$ -ն:  
Ապացուցենք, ոչ  $c^2 = a^2 + b^2$  :

Կառուցենք մի  $Q$  քառակուսի, որի կողմը  $a+b$  է: Այդ քառակուսու կողմերի վրա վերցնենք  $A, B, C, D$  կետերն այնպես, որ  $AB, BC, CD, DA$  հատվածները  $Q$  քառակուսուց անջատեն  $T_1, T_2, T_3, T_4$  եռանկյունները  $a$  և  $b$  էջերով:  $ABCD$  քառանկյունը նշանակենք  $P$  տառով: Ցույց տանք, որ  $P$ -ն  $c$  կողմով քառակուսի է:

Բոլոր  $T_1, T_2, T_3, T_4$  եռանկյունները հավասար են  $T$  եռանկյանը (ըստ 2 էջերի): Այդ պատճառով նրանց ներքնաձիգերը հավասար են  $T$  եռանկյան ներքնաձիգին, այսինքն  $c$  հատվածին: Ապացուցենք, որ այդ քառանկյան բոլոր անկյունները ուղիղ են:

Դիցուք,  $\alpha$  և  $\beta$ -ն  $T$  եռանկյան սուր անկյուններն են: Ապա  $\alpha + \beta = 90^\circ$ :  $P$  քառանկյան  $A$  գագաթի անկյունը  $\alpha$  և  $\beta$  անկյունների հետ միասին կազմում է փոխված անկյուն:  $\alpha + \beta + A = 180^\circ$ , այստեղից անկյուն  $A = 90^\circ$ : Նույնաբար ապացուցում ենք, որ  $P$  քառանկյան մնացած անկյունները նույնպես ուղիղ են, հետևաբար  $P$ -ն  $c$  կողմով քառակուսի է:



Այսպիսով,  $a+b$  կողմով  $Q$  քառակուսին բաղկացած է  $c$  կողմով  $P$  քառակուսուց և 4 ուղղանկյուն եռանկյուններից, որոնք հավասար են  $T$  եռանկյանը, նրանց մակերեսների համար կատարվում է հետևյալ հավասարությունը՝

$$S(Q) = S(P) + 4S(T).$$

Քանի որ  $S(Q) = (a+b)^2$ ;  $S(P) = c^2$  և  $S(T) = \frac{1}{2}ab$ , ապա տեղադրելով այս արտահայտությունները  $S(Q) = S(P) + 4S(T)$  հավասարությանը, կստանանք

$$(a+b)^2 = c^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} a \cdot b ;$$

Քանի որ  $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ , ապա  $(a+b)^2 = c^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} a \cdot b$  հավասարությունը կարելի է գրել այսպես՝

$$a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 2ab ,$$

որտեղից հետևում է, որ

$$c^2 = a^2 + b^2 ;$$

Ապացույցն ավարտված է:

### Ապացույց N2.

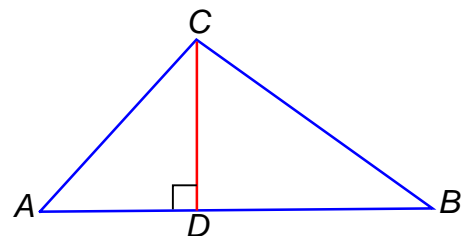
Դիցուք  $\triangle ABC$  ուղղանկյուն եռանկյունի է  $C$  ուղիղ անկյունով:  $C$  գագաթից տանենք  $CD$  բարձրությունը:

Ըստ սուր անկյան կոսինուսի սահմանման

$$\cos A = \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB} ;$$

Այստեղից  $AB \cdot AD = AC^2$  :

Նույն ձևով՝  $\cos B = \frac{BD}{BC} = \frac{BC}{AB} ,$





որտեղից  $AB \cdot BD = BC^2$ : Գումարելով ստացված հավասարությունները անդամ առ անդամ և նկատելով, որ  $AD + DB = AB$ , կստանանք

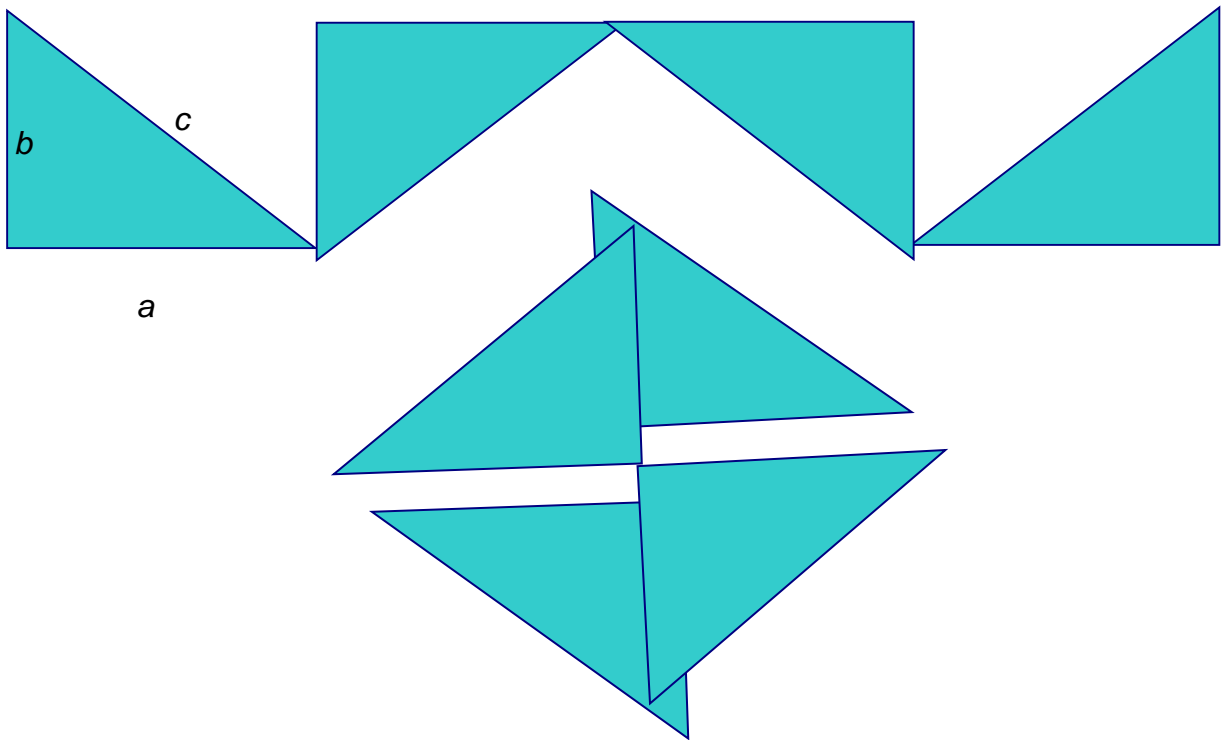
$$AC^2 + BC^2 = AB \cdot (AD + DB) = AB^2.$$

Թեորեմն ապացուցված է:

### Ապացույց N 3.

Մենք ունենք  $a$ ,  $b$  և  $c$  կողմերով 4 ուղղանկյուն եռանկյուն, որոնցից երեքը համապատասխանաբար շրջել ենք 90, 180 և 270 աստիճաններով:

Այդ 4 եռանկյուններով մենք կարող ենք ստանալ հետևյալ  $c$  կողմով հետևյալ քառակուսին:

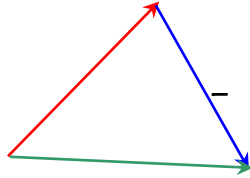


Նկատենք, որ մեծ քառակուսու ներսում գտնվող փոքր քառանկյունը  $a - b$  կողմով քառակուսի է, որի մակերեսը  $(a - b)^2$  է:

Հետևաբար մեծ քառակուսու մակերեսը՝  $c^2$ -ին հավասար կլինի  $(a - b)^2 + 2ab$  և լուծելով այս հավասարումը, կստանանք Պյութագորասի թեորեմը:

#### Ապացույց N 4.

Թեորեմը կարելի է ապացուցել՝ օգտվելով վեկտորների գումարման կանոնից և վեկտորների սկալյար արտադրյալի բանաձևից.



ըստ մեր եռանկյունու՝  $\vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$  :

$a$ -ն քարձրացնենք քառակուսի.

$$|\vec{a}|^2 = |\vec{b} - \vec{c}|^2 :$$

Կստանանք՝

$$|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{c} :$$

Ըստ վեկտորների սկալյար արտադրյալի բանաձևի՝

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos \alpha :$$

Այսպիսով կստանանք, որ

$$\|\vec{a}\|^2 = \|\vec{b}\|^2 + \|\vec{c}\|^2 - 2 \cdot \|\vec{b}\| \cdot \|\vec{c}\| \cdot \cos \alpha \Rightarrow |\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2 \cdot |\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos \alpha ,$$

որը համարժեք է կոսինուսների թեորեմի հավասարմանը, որտեղից հետևում է,

որ եթե  $\alpha = 90^\circ$ ,  $\cos 90^\circ = 0 \Rightarrow |\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2$  :

Թեորեմն ապացուցված է:

## §2. ՊՅՈՒԹԱԳՈՐԱՍԻ ԹԵՈՐԵՄԻ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆԸ

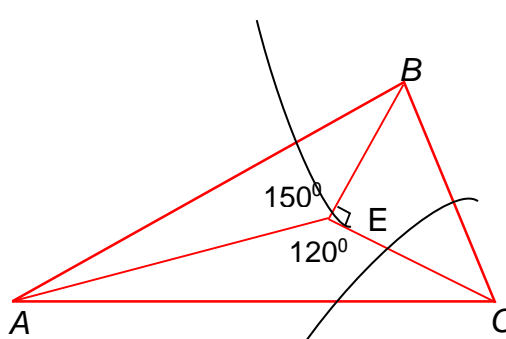
### ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԱԿԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ

Խնդիր N1:  $x, y, z$  դրական թվերը բավարարում են

$$x^2 + xy + \frac{y^2}{3} = 25, \quad \frac{y^2}{3} + z^2 = 9, \quad z^2 + xz + x^2 = 16$$

պայմաններին: Գտնել  $xy + 2yz + 3xz$  արտահայտության արժեքը:

**Լուծում.** Հարթության մեջ դիտարկենք  $O$  կետից դուրս եկող  $OA = \frac{y}{\sqrt{3}}$ ,  $OB = x$ ,  $OC = z$  հատվածները այնպես, որ  $\angle AOB = 150^\circ$ ,  $\angle AOC = 90^\circ$ ,  $\angle BOC = 120^\circ$  (տես նկ. 1):



$\Delta AOB$ -ից (ըստ կոսինուսների թեորեմի)

$$AB^2 = x^2 + \frac{y^2}{3} - 2 \cdot x \cdot \frac{y}{\sqrt{3}} \cdot \cos 150^\circ = x^2 + \frac{y^2}{3} + xy = 25 \Rightarrow AB = 5:$$

$\Delta AOC$ -ից (ըստ Պյութագորասի թեորեմի)

$$AC^2 = \frac{y^2}{3} + z^2 = 9 \Rightarrow AC = 3:$$

$\Delta BOC$ -ից (ըստ կոսինուսների թեորեմի)

$$BC^2 = x^2 + z^2 - 2 \cdot x \cdot z \cdot \cos 120^\circ = x^2 + z^2 + xz = 16 \Rightarrow BC = 4:$$

Քանի որ  $AC^2 + BC^2 = 3^2 + 4^2 = 25 = AB^2$ , հետևաբար  $\angle ACB = 90^\circ$ :

Ունենք՝

$$S_{ABC} = S_{AOB} + S_{AOC} + S_{BOC} \Rightarrow \frac{1}{2} x \frac{y}{\sqrt{3}} \sin 150^\circ + \frac{1}{2} z \frac{y}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} xz \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \Rightarrow$$

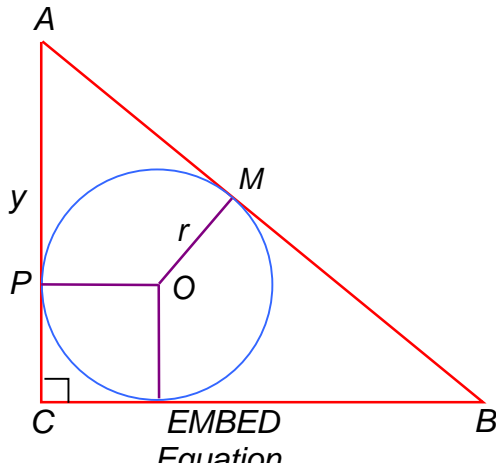
$$\frac{xy}{4 \cdot \sqrt{3}} + \frac{zy}{2 \cdot \sqrt{3}} + \frac{xz \cdot \sqrt{3}}{4} = 6 \Rightarrow xy + 2zy + 3xz = 24\sqrt{3}:$$

**Խնդիր N2:**  $x, y$  դրական թվերի համար լուծել հավասարումների համակարգը:

$$\begin{cases} y\sqrt{x^2 - y^2} = 48 \\ x + y + \sqrt{x^2 - y^2} = 24 \end{cases}$$

**Լուծում:** Դիտարկենք  $BC = \sqrt{x^2 - y^2}$  և  $AC = y$  էջերով ուղղանկյուն

եռանկյունը (տե՛ս նկ. 2):



$\triangle ACB$ -ից (ըստ Պյութագորասի թեորեմի)

$$AB^2 = y^2 + x^2 - y^2 = x^2 \Rightarrow AB = x:$$

Ունենք՝

$$S_{ACB} = \frac{1}{2} y \cdot \sqrt{x^2 - y^2} = 24 :$$

Մյուս կողմից

$$S_{ABC} = p \cdot r = \frac{y + x + \sqrt{x^2 - y^2}}{2} \cdot r = \frac{24}{2} \cdot r = 12 \cdot r = 24 \Rightarrow r = 2:$$

Ունենք՝

$$\begin{aligned} x &= AM + MB = AP + BN = AC - r + BC - r = y - 2 + \sqrt{x^2 - y^2} - 2y + \sqrt{x^2 - y^2} - 4 = \\ &= 24 - x - 4 = 20 - x \Rightarrow x = 20 - x \Rightarrow x = 10 \Rightarrow y_1 = 6, y_2 = 8: \end{aligned}$$

**Պատ.**՝ (10; 6), (10; 8):

**Խնդիր N3:**  $a, b, c$  դրական թվերի համար լուծել հավասարումների համակարգը:

$$\begin{cases} x + y + z = 8 \\ \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 4} + \sqrt{z^2 + 9} = 10. \end{cases}$$

**Լուծում:** Խնդիրը լուծելու համար դիտարկենք նկարը:

Նկատենք, որ  $AA_3 = x + y + z = 8$ ,  $DA_3 = 1 + 2 + 3 = 6$ , հետևաբար՝

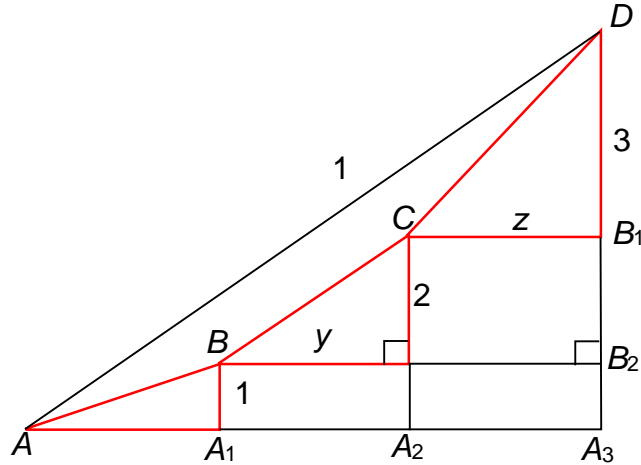
$$AD = \sqrt{AA_3^2 + DA_3^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10:$$

Մյուս կողմից՝

$$AB + BC + CD = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 4} + \sqrt{z^2 + 9} = 10:$$

Այսինքն՝  $AB + BC + CD = AD$ , հետևաբար  $B \in AD$ ,  $C \in AD$ :

Նկատենք, որ  $B \in AD$ ,  $C \in AD$  պայմաններից.



հետևում է  $\triangle ABA_1 \sim \triangle BCB_1 \sim \triangle CDB_3$ , եռանկյունների նմանությունը, որտեղից կստանանք՝

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{2}, \quad \frac{y}{z} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{y}{2}, \quad z = \frac{3y}{2};$$

Ունենք՝

$$x + y + z = 8 \Rightarrow \frac{y}{2} + y + \frac{3y}{2} = 8 \Rightarrow y = \frac{8}{3} \Rightarrow x = \frac{4}{3}, \quad z = 4;$$

Դժվար չէ ստուգել, որ  $x = \frac{4}{3}$ ,  $y = \frac{8}{3}$ ,  $z = 4$  թվերը բավարարում են նաև համակարգի երկրորդ հավասարմանը:

**Պատ.**  $\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}, 4\right)$ :

## ԵԶՐԱԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆ

Աշխատանքն ընտրված է թեորեմի կիրառական բնույթի և արդի մաթեմատիկայում նրա ակտուալության պատճառով:

Այն իր մեջ պարունակում է ծավալուն դաս և մեծ գիտելիքի պաշար, որը հետազայում օգտագործման միտում ունի:

Այս հետազոտությունը լայն հնարավորություններ է ստեղծում մաթեմատիկայում և նոր դրներ բացում ինձ համար:

## ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. <http://www.slideshare.net/Sona8/pythagoras-10-3>
2. <http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/>
3. [http://jwilson.coe.uga.edu/emt669/student\\_folders/morris.stephanie/emt.669/essay.1/pythagorean.html](http://jwilson.coe.uga.edu/emt669/student_folders/morris.stephanie/emt.669/essay.1/pythagorean.html)
- 4 Ուսուցիչների վերապատրաստման դասընթացների լսարանային ժամերին առաջարկված ինքնուրույն աշխատանքների խնդիրներից (ղեկավար Գ. Սիմոնյան)