«ՍԵՎԱՆԻ Խ. ԱԲՈՎՅԱՆԻ ԱՆՎԱՆ ԱՎԱԳ ԴՊՐՈՑ»

ՀԵՐԹԱԿԱՆ ԱՏԵՍՏԱՎՈՐՄԱՆ ԵՆԹԱԿԱ ՈՒՍՈՒՑԻՉՆԵՐԻ ՎԵՐԱՊԱՏՐԱՍՏՄԱՆ ԴԱՍԸՆԹԱՑ 2022

ԱՎԱՐՏԱԿԱՆ ՀԵՏԱԶՈՏԱԿԱՆ ԱՇԽԱՏԱՆՔ

ԹԵՄԱ	Գեղագիտական դաստիարակության իրականացումը մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում
ԱՌԱՐԿԱ	Մաթեմատիկա
ՀԵՂԻՆԱԿ	Համեստ Զաքարյան
ՈՒՍՈՒՄՆԱԿԱՆ ՀԱՍՏԱՏՈՒԹՅՈՒՆ	ՀՀ Գեղարքունիքի մարզի Վարսեր գյուղի Ռ. Պետրոսյանի անվան միջնակարգ դպրոց

Բովանդակություն

Ներածություն

Գիտությունը և արվեստը մարդկային կենսագործունեության իրարից բավականին հեռու և իրարից շատ տարբեր ոլորտներ են: Եվ այդ տարբերությունը բնութագրվում է նաև դրանց ուսումնասիրության առարկաներով, գիտությունը զբաղվում է ճշմարտության, արվեստը գեղեցիկի բացահայտմամբ: Արդյո՞ք դա նշանակում է, որ գիտության մեջ բացառվում է գեղեցիկի առկայությունը, իսկ արվեստի մեջ՝ ճշմարտության:

Անշուշտ գեղեցիկը գեղագիտության և առաջին հերթին արվեստի ուսումնասիրության առարկան է: Սակայն գեղեցիկի դերը մարդու կյանքում այնքան մեծ է, որ այն ներթափանցում է մարդու կենսագործունեության ամենատարբեր ոլորտներ: Այդ ոլորտներից կարևորագույներից են գիտությունը և կրթությունը: Կա՞ գեղեցիկը այդ ոլորտներում, և եթե այո ապա ինչպե՞ս է այն դրսևորվում: Այս աշխատանքների հիմնական նպատակներից մեկը հենց գեղեցիկի դրսևորման բացահայտումն է մաթեմատիկայում և մաթեմատիկական կրթության գործընթացում: Գեղեցիկը լայնորեն մասնակցում է թե՛ մաթեմատիկայի ճարտարապետական կառույցի մեջ, թե՛ մաթեմատիկական գործունեության, մասնավորապես՝ ուսուցման գործընթացում:

Գեղագիտական դաստիարակության իրականացումը մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում

Ինչպես մաթեմատիկան, այնպես էլ նրա ուսուցման գործընթացը ունեն արժեքների ձևավորման հսկայական ներուժ: Հանրահայտ է մաթեմատիկայի վճռական դերը մտածողության և, ընդհանրապես, ճշմարտական արժեքների ձևավորման և զարգացման գործում: Մեծ է նաև մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացի դերը հոգեկան և բարոյական արժեքների ձևավորման մեջ: Մաթեմատիկայի կրթական ներուժը մեծ կիրառություն է գտնում նաև գեղագիտական արժեքների ձևավորման գործում: Դրա համար հիմք են հանդիսանում մի կողմից արվեստի ամենատարբեր բնագավառներում մաթեմատիկայի հիմնարար կիրառությունները: Մյուս կողմից գեղագիտական ձևավորման հրաշալի հնարավորություններ են ստեղծում մաթեմատիկայի ճարտարապետության կառույցի, մաթեմատիկայի լեզվի առանձնահատկությունները, բնության ուսումնասիրության մեջ և գիտության ամենատարբեր բնագավառներում նրա անփոխարինելի դերը:

Ուսուցման գործընթացը, իր հերթին, ստեղծում է գեղեցիկ ձևավորման լրացուցիչ հնարավորություններ: Այստեղ առանձնանում են մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացի հիմնական օբյեկտները՝ հասկացությունները, թեորեմները, ապացույցները, խնդիրները և վարժությունները, ինչպես նաև մաթեմատիկայի ուսուցման մեթոդները՝ գեղեցիկ ձևավորման իրենց հնարավորություններով:

Թեորեմները արտահայտում են մաթեմատիկայի հասկացությունների հիմնական հատկությունները, դրանց միջև առկա կապերն ու օրինաչափությունները և բնականաբար, մաթեմատիկական գեղեցիկ որակավորումը առաջին հերթին հասցեագրվում է նրանց: Թեորեմները օժտված են մաթեմատիկական գեղեցիկ մի շարք օբյեկտիվ հատկություններով, իսկ դրանց ուսուցումը ուղեկցվում է նաև մաթեմատիկական գեղեցիկ սուբյեկտիվ հատկանիշներով: Թեորեմներին հատուկ են նաև գեղեցիկ արտաքին և, հատկապես, ներքին դրսևորումները: Այդ պատճառով թեորեմները մաթեմատիկայի ուսուցման միջոցով գեղեցիկ ձևավորման կարևոր աղբյուրներն են:

Անդրադառնանք մաթեմատիկական գեղեցիկ օբյեկտիվ հատկանիշներին, որոնք թեորեմների գեղեցկության կարևոր չափանիշներ են:

Հստակությունը կարևորագույն հատկանիշն է, որով պետք է օժտված լինեն բոլոր թեորեմները: Թեորեմի պայմանները և եզրակացությունը պետք է ձևակերպված լինեն հստակ, զերծ երկիմաստ ընկալումներից, հուզական, զգացմունքային երանգավորումներից և խոսքի արտահայտման գեղարվեստական այլ հնարքներից: Այն ենթադրում է նաև թեորեմի ապացուցելիություն. նրա պայմանները պետք է բավարար լինեն եզրակացությունը ստեղծելու համար: Միաժամանակ, նրանում չպետք է լինեն ավելորդ պայմաններ, պայմաններ, որոնք չեն օգտագործվում թեորեմի ապացուցման ընթացքում կամ էլ բխում են մյուս պայմաններից:

Պարզությունը նպաստում է մաթեմատիկայի ընդհանուր ճարտարապետական կառույցի մեջ թեորեմի ներդաշնակ ներառմանը: Միաժամանակ, պարզությունը թեորեմի ուսուցման հաջողության կարևոր պայման է. առանց դրա անհնար է ապահովել թեորեմի ընկալումը: Թեորեմի պարզությունը առաջին հերթին արտահայտվում է նրա ձևակերպման մեջ: Երկար-բարակ, խրթին ձևակերպումները լուրջ խոչընդոտ են նրա ուսուցման ճանապարհին: Թեորեմի ձևակերպման պարզությունը պայմանավորված է մաթեմատիկական լեզվի ճիշտ օգտագործումով: Բանաձևի, թեորեմի մեջ սիմվոլների մեծ քանակությունը կարող է նրա էության ըմբռնման արգելք հանդիսանալ: Տառային նշանակումները կարող են և' օգնել, և' խանգարել ձևակերպման պարզությանը: Օրինակ, Պյութագորասի թեորեմի ձևակերպումը կարելի է կատարել հետևյալ եղանակով.

- Եթե ABC ուղղանկյուն եռանկյան մեջ <A-ն ուղիղ է, ապա $AB^2+AC^2=BC^2$:
- a, b էջեր և c ներքնաձիգ ունեցող ուղղանկյուն եռանկյան համար՝ $a^2+b^2=c^2$:
- Ուղղանկյուն եռանկյան էջերի քառակուսիների գումարը հավասար է ներքնաձիգի քառակուսուն:

Այս ձևակերպումներից երկրորդում մաթեմատիկական սիմվոլների քանակությունը ավելի քիչ է, քան առաջինում: Այդ պատճառով այն ավելի պարզ տեսք ունի: Իսկ երրորդում՝ ընդհանրապես մաթեմատիկական սիմվոլներ չկան, և այն պարզության տեսակետից կատարյալ է:

Դիտարկենք հաջորդ օրինակը՝ սինուսների թեորեմը: Այն կարող ենք ձևակերպել հետևյալ եղանակներով.

- ABC եռանկյան համար $\frac{AB}{\sin C}=\frac{AC}{\sin B}=\frac{BC}{\sin A}$:
- a, b, c կողմերով և նրանց դիմաց համապատասխանաբար ընկած α, β, γ անկյուններով եռանկյան համար $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$:
- Եռանկյան կողմերը իրար հարաբերվում են այնպես, ինչպես նրանց դիմաց անկյունների սինուսները:

Այստեղ թեև առաջին ձևակերպումը ավելի կարճ է, քան երկրորդը, սակայն նրանում հիմնական բանաձևի ընկալումը լրացուցիչ ջանքեր է պահանջում՝ կապված կողմերի և դրանց ընկած անկյունների գրառման և պատկերացման հետ, ինչը ներառված է երկրորդի ձևակերպման մեջ: Այստեղ հաջող են ընտրված նաև եռանկյան կողմերի և անկյունների նշանակումը. դրանց համար լատինական և հունական այբուբենների առաջին երեք տառերի միջև առկա համաչափությունը արտաքին գեղագիտականի դրսևորում է և գեղեցիկի լրացուցիչ երանգ է հաղորդում բանաձևին: Այդ պատճառով երկրորդ ձևակերպումը ավելիւ պարզ է: Երրորդ ձևակերպումը թեև ընդհանրապես տառեր չի պարունակում, բայց նրա ընկալման համար սովորողը, թերևս, պետք է կատարի լրացուցիչ գծագիր և նշանակումներ:

Հարկ է նշել,որ երկրաչափության դպրոցական դասընթացում հատվածի նշանակումը նրա ծայրակետերի միջոցով, եռանկյան /նաև՝ բազմանկյան/ նշանակումը նրա գագաթների միջոցով և դրանց հետագա օգտագործումը եռանկյան այլ տարրերի նշանակման համար, թեև հստակության կարևոր ցուցանիշ են, բայց մաթեմատիկական թեորեմին, նրա ապացույցին և մաթեմատիկական տեքսին՝ ընդհանրապես, հաղորդում են անհրապուրիչ տեսք, դժվարացնում են համապատասխան երկրաչափական նյութերի ընթերցումը, ինչը արդյունք է մաթեմատիկական սիմվոլների անհարկի շատ օգտագործման, որի պատճառով խախտվում է մաթեմատիկական գեղեցիկի պարզության հատկանիշը:

Մաթեմատիկական թեորեմների գեղագիտական գրավչությունը արտահայտվում է նաև մաթեմատիկական գեղեցիկի բազմազանությունների միասնության և ընդհանրականության օբյեկտիվ հատկանիշներով: Բազմազանությունների միասնության հատկանիշով, օրինակ, բոլոր ուղղանկյուն եռանկյունները միավորվում են ,,որևէ երկու կողմերի քառակուսիների գումարը հավասար է երրորդի քառակուսուն,, հատկությամբ, բոլոր եռանկյունները՝ փռված անկյանը հավասար ներքին անկյունների գումար ունենալու հատկությամբ, երեքի վրա բաժանվող բնական թվերը՝ երեքի բաժանվող թվանշանների գումար ունենալու հատկությամբ և այլն: Մյուս կողմից, ,,երեքի վրա բաժանվող թվանշանների գումար ունեցող բնական թիվը բաժանվում է երեքի" հատկությունը կարելի է կիրառել ցանկացած բնական թվի համար, ինչը ցույց է տալիս այդ թեորեմի ընդհանրականությունը:

Մաթեմատիկայում կա թեորեմների մի տեսակ, որոնցում դրսևորվում է գեղեցիկի համաչափության հատկանիշը: Դրանք արտահայտվում են համարժեքության տեսքով. A և B դատողությունները համարժեք են: Մաթեմատիկայում նման համարժեքությունները սովորաբար ձևակերպվում են ,,A այն և միակ այն դեպքում, եթե B" կամ ,,A-ն B-ի անհրաժեշտ և բավարար պայմանն է" ձևերով: Նախորդ պարբերության մեջ բերված բոլոր թեորեմները այդպիսին են, ինչը դրանց տալիս է լրացուցիչ գեղագիտական գրավչություն. A և B դատողությունները կարծեք ,,հավասարակշռվում" են. դրանք փոխարինելով մեկը մյուսով, նորից կստանանք տրվածին համարժեք թեորեմ: Այդ գտրավչությունը սովորողը կզգա, եթե ուսուցիչը ուշադրություն դարձնի դրա վրա: Պետք է նկատի ունենալ, որ նման թեորեմները թույլ են տալիս այլ դեպքերում նրանում առկա պայմանն ու եզրակացությունը փոխարինել մեկը մյուսով: Օրինակ, հավասարասրուն եռանկյան համար մենք հավասարապես օգտագործում ենք նրա երկու կողմերի կամ երկու անկյունների հավասարությունը: Եվ նման փոխարինումը օրինական է, որովհետև իրավացի է հետևյալ համարժեքությունը. եռանկյունը հավասարասրուն է /այսինքն՝ նրա սրունքները հավասար են/ այն և միայն այն դեպքում, եթե հիմքին առընթեր անկյունները հավասար են: Նույն կերպ, օգտվելով Պյութագորասի թեորեմից, 3, 4, 5 կողմերով եռանկյան միջոցով որմնադիրները, ատաղձագործները և այլ անհեստավորներ հաճախ կառուցում են ուղիղ անկյուն:

Վերջին ձեռնարկման գրավչությունը բխում է նաև նրանում մաթեմատիկական գեղեցիկ ընդհանրականության և կիրառելիության հատկանիշների առկայությունից: Իսկ պարբերական ֆունկցիաների ուսումնասիրության ընթացքում դրսևորվում է ռիթմի գեղագիտական հատկանիշը, ածանցյալի մասնակցությամբ առանձին թեորեմներում՝ օպտիմալության հատկանիշը, դիֆերենցիալ հավասարումների մասնակցությամբ թեորեմներում՝ կայունության հատկանիշը և այլն:

Թեորեմի գեղագիտական գրավչությունը մեծապես պայմանավորված է նրա ուսուցման կազմակերպումից, որի ընթացքում դրսևորվում են նաև մաթեմատիկական գեղեցիկի սուբյեկտիվ հատկանիշները:

Այստեղ առաջին հերթին պետք է նկատի ունենալ, որ յուրաքանչյուր մաթեմատիկական թեորեմ ոչ ակնհայտ ճշմարտություն է, և նրա իմացությունը արդեն մաթեմատիկական գեղեցիկի հատկանիշ է: Հասկանալի է, որ թեորեմի բերած այդ ճշմարտությունը, կախված ուսուցչի մոտեցումներից, կարող է աննկատ մնալ սովորողի համար կամ էլ դառնալ նշանակալից: Իսկ նշանակալից դարձնելու համար ուսուցիչը պետք է նախապատրաստի թեորեմի մուտքը. համապատասխան հարցադրումների միջոցով՝ ինքը կամ աշակերտների ուժերով առաջ քաշի վարկածներ և ներգրավի գեղեցիկի անկանխատեսելիության և անսպասելիության հատկանիշները: Սովորաբար գեղագիտական տարրը առավելագույնս դրսևորվում է, երբ սովորողը ինքն է գտնում կամ հայտնագործում թեորեմը: Նման հայտագործումը հնարավոր է իրագործել ինչպես էվրիստիկական, այնպես էլ էմպիրիկ ճանապարհով:

Որոնման էվրիստիկական մեթոդը կապված է թեորեմի և նրա ապացուցման ներկայացման հերթականության հետ: Սովորաբար մաթեմատիկայում և նրա ուսուցման գործընթացում նախ ներկայացվում է թեորեմը, ապա կատարվում է նրա ապացուցումը: Ներկայացման այս ընթացքը չի համապատասխանում թեորեմի ստացման, հայտնագործման բնական ընթացքին, որտեղ մաթեմատիկոսը սկզբում ունի վարկած: Վարկածի հաստատման դեպքում նա կատարում է թեորեմի ձևակերպումը, որից հետո այդ հաստատումը ձևակերպում է որպես թեորեմի ապացուցում: Այսինքն՝ մաթեմատիկական գործունեությունը այստեղ իրագործվում է նախ՝ ապացուցումը, հետո՝ թեորեմի ձևակերպումը հերթականությամբ: Իրերի այս բնական ընթացքը, ինչպես նշվեց վերևում, խախտվում է մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում և նրա ուսուցման գործընթացում, որտեղ նախ ձևակերպվում է պատրաստի թեորեմը, ապա տրվում է նրա ապացույցը: Իսկ գեղեցիկի ինտելեկտուալ որոնման սուբյեկտիվ հատկանիշը, նրանից բխող հուզական տարրը լավագույնս կարող է դրսևորվել, եթե թեորեմը ներկայացվի որպես էվրիստիկական որոնման արդյունք՝ հայտնագործություն:

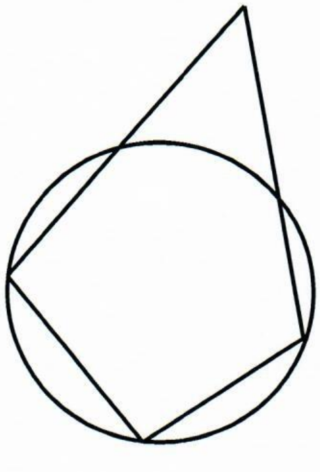
Օրինակ, միջին թվաբանականի և միջին երկրաչափականի կապի մասին թեորեմը կարելի է տալ պատրաստի վիճակում և անցնել նրա ապացուցմանը, որտեղ բնականաբար սովորողի ստեղծագործական հնարավորությունները աննշան են: Մինչդեռ կարելի է մի քանի օրինակների դիտարկմամբ կատարել համապատասխան դատողություններ, առաջադրել վարկածը և դրանց արդյունքում ստանալ այդ թեորեմը: Նման դատողությունները՝ ուսուցչի ոչ ակտիվ միջամտությամբ, կարող է անել աշակերտը: Այդ դեպքում աշակերտը անմիջականորեն մասնակցում է թեորեմի հայտնագործմանը, ինչը և մեծացնում է ուսուցման գործընթացի թե ստեղծագործական, թե գեղագիտական տարրը:

Թեորեմի էմպիրիկ ուսուցումը նույնպես թույլ է տալիս ստեղծագործական մոտեցում: Այստեղ դիտարկվում են զանազան փորձնական օրինակներ, որոնք էլ հանգեցնում են թեորեմին և նրա փնակերպմանը: Օրինակ, սինուսների թեորեմի էմպիրիկ եղանակով ուսուցումը կարելի է կատարել հետևյալ կերպ: Նախ հիշենք, որ եռանկյան մեջ մեծ անկյան դիմաց ընկած է մեծ կողմ, և կատարենք հետևյալ հարցադրումը. „Կա՞ այստեղ ինչ-որ օրինաչափություն": Առաջին „պատասխանը", որ կառաջարկի մեր ինտուիցիան, ուղիղ համեմատականությունն է. քանի անգամ որ մեծ է մի անկյունը մյուսից, այնքան անգամ էլ մեծ է նրա դիմացի կողմը մյուսի դիմացի կողմից: Բայց 30 աստիճանի սուր անկյունով ուղղանկյուն եռանկյան դիտարկումը հերքում է այս վարկածը, քանի որ 30 աստիճանի անկյունը փոքր է 90 աստիճանի անկյունից երեք անգամ, իսկ 30 աստիճանի անկյան դիմացի կողմը հավասար է ներքնաձիգի , այսինքն՝ 90 աստիճանի անկյան դիմացի կողմի կեսին: Այս դիտարկումից հետո աշակերտների մեծ մասը կկարծի, որ նշված հարցում չկա որևէ օրինաչափություն: Բայց այստեղ կարելի է անել ևս մեկ դիտարկում. 30 աստիճանի անկյան սինուսը հավասար է 1/2-ի, իսկ 90 աստիճանի անկյան սինուսը՝ 1-ի: Այս դիտարկումը ստեղծում է նոր վարկածի հնարավորություն. իսկ միգուցե եռանկյան կողմերի հարաբերությունը նույնն է, ինչ նրանց դիմացի անկյունների սինուսների՞ հարաբերությունը /ինչպես դիտարկված օրինակում/: Եթե աշակրտների մոտ նման վարկած դեռևս չի ձևավորվել, ապա կարելի է այստեղ դիտարկել ևս մեկ դեպք. Նույն եռանկյան մեջ 60 և 30 աստիճանի անկյունների և սինուսների, և դիմացի կողմերի հարաբերությունը հավասար է √3 –ի: Այս նոր դիտարկումը արդեն բավարար է համապատասխան վարկածի ձևավորման համար: Այժմ արդեն կարելի է կամ ձևակերպել սինուսների թեորեմը և անցնել դրա ապացուցմանը կամ էլ շարունակել էվրիստիկական մոտեցումը և քայլ առ քայլ մոտենալ սինուսների թեորեմի հայտնաբերմանը: Բոլոր այս դիտարկումները կարելի է իրականացնել աշակերտների ուժերով, ինչը ուսուցման գործընթացին կհաղորդի ստեղծագործական բնույթ և էապես կավելացնի նրանում գեղագիտական տարրը: Նշենք, որ այստեղ վարկածի բացակայության և էվրիստիկական ճանապարհով թեորեմի ստացման դեպքում լիովին կդրսևորվի նաև գիտական գեղեցիկի անսպասելիության սուբյեկտիվ հատկանիշը, ինչը կավելացնի թեորեմի գեղագիտական գրավչությունը:

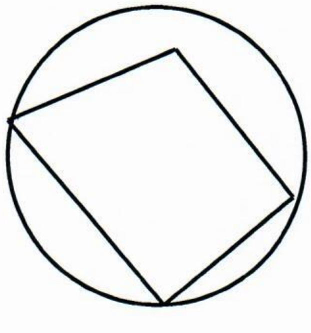
Բնականաբար, նշված գործընթացների իրականացումը աշակերտից կպահանջի որոշակի ջանքերի ներդրում թեորեմի էությունը հասանալու, նպատակաուղղված, բարդ ու դժվարին խոչընդոտի հաղթահարման համար, նպատակաուղղված աշխատանք, իսկ վերջնարդյունքի հասնելը կավելացնի սովորողի լավատեսությունը, հանգամանքներ, որոնք նաև մաթեմատիկական գեղեցիկի սուբյեկտիվ հատկանիշներն են և ավելացնում են թեորեմի գեղագիտական գրավչությունը:

Գիտական գեղեցիկի հստակության, պարզության, ինքնատիպության և այլ օբյեկտիվ հատկանիշներ կարող են հանդես գալ նաև որպես թեորեմի գեղագիտական գրավչության արտաքին հատկանիշներ, իսկ բազմազանությունների միասնության, ընդհանրականության, բարդը պարզին հանգեցնելու, կայունության, կիրառելիության, օգտակարության, օպտիմալության օբյեկտիվ հատկանիշները արտահայտում են թեորեմի գեղագիտության ներքին ներուժը: Կարգը, համաչափությունը, համեմատությունը, ներդաշնակությունը, ռիթմը և գեղագիտական գեղեցիկի այլ հատկանիշներ կարող են արտահայտել թեորեմի ինչպես ներքին, այնպես էլ արտաքին գրավչությունը: Սակայն յուրաքանչյուր թեորեմ ունի գեղցիկի ներքին և արտաքին դրսևորման իր յուրահատկությունները:

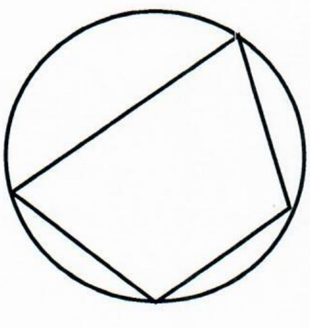
Հանրահայտ է , որ յուրաքանչյուր եռանկյանը կարելի է ինչպես ներգծել, այնպես էլ արտագծել շրջանագիծ: Այս փաստը որոշ ընդհանրություն է հաղորդում այդ երկու գաղափարներին: Իսկ կա՞ արդյոք նման ընդհանրությունը շրջանագծի և քառանկյան միջև: Դիտարկենք, օրինակ, հետևյալ երեք գծագրերը:



ա



բ



գ

Ի՞նչ ընդհանրություն և ի՞նչ տարբերություն ունեն դրանք, ո՞րն է գեղագիտորեն ավելի գրավիչ: Երեքում էլ պատկերված են քառանկյան և շրջանագծի փոխդասավորությունները, դրանց կապը, ինչն արտահայտվում է այն բանում, որ շրջանագիծը անցնում է քառանկյան գագաթներով: Բայց եթե առաջին երկուսում շրջանագիծն անցնում է քառանկյան երեք գագաթներով, ապա երրորդում այն անցնում է քառանկյան բոլոր չորս գագաթներով՝ շրջանագիծը արտագծված է քառանկյանը: Բնականաբար, վերջին դեպքում դիտարկվող կապը, ներդաշնակությունը ավելի կատարյալ է և ավելի մեծ գեղագիտական գրավչություն է պարունակում: Այսպիսով, մենք պարզեցինք քառանկյան և շրջանագծի ներդաձնակ փոխդասավորության պատճառը. Շրջանագիծը արտագծված է քառանկյանը:

Այժմ աշխատենք պարզել, թե ի՞նչն է պատճառը, որ առաջին երկու գծագրերում շրջանագծերը արտագծված չեն՝ չեն անցնում քառանկյան բոլոր չորս գագաթներով: Դրա համար նկատենք գծերի ևս մեկ ընդհանրություն. դրանցում քառանկյան երկու հանդիպակաց անկյունների հենման աղեղները լրացնում են իրար և կազմում են լրիվ շրջանագիծ: Այդ դեպքում հարց է առաջանում, թե ինչի՞ են հավասար հանդիպակած այդ անկյունների գումարները: Երրորդ գծագրում արդյունքը նկատվում է անմիջապես. այն 180 աստիճան է: Մնացած երկու դեպքերում այդ գումարներից մեկը փոքր է 180 աստիճանից, իսկ մյուսը մեծ է 180 աստիճանից:

Ահա և մենք պարզեցինք քառանկյան և շրջանագծի փոխդասավորության կատարյալ լինելու կամ քառանկյանը արտագծելի լինելու ներքին պատճառը. այն կապված է քառանկյան երկու հանդիպակած անկյունների գումարի 180 աստիճան լինելու հետ: Էվրիստիկական այլ դիտարկումները թույլ են տալիս ձևակերպել նաև քառանկյան արտագծելիության մասին թեորեմը, որի ընկալումը արդեն շատ մատչելի կլինի, քանի որ մենք ունենք նաև նրա գեղագիտական գրավչության արտաքին և ներքին դրսևորումները:

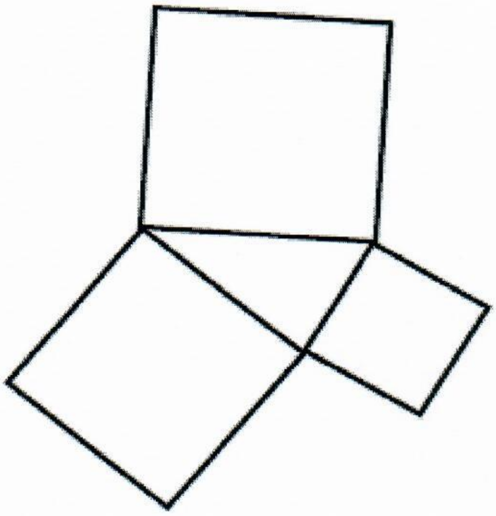
Թեև թեորեմների ուսուցման ընթացքում դրսևորվում են մաթեմատիկական գեղեցիկի օբյեկտիվ և սուբյեկտիվ հատկանիշների մեծ մասը, ներքին և արտաքին գեղագիտական ձևն ու բովանդակությունը, այնուամենայնիվ դրանք բավարար չեն ընկալման դժվարություններն լիովին հաղթահարելու համար, և թեորեմների ուսուցումը պահանջում է համապատասխան մոտիվացիա. ինչու՞ է անհրաժեշտ կոնկրետ այս կամ այն թեորեմի իմացությունը: Եվ մոտիվացիայի արդյունավետությունը ավելի մեծ է լինում, եթե այն իր մեջ ներառում է գեղագիտական գրավչություն:

Թեորեմների ուսուցման գործընթացը միշտ կարելի է տանել համապատասխան մոտիվացիայի դիտարկումից հետո: Հանրահաշվի դասագրքերում որպես նման մոտիվացիաներ հանդես են գալիս թեորեմների այն կիրառությունները, որոնց միջոցով լուծվում են կոնկրետ հետաքրքրություն ներկայացնող կիրառական խնդիրներ: Ասվածը ցուցադրենք երկրաչափության այնպիսի հիմնարար և գեղեցիկ թեորեմի ուսուցման օրինակի վրա, ինչպիսին Պյութագորասի հանրահայտ թեորեմն է:

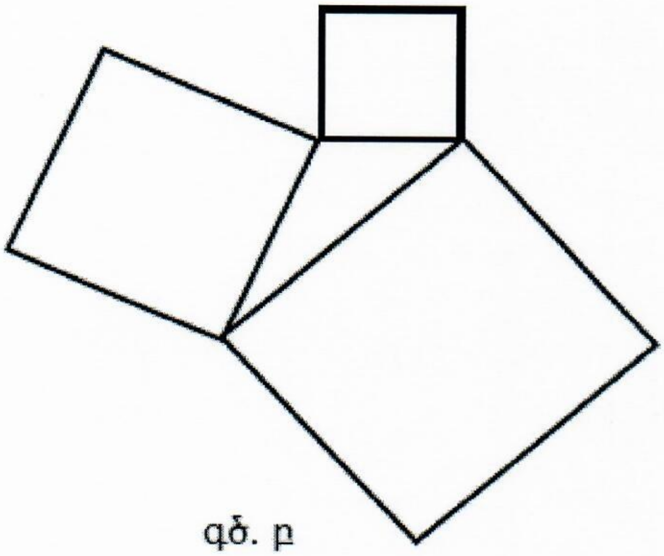
Իմ ուսուցիչ, հարգելի Վահրամը թեորեմն անցնելուց առաջ իր աշակերտներին տանում էր դպրոցի այգի և ուղղանկյունաձև հողամասի զանազան մասերը չափել տալով, որոշում էր այլ մասերի երկարությունները՝ օգտվելով Պյութագորասի թեորեմից և զարմացնելով թեորեմից անտեղյակ իր աշակերտներին: Իմ աշխատանքային գործունեության սկզբում ես նման հնարավորություն չունեի և թեորեմի հանդեպ հետաքրքրությունը առաջացնում էի դասարանում, վարվում էի այսպես:

Սկզբում առաջադրում էի հետևյալ խնդիրը:

Հայրը ուներ երկու որդի, որոնց պետք է կտակեր իր ունեցած երեք քառակուսաձև հողամասերը: Այդ հողամասերի համար որպես կողմ էին ծառայում տրված եռանկյան մեկական կողմերը /տես ա գծագիր/: Ինչպե՞ս վարվեր հայրը, եթե չէր ուզում կիսել հողամասերը:



գծ. ա

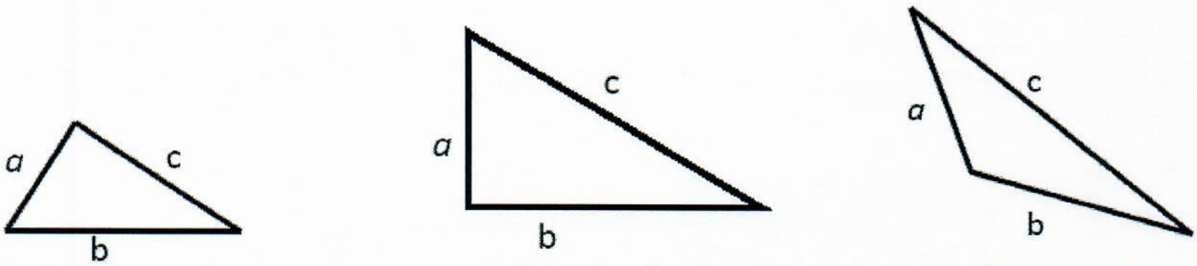


գծ. բ

Հասկանալի է, որ հայրը պետք է հողամասերից երկուսը /փոքրերը/ կտակեր տղաներց մեկին, իսկ մեկը /մեծը/ կտակեր մյուսին: Բայց ինչպե՞ս են համեմատվում նման հողամասերը իրար հետ: Իմ այս հարցադրմանը հետևում էին զանազան պատասխաններ, որոնք հիմնականում հենվում էին ա գծագրից ստացած տպավորության վրա. երկու հողամասերը ժառանգություն ստացող տղան շահում է: Այդ ժամանակ ես գծում էի նաև բ գծագիրը, որից երևում է, որ շահում է մեկ՝ մեծ հողամասը ժառանգող տղան:

Որոշ քննարկումներց հետո ես ավելացնում էի նաև մեկ այլ հարցադրում. իսկ կարելի՞ է ստանալ այնպիսի եռանկյուն, որ տղաներից ոչ մեկը մյուսի նկատմամբ առավելություն չստանա: Խնդրի լուծումը առայժմ հետաձգելով, ես իմ աշակերտների ուշադրությունը հրավիրում էի երկու հանգամանքի վրա: Նախ, ա գծագրում, որտեղ պատկերված եռանկյունը սուրանկյուն է, մեծ անկյունը ավելի մեծացնելով՝ մեծացնում էի նրա դիմացի կողմի վրա հենված քառակուսին, ապա և բ գծագրում բութանկյունը փոքրացնելով՝ փոքրացնում էի նրա դիմացի կողմի վրա հենված քառակուսին: Բնական կլիներ մտածել, որ կգա մի պահ, որ եռանկյունները կընդունեն այնպիսի դիրք, որ նրանց երկու փոքր կողմերի վրա կառուցված քառակուսիների մակերեսների գումարները համապատասխանաբար հավասար կլինեն մեծ կողմի վրա կառուցած քառակուսու մակերեսին: Եվ այստեղ առաջանում էր երկու հարց. առաջին՝ անհրաժեշտ էր հիմնավորել ասվածը, երկրորդ՝ ե՞րբ տեղի կունենային այդ հավասարությունները: Իհարկե, եթե մենք գտնեինք երկրոդ հարցի պատասխանը, ապա առաջին հարցադրումը ինքնստինքյան վերանում էր:

Այստեղ ես առաջարկում էի մոռանալ առաջադրված խնդիրը և անցնում էի Պյութագորասի թեորեմի ուսուցմանը: Իսկ $a^2 + b^2 = c^2$ բանաձևը միշտ չէ, որ հուշում է նախորդ խնդրում առաջադրված հարցի պատասխանը: Համենայն դեպս, դասավանդման իմ պրակտիկայում չի հանդիպել այն գտնելու դեպք: Ավելին, թեորեմի թողած տպավորությունը այնքան մեծ է լինում, որ աշակերտները մոռանում են դասի սկզբում առաջադրված խնդիրը: Եվ ուսուցիչը ստիպված է լինում հիշեցնել հոր կտակի պատմությունը: Միայն այդքանը: Մնացածը արդեն պետք է թողնել աշակերտներին: Եվ հիմնականում նրանց ուժերով էլ կարելի է պարզաբանել և ստանալ հետևյալ երեք բանաձևերը համապատասխանաբար սուրանկյուն, ուղղանկյուն և բութանկյուն եռանկյունների համար.



$a^2 + b^2 > c^2$ սուրանկյուն եռանկյուն

$a^2 + b^2 = c^2$ ուղղանկյուն եռանկյուն

$a^2 + b^2 < c^2$ բութանկյուն եռանկյուն

Արդեն հոգնած ու բավարարված աշակերտներին լիցքաթափելու համար ես քննարկում էի նաև այն հարցը, թե արդյո՞ք հայրը գիտեր Պյութագորասի թեորեմը, ինչը, իհարկե, քիչ կապ ուներ դասի հետ և այլ նպատակ էր հետապնդում:

Նման ձևով դասի կազմակերպումը իր մեջ պարունակում է ինչպես մոտիվացիայի գրավչություն, այնպես էլ հետաքրքրության, զարմանքի, անկանխատեսելիության, անսպասելիության, պարզության գեղագիտական տարրեր, առաջացնում համապատասխան հուզական վիճակներ: Ավելորդ չենք համարում նշել, որ դասի նյութը բավականին ծավալուն է, և սովորողից պահանջող տոկունության կամային որակը դրսևորվում է գեղագիտական տարի առկայության շնորհիվ:

Վերևում մենք դիտարկեցինք մաթեմատիկական կիրառական ոլորտում թեորեմի օգտագործման օրինակ, ինչը ծառայում էր որպես ուսուցման մոտիվացիայի միջոց և մեծացնում թեորեմի գեղագիտական գրավչությունը: Սակայն թեորեմի գեղագիտական գրավչությունը արտահայտվում է նաև բուն մաթեմատիկայում դրա կիրառության միջոցով: Դիտարկենք նման երկու օրինակ:

Իսկապես, նախորդ կետում քառանկյան՝ շրջանագծին ներգծելի լինելու հարցը պարզաբանելիս, մենք կիրառեցինք գագաթը շրջանագծից դուրս, շրջանագծի ներսում և շրջանագծի վրա գտնվող անկյունների չափման վերաբերյալ թեորեմները: Նման ձևով շրջանագծին արտագծելի լինելու քառանկյան հատկությունը քննարկելիս անսպասելիորեն այդ թեորեմների փոխարեն օգտագործվում է տրված կետից շրջանագծին տարված շոշափող հատվածների հավասարության մասին թեորեմը:

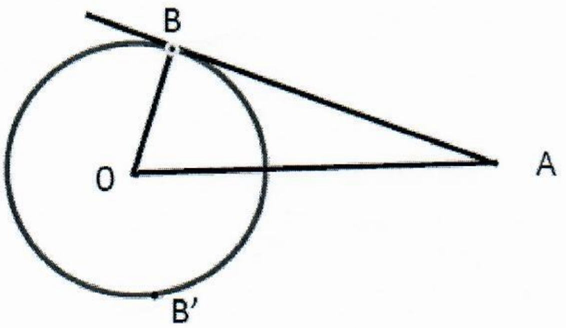
Երկու դեպքում էլ թեորեմի հիմնական գեղագիտական տարրը նրա կիրառելիությունն է, իսկ անսպասելիությունը ավելացնում է այդ տարրը:

Ավելի մեծ է թեորեմների կիրառելիությունը ապացուցումների կառուցման մեջ: եթե հիշենք ապացուցման հիլբերդյան սահմանումը, ապա պարզ կդառնա, որ առանց թեորեմների կիրառության դրանք կարող են շատ ծավալուն տեսք ընդունել և կորցնել իրենց գրավչությունը: Ահա թեորեմները փոխարինում են ապացուցման առանձին հատվածների, հեշտացնում ապացուցման ընկալումը և, դրանով, այն դարձնում գրավիչ:

Թեորեմները կիրառվում են նաև խնդիրների լուծման մեջ. առանց թեորեմների կիրառության դժվար է լուծել շատ թե քիչ դժվար որևէ խնդիր: Դիտարկենք մեկ օրինակ:

Ինչպե՞ս կարող ենք կարկինի և քանոնի օգնությամբ շրջանագծի հարթության մեջև շրջանագծից դուրս գտնվող կետերից այդ շրջանագծին տանել շոշափող:

Ենթադրենք տարել ենք նման շոշափող: Հետևելով գծագրում ընդունված նշանակումներին, կարող ենք նկատել, որ OBA անկյունը ուղիղ է, քանի որ OB շառավիղը ուղղահայաց է BA շոշափողին: Հետևաբար, շոշափման B կետը գտնելու համար մեզ անհրաժեշտ է գտնել տրված շրջանագծի այն կետը կամ կետերը, որոնցից OA հատվածը երևում է ուղիղ անկյան տակ: Բայց այդ կետերի բազմությունը OA տրամագծով շրջանագծի բոլոր կետերն են, բացառությամբ O և A կետերի: Ուրեմն, մեզ մնում է տանել OA տրամագծով շրջանագիծը, որի համար B կետը /ինչպես նաև՝ B' կետը/ կլինի A կետից տրված շրջանագծին տարված շոշափողի շոշափման կետը: Մնում է A կետը միացնել B կետին /նաև՝ B' կետին/:



Այստեղ գեղագիտական տարրը արտահայտվում է շրջանագծի շառավղի և նրա ծայրակետում տարված շոշափողի ուղղահայացության և շրջանագծի տրամագծի վրա հենված ներգծյալ անկյան ուղիղ լինելու մասին թեորեմների կիրառության անսպասելիության և, հավանաբար, նաև անկանխատեսելիության՝ գիտական գեղցիկի հատկանիշներով:

Եզրակացություն

Մարդու գործունեության կարևորագույն դրսևորումներից մեկը գեղեցիկի նկատմամբ նրա վերաբերմունքն է: Գեղեցիկի նկատմամբ վերաբերմունքով է արտահայտվում մարդու զգացմունքային աշխարհը: Յուրաքանչյուր մարդ ունի գողեցիկի իր ընկալումը և գնահատականը՝ իր ճիշտը, որ պայմանավորված է նրա ճաշակով: Այդ ճիշտն ունի սուբյեկտիվ բնույթ. Տարբեր մարդիկ կարող են ունենալ տարբեր ճաշակ, ինչը պայմանավորված է նախ և առաջ մարդկանց ներաշխարհով: Բայց տարբեր մարդկանց ճաշակը կարող է նաև համընկնել գեղեցիկի գնահատման հարցում:

Որպես ճաշակի և ճշմարտությունների բացահայտմանն ուղղված գրծընթացների համախմբություն մաթեմատիկան և նրա ուսուցման գործընթացը հեռու են թվում գեղագիտական ճշմարիտից: Սակայն անգամ մաթեմատիկական գիտելիքը, նրանում առկա աներկբա ճշմարտության հետ միասին ունի նաև գործնական, կիրառական մեծ նշանակություն, ինչը նրան տալիս է օգտակարի նշանակալից լինելու երանգ, այսինքն մաթեմատիկական ճշմարտությունը ստանում է նաև արժեքային բնույթ: Իսկ այդ արժեքների մեջ ինչպես համոզվեցինք այս աշխատանքում մեծ տեղ ունի գեղագիտականը: Եվ ուսուցման գործընթացի գեղագիտական կողմը դիտարկելիս անհրաժեշտ է նկատի ունենալ վերը ասվածը, մասնավորապես գեղագիտական ճշմարիտի վերաբերյալ մոտեցումները:

Ասվածից հետևում է, որ մաթեմատիկական գեղեցիկի օբյեկտիվ հատկանիշներով պայմանավորված գեղագիտական ճշմարիտը հիմնականում պայմանավորված է մաթեմատիկական օբյեկտի և նրանում գեղեցիկի օբյեկտիվ հատկանիշների ճանաչումով:

Օգտագործված գրականություն

1. Հ. Ս. Միքայելյան <<Բարոյական արժեքները և մաթեմատիկայի կրթական ներուժը>>

   Երևան, 2011:

2. Հ. Ս. Միքայելյան <<Գեղեցիկը, մաթեմամատիկան և կրթությունը>>, Մաս 1 << Գեղեցիկը և մաթեմատիկան>>

   Երևան, 2014:

3. Е. Э. Ильин <<Эмоции и чувства>>

   2-е издание, М., С-Петербург, 2013: