ՎԵՐԱՊԱՏՐԱՍՏՈՂ ԿԱԶՄԱԿԵՐՊՈՒԹՅՈՒՆ

ՇՈՒՄ Գիտակրթական կենտրոն ՀԿ

Ավարտական հետազոտական աշխատանք

Թեմա ԱՎՏՈՄՈՐՖ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԳԱՂԱՓԱՐԸ ԵՎ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Կատարող՝ Արման Աշոտի Աթոյան

/անուն,ազգանուն հայրանուն/

Ակադեմիական վարժարան ՊՈԱԿ, մաթեմատիկա

/դպրոց մասնագիտություն, ըստ վերապատրաստման խմբի/

Ղեկավար՝ Ն. Ասլանյան

/անուն,ազգանուն /

ԳՅՈՒՄՐԻ 2022

ԱՎՏՈՄՈՐՖ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԳԱՂԱՓԱՐԸ ԵՎ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

§ 1 Ավտոմորֆ ֆունկցիայի հասկացությունը

Վերաձևակերպենք պարբերական ֆունկցիայի սահմանումը:

Սահմանում: X թվային բազմության վրա որոշված $f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է պարբերական, եթե գոյություն ունի $\omega \neq 0$ թիվ այնպիսին, որ կամայական $x \in X$ թվի համար տեղի ունենան հետևյալ պայմանները

$$\text{ա) } x \pm \omega \in X \quad (1)$$

$$\text{բ) } f(x \pm \omega) = f(x) \quad (2)$$

Եթե ֆունկցիայի պարբերություններում առկա է փոքրագույն դրական (հիմնական կամ գլխավոր) ω_0 պարբերությունը, ապա (1) և (2) պայմանները հավասարազոր են

$$f(x + n\omega_0) = f(x), \quad x \in X, \quad n \in Z \quad (3)$$

պայմաններին:

Նշանակենք

$$T_n(x) = x + n\omega_0 :$$

Այս դեպքում (3) պայմանները կարելի է գրառել

$$f(T_n(x)) = f(x), \quad x \in X, \quad n \in Z \quad (4)$$

կամ

$$f(T(x)) = f(x), \quad x \in X, \quad T \in \Gamma \quad (5)$$

տեսքով, որտեղ Γ-ով նշանակված է բոլոր $T(x) = T_n(x)$, $n \in Z$ գծային ֆունկցիաների (ձևափոխությունների) բազմությունը:

Γ և X բազմություններն օժտված են հետևյալ հատկություններով: Γ -ից կամայական T և S ֆունկցիաների համար նրանց $(T \circ S)(x) = T(S(x))$ համադրույթը և հակադարձ $T^{-1}(x)$ ֆունկցիան նույնպես պատկանում են Γ -ին, ընդ որում համադրույթի գործողությունը զուգորդական է $(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$: Այդպիսի Γ բազմությունը կոչվում է խումբ [4]: Իր հերթին X բազմությունն այնպիսին է, որ կամայական $x \in X$ կետի համար և կամայական $T \in \Gamma$ ֆունկցիայի համար $T(x)$ կետը նույնպես պատկանում է X բազմությանը, այսինքն $T(X) = X$: Այդպիսի X բազմությունը Γ խմբի, և մասնավորաբար $T(x)$ ձևափոխության նկատմամբ կոչվում է ինվարիանտ (անփոփոխ):

Վերադառնանք (2.4) և (2.5) պայմաններին: Ընդհանուր դեպքում այս պայմաններում T_n և T ֆունկցիաները կարող են լինել նաև ոչ գծային: Այդ պարագայում պարբերական ֆունկցիայի մասին ընդհանուր իմաստով խոսել այլևս չի կարելի:

Դիցուք X բազմությունը (տիրույթը) ինվարիանտ է $T(x)$ ձևափոխության նկատմամբ (պարտադիր չէ, որ այն լինի գծային), իսկ X –ի վրա որոշված $f(x)$ ֆունկցիան բավարարում է (2.5) պայմանին: Այդ դեպքում $f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է $T(x)$ ձևափոխության նկատմամբ ինվարիանտ X բազմության վրա, իսկ $T(x)$ –ը կկոչվի $f(x)$ ֆունկցիայի ինվարիանտ: Եթե նշված պայմանները բավարարվում են Γ խմբի բոլոր ձևափոխությունների, կամ մասնավորաբար նրանց մի որևէ բազմության համար, ապա $f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է Γ-ի նկատմամբ ինվարիանտ: Եթե, բացի այդ, $f(x)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է (այսինքն ունի ածանցյալ) X բազմության վրա, ապա այն կոչվում է ավտոմորֆ X բազմության վրա Γ խմբի նկատմամբ: Մասնավորաբար (2.3) կամ (2.4) պայմաններից հետևում է, որ կամայական պարբերական ֆունկցիա, որի հիմնական պարբերությունը ω_0 –ն է կհանդիսանա ինվարիանտ $T_n(x) = x + n\omega_0$, $n \in Z$ ձևափոխությունների նկատմամբ, որոնք կազմում են այսպես կոչված միապարբերական խումբ, իսկ պարբերական և դիֆերենցելի ֆունկցիան կհանդիսանա ավտոմորֆ այդ խմբի նկատմամբ:

Ինվարիանտ և ավտոմորֆ ֆունկցիաների սահմանումների մեջ $T(x)$ ձևափոխությունը պարտադիր չէ, որ լինի գծային: Այն կարող է լինել գծային, կոտորակագծային, ռացիոնալ և այլն: Ավտոմորֆ ֆունկցիաների դասական տեսության մեջ հիմնականում ուսումնասիրվում են $T(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, $ad\neq bc$ կոտորակագծային ձևափոխությունները [4]: Օրինակ`

$$T_0(x)=x,\qquad T_1(x)=-x,\qquad T_2(x)=\frac{1}{x},\qquad T_0(x)=-\frac{1}{x} \tag{6}$$

ձևափոխությունների բազմությունը կազմում է խումբ, իսկ $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$ ֆունկցիան, որը բավարարում է

$$f(x)=f(-x)=f\left(\frac{1}{x}\right)=f\left(-\frac{1}{x}\right)$$

պայմաններին և, որն ունի ածանցյալ բոլոր $x\neq 0$ կետերում հանդիսանում է այդ խմբի նկատմամբ ավտոմորֆ ֆունկցիա: Իսկ օրինակ պարբերական դիֆերենցելի $\cos x$ ֆունկցիան, որը բավարարում է

$$\cos(x+2\pi n)=\cos x,\ \cos(-x+2\pi n)=\cos(-x)=\cos x,\ n\in Z$$

պայմաններին հանդիսանում է ավտոմորֆ (նշանակում է նաև ինվարիանտ) ոչ միայն միապարբերական գծային $T_n(x)=x+2\pi n,\ n\in Z$ ձևափոխությունների խմբի, այլև $\pm x+2\pi n,\ n\in Z$ խումբ ձևափոխությունների նկատմամբ: Համանման ձևով $\sin x$ ֆունկցիան ավտոմորֆ է $2\pi n+x,\ 2\pi n+\pi-x,\ n\in Z$ խումբ ձևափոխությունների նկատմամբ: Միևնույն ժամանակ ոչ բոլոր պարբերական ֆունկցիաներն են ավտոմորֆ: Օրինակ Դիրիխլեի

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in Q\\ 0, & x\in R\setminus Q\end{cases}$$

ֆունկցիան, որի համար յուրաքանչյուր ռացիոնալ թիվ հանդիսանում է պարբերություն` հանդիսանում է պարբերական: Սակայն այն ոչ մի կետում չունի ածանցյալ, դեռ ավելին` այն նույնիսկ անընդհատ չէ: Հետևաբար այն ըստ վերը բերված սահմանման չի հանդիսանա ավտոմորֆ, բայց կհանդիսանա ինվարիանտ $T(x)=x+r$ գծային ձևափոխության նկատմամբ, որտեղ r–ը կամայական ռացիոնալ թիվ է:

Այսպիսով՝ ինվարիանտության գաղափարն ավելի ընդհանուր է, քան ավտոմորֆության գաղափարը, իսկ ավտոմորֆության գաղափարը դիֆերենցելիության լրացուցիչ պայմանի առկայությամբ ավելի ընդհանուր է, քան պարբերականության գաղափարը:

Ավտոմորֆ ֆունկցիաների դասական տեսությունը վերը բերված իմաստով հիմնադրված է Ֆ. Կլեյնի և Ա. Պուանկարեյի կողմից՝ տասնիներորդ դարում [5, 6]: Այժմ առավել մանրամասնորեն ուսումնասիրված են մի փոփոխականի ավտոմորֆ ֆունկցիաները, հաստատված է նրանց կապը մաթեմատիկայի այլ բաժինների հետ. խմբերի տեսություն, հանրահաշվական և ոչ էվկլիդեսյան երկրաչափություն, դիֆերենցիալ հավասարումներ, թվերի տեսություն: Քսաներորդ դարում բուռն կերպով զարգացել են շատ փոփոխականների ավտոմորֆ ֆունկցիաների տեսությունները և ավտոմորֆ ֆունկցիաների տարբեր ընդհանրացումներ:

§2 Ավտոմորֆ ֆունկցիաների կիրառությունը հավասարումներ լուծելիս

Ֆունկցիայի ավտոմորֆության, ինչպես նաև ավելի ընդհանուր՝ ֆունկցիայի ինվարիանտության հատկությունը կարելի է օգտագործել հավասարումների որոշակի տիպերի լուծման համար:

Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան X բազմության վրա ինվարիանտ է $T(x), S(x), \ldots$ ձևափոխությունների նկատմամբ, այսինքն $f(T(x))=f(x),\ f(S(x))=f(x), \ldots$ և $T(x), S(x), \ldots$ ձևափոխությունները կազմում են Γ խումբ: Այս դեպքում, ինչպես նշել էինք, նրանց $(T\circ S)(x)=T(S(x))$ համադրույթը և հակադարձ $T^{-1}(x)$ ֆունկցիան նույնպես պատկանում են Γ-ին: Ուստի

$$g(x)=T(h(x)),\quad T\in\Gamma,\quad g(x)\in X\quad (\text{կամ } h(x)\in X) \tag{7}$$

պայմաններից հետևում է

$$f\left(g(x)\right)=f\left(h(x)\right),\qquad g(x)\in X\quad (\text{կամ } h(x)\in X\text{ })\tag{8}$$

հավասարումը:

Այստեղից ստացվում է, որ եթե T ձևափոխությունը անցնում է Γ խմբի բոլոր ձևափոխությունների վրայով, ապա (7) հավասարման բոլոր լուծումները կհանդիսանան լուծում նաև (8) հավասարման համար: Սակայն հարկ է նշել, որ հնարավոր է ստացվեն (8) հավասարման ոչ բոլոր լուծումները:

Օրինակ 1. Լուծել հետևյալ հավասարումը.

$$\frac{\left((2x-6)-2x+7\right)^3}{4(x-3)^2(2x-7)^2}=\frac{\left(x^2-x+1\right)^3}{\left(x(x-1)\right)^2}\tag{9}$$

Նշանակելով հավասարման աջ մասը $f(x)$–ով, այն գրառենք

$$f(2x-6)=f(x)$$

տեսքով, այսինքն (8) տեսքով, որտեղ

$$g(x)=2x-6,\ \ h(x)=x\ \text{և}\ X=R\setminus\{0;1\}:$$

Դժվար չէ ցույց տալ, որ $f(x)$ ֆունկցիան ինվարիանտ է

$$T_0(x)=x,\quad T_1(x)=1-x,\quad T_2(x)=\frac{1}{x},\quad T_3(x)=\frac{1}{1-x},\quad T_4(x)=\frac{x-1}{x},\quad T_5(x)=\frac{x}{1-x}\tag{10}$$

ձևափոխությունների նկատմամբ, որոնք կազմում են ձևափոխությունների այսպես կոչված անհարմոնիկ խումբ: Ավելին՝ $f(x)$-ը, որպես բոլոր $x\neq 0$, $x\neq 1$ կետերում դիֆերենցելի ֆունկցիա, ավտոմորֆ է Γ-ի վրա $R\setminus\{0;1\}$ բազմության նկատմամբ: Այստեղից (2.7)-ի բոլոր լուծումները, որտեղ T –ի փոխարեն հարկ է վերցնել T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 ձևափոխությունները, այսինքն՝

$$2x-6=T_n(x),\ \ n=0,1,2,3,4,5$$

հավասարումները, կհանդիսանան նաև ելակետային (9) հավասարման լուծումներ: Այս հավասարումներում $T_n(x)$ –ի փոխարեն տեղադրելով իրենց արժեքները` կստանանք հետևյալ հավասարումները.

$$2x-6=x,\quad 2x-6=1-x,\quad 2x-6=\frac{1}{x},$$

$$2x-6=\frac{1}{1-x},\quad 2x-6=\frac{x-1}{x},\quad 2x-6=\frac{x}{1-x},$$

որոնցից էլ կստացվեն հետևյալ 10 արմատները.

$$6;\quad \frac{7}{3};\quad \frac{3\pm\sqrt{11}}{2};\quad \frac{4\pm\sqrt{2}}{2};\quad \frac{7\pm\sqrt{41}}{4};\quad \frac{9\pm\sqrt{33}}{4}: \qquad (11)$$

(9) հավասարումը այնպիսի լրացուցիչ պայմանի դեպքում, ինչպիսին է կոտորակների հայտարարների զրոյից տարբեր լինելը, համարժեք է 10-րդ աստիճանի հանրահաշվական հավասարման: Ուստի այն 10-ից ավելի իրական արմատներ ունենալ չի կարող, և դա էլ նշանակում է, որ (9) հավասարման համար (11)-ը արմատների ողջ հավաքածուն է:

Օրինակ 2. Լուծել հետևյալ հավասարումը.

$$\frac{1}{4-x^2}+\frac{x^2}{4x^2-1}=\frac{1}{4-(5+3x)^2}+\frac{(3x+5)^2}{(10x+6x)^2-1} \qquad (12)$$

Նշանակելով հավասարման աջ մասը $f(x)$–ով, այն գրառենք

$$f(x)=f(5+3x)$$

տեսքով, այսինքն` (8) տեսքով, որտեղ

$$g(x)=x,\qquad h(x)=5+3x \qquad \text{և} \qquad X=R\setminus\{\pm\frac{1}{2};\ \pm2\}:$$

Քանի որ $\qquad f(x)=f(-x)=f(\frac{1}{x})=f(-\frac{1}{x}),$

ապա դժվար չէ ցույց տալ, որ $f(x)$ ֆունկցիան ինվարիանտ է .

$$T_0(x) = x, \quad T_1(x) = -x,$$
$$T_2(x) = \frac{1}{x}, \quad T_3(x) = -\frac{1}{x}, \tag{13}$$

ձևափոխությունների նկատմամբ, որոնք կազմում են այսպես կոչված կոտորակագծային ձևափոխությունների խումբ:

Ավելին՝ $f(x)$-ը, որպես բոլոր $x \neq \pm\frac{1}{2}$, $x \neq \pm 2$ կետերում դիֆերենցելի ֆունկցիա, ավտոմորֆ է Γ-ի վրա $R \setminus \{\pm\frac{1}{2};\ \pm 2\}$ բազմության նկատմամբ: Այստեղից (7)-ի բոլոր լուծումները, որտեղ T –ի փոխարեն հարկ է վերցնել $T_0,\ T_1,\ T_2,\ T_3$ ձևափոխությունները, այսինքն՝

$$5 + 3x = T_n(x), \quad n = 0,1,2,3$$

հավասարումները, կհանդիսանան նաև ելակետային (12) հավասարման լուծումներ: Այս հավասարումներում $T_n(x)$ –ի փոխարեն տեղադրենք իրենց արժեքները, կստանանք.

$$5 + 3x = x,$$
$$5 + 3x = -x,$$
$$5 + 3x = \frac{1}{x},$$
$$5 + 3x = -\frac{1}{x}:$$

Լուծելով այս հավասարումները՝ կստանանք հետևյալ 6 արմատները.

$$-\frac{5}{4}; \quad -\frac{5}{2}; \qquad \frac{-3 \pm \sqrt{37}}{6}; \qquad \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{6}: \tag{14}$$

(12) հավասարումը, այնպիսի լրացուցիչ պայմանի դեպքում, ինչպիսին է կոտորակների հայտարարների զրոյից տարբեր լինելը, համարժեք է 6-րդ աստիճանի հանրահաշվական հավասարման: Ուստի այն 6-ից ավելի իրական արմատներ ունենալ չի կարող, և դա էլ նշանակում է, որ (14) հավասարման համար (14)-ը արմատների ողջ հավաքածուն է:

Քննարկենք ևս մի դեպք, երբ (8) հավասարման լուծումների բազմությունը համընկնում է (7) հավասարումների համախմբի լուծումների բազմության հետ:

Դիցուք X բազմությունն ինվարիանտ է Γ խմբի ձևափոխությունների նկատմամբ, և $X_0 \subset X$ ենթաբազմությունն այնպիսին է, որ իրարից տարբեր $T \in \Gamma$ և $S \in \Gamma$ ձևափոխությունների համար $T(X_0)$-ն և $S(X_0)$-ն միմյանց հետ ընդհանուր կետեր չունեցող ենթաբազմություններ են, իսկ բոլոր $T(X_0), T \in \Gamma$ ենթաբազմությունների միավորումը համընկնում է X-ի հետ: Այդպիսի X_0 ենթաբազմությունը կոչվում է Γ խմբի ֆունդամենտալ բազմություն X բազմության վրա: Յուրաքանչյուր խմբի համար իր X_0 ֆունդամենտալ բազմությունը կարելի է ընտրել տարբեր եղանակներով:

Օրինակ՝ $T_n(x) = x + n\omega_0,\ n \in Z$ գծային ձևափոխությունների միապարբերական խմբի համար, որպես X_0 կարելի է ընտրել կամայական ω_0 երկարության $[a; a+\omega_0)$ միջակայքը, (6) խմբի ձափոխությունների համար $(0;1]$ կիսահատվածը, իսկ անհարմոնիկ առնչությունների (10) խմբի համար՝ $\left(0;\frac{1}{2}\right]$ կիսահատվածը, կամ $[2;+\infty)$ ճառագայթը:

Քանի որ յուրաքանչյուր ձևափոխությունների խումբ պարունակում է $T(x) = x$ նույնական ձևափոխությունը, ապա $T(X_0)$ ենթաբազմություններից մեկը համընկնում է X_0-ի հետ: Այդ դեպքում (5) պայմաններից հետևում է, որ $T(X_0),\ T \in \Gamma$ բազմության վրա, ավտոմորֆ կամ ինվարիանտ $f(x)$ ֆունկցիան ունի նույն հատկությունները, ինչ X_0 բազմության վրա, այսինքն՝ $f(x)$–ը բավական է ուսումնասիրել X_0–ի վրա: Մասնավորաբար, եթե ավտոմորֆ կամ ինվարիանտ $f(x)$ ֆունկցիան ֆունդամենտալ X_0 բազմության վրա իր յուրաքանչյուր արժեքը ընդունում է միայն մեկ անգամ, ապա $T(X_0), T \in \Gamma$ բազմության վրա նա իր յուրաքանչյուր արժեք կընդունի միայն մեկ անգամ: Հետևաբար (8) հավասարման լուծումների բազմությունը կհամընկնի (7) հավասարումների լուծումների բազմության հետ: Դա տեղի ունի, օրինակ, երբ X_0 բազմության վրա $f(x)$-ը խիստ մոնոտոն ֆունկցիա է:

Օրինակ 3: Լուծել հետևյալ հավասարումը.

$$\ln\{2x\}-ctg\,\pi(2x-1)=\ln\{x^2\}+tg\,\pi\left(x^2+\frac{1}{2}\right), \tag{15}$$

որտեղ $\{...\}$-նշանակում է թվի կոտորակային մաս:

Հաշվի առնելով, որ

$$\{2x\}=\{2x-1\},\quad tg\,\pi\left(x^2+\frac{1}{2}\right)=-ctg\,\pi x^2,$$

(15) հավասարումը կգրառենք հետևյալ տեսքով.

$$\ln\{2x-1\}-ctg\,\pi(2x-1)=\ln\{x^2\}-ctg\,\pi x^2 \quad , \tag{16}$$

որտեղ, կատարելով

$$f(x)=\ln\{x\}-ctg\,\pi x$$

նշանակումը, կստանանք՝

$$f(2x-1)=f(x^2),$$

այսինքն (8) հավասարումը, որտեղ

$$g(x)=2x-1,\ h(x)=x^2,$$

իսկ $X=R\setminus Z$ –ը $f(x)$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթն է: Այդ ֆունկցիան պարբերական է 1 հիմնական պարբերությամբ, այսինքն՝ ինվարիանտ է $T_n(x)=x+n$, $n\in Z$ ձևափոխությունների նկատմամբ, և $X_0=(0;1)$ ֆունդամենտալ բազմության վրա ունի

$$f'(x)=(\ln x-ctg\,\pi x)'=\frac{1}{x}+\frac{\pi}{\sin^2\pi x}>0$$

ածանցյալը, ուստի խիստ մոնոտոն աճող է, այսինքն X_0 –ում իր յուրաքանչյուր արժեքը ընդունում է միայն մեկ անգամ: Այսպիսով` (16) հավասարումը համարժեք է հետևյալ հավասարումների համախմբին.

$$2x-1=T_n\left(x^2\right),\ \ n\in Z,\ \ (2x-1)\in X \ \ \Leftrightarrow\ \ 2x\text{-}1=x^2+n,\ \ \ n\in Z,\ \ (2x-1)\notin Z \ \ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ \ x=1\pm\sqrt{n},\ \ n\in Z,\ \ n\geq 0,\ \ \ 2\sqrt{n}\notin Z,$$

որտեղից կգտնենք ելակետային հավասարման բոլոր արմատները, այն է` $x=1\pm\sqrt{n}$, որտեղ n-ը կամայական 1-ից մեծ բնական թիվ է, որը տարբեր է $2^2, 3^2, \ldots$ թվերից:

Օրինակ 4: Լուծել հետևյալ հավասարումը.

$$9\cos x+2^{\cos 2x}=2^{\cos\left(\pi+2x^2\right)}-9\sin x^2 : \tag{17}$$

Հաշվի առնելով, որ

$$-9\sin x^2=9\cos\left(\frac{\pi}{2}+x^2\right),$$

(17) հավասարումը կգրառենք հետևյալ տեսքով.

$$9\cos x+2^{\cos 2x}=2^{\cos\left(\pi+2x^2\right)}+9\cos\left(\frac{\pi}{2}+x^2\right), \tag{18}$$

որտեղ, կատարելով

$$f(x)=9\cos x+2^{\cos 2x}$$

նշանակումը, կստանանք՝

$$f(x) = f(\frac{\pi}{2} + x^2),$$

այսինքն (8) հավասարումը, որտեղ

$$g(x) = x, \ h(x) = \frac{\pi}{2} + x^2,$$

իսկ $X = R$–ը $f(x)$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթն է: Այդ ֆունկցիան պարբերական է 2π հիմնական պարբերությամբ, այսինքն՝ ինվարիանտ է $T_n(x) = \pm x + 2\pi n$, $n \in Z$ ձևափոխությունների նկատմամբ, և $X_0 = [0;\pi)$ ֆունդամենտալ բազմության վրա ունի

$$f'(x) = -(\ln 2 \sin x 2^{\cos x} + 9 \sin x) < 0$$

ածանցյալը, ուստի խիստ մոնոտոն նվազող է, այսինքն X_0–ում իր յուրաքանչյուր արժեքը ընդունում է միայն մեկ անգամ: Այսպիսով, (18) հավասարումը համարժեք է հետևյալ հավասարումների համախմբին

$$\frac{\pi}{2} + x^2 = T_n(x), \quad n \in Z,$$

$$2x^2 \pm 2x - \pi(4n - 1), \quad n \in Z,$$

որտեղից կգտնենք ելակետային հավասարման բոլոր արմատները, այն է՝

$$x_{1,2,3,4} = \frac{\pm 1 \pm \sqrt{1 + 2\pi(4n - 1)}}{2},$$ որտեղ $n = 1, 2, \ldots$:

Քննարկենք պարբերական ֆունկցիայի ընդհանրացման մի այլ դեպք:

Սահմանում: $D(F)$ -ի վրա որոշված $F(x,y)$ ֆունկցիան կանվանենք պարբերական (անտիպարբերական) ըստ y փոփոխականի, եթե յուրաքանչյուր թույլատրելի ֆիքսված x -ի համար կգտնվի դրական T (ընդհանրապես x -ից կախված) թիվ այնպիսին, որ եթե $(x,y)\in D(F)$, ապա $(x,y\pm T)\in D(F)$ և $F(x,y+T)=F(x,y)$ ($F(x,y+T)=-F(x,y)$), այսինքն՝ յուրաքանչյուր թույլատրելի ֆիքսված x -ի համար $f(y)=F(x,y)$ ֆունկցիան հանդիսանում է պարբերական (անտիպարբերական): T թիվը $F(x,y)$ -ի համար կոչվում է պարբերություն (անտիպարբերություն) ըստ y -ի:

Այսպես օրինակ՝ $\sin((x^2+1)y)$, $\{x^3y\}$ ֆունկցիաները կլինեն պարբերական ըստ y -ի:

Դիցուք $F(x,y)$ ֆունկցիան պարբերական է ըստ y փոփոխականի: Եթե յուրաքանչյուր թույլատրելի x -ի համար գոյություն ունի $f(y)=F(x,y)$ ֆունկցիայի հիմնական պարբերություն, որը հավասար է $T(x)$ -ի, ապա $F(x,y)$ ֆունկցիան կանվանենք պարբերական ըստ y -ի՝ հիմնական $T(x)$ պարբերությամբ:

$\sin((x^2+1)y)$ ֆունկցիան ըստ y -ի կլինի պարբերական $T(x)=\dfrac{2\pi}{x^2+1}$ հիմնական պարբերությամբ, իսկ $\{x^3y\}$ ֆունկցիան չունի հիմնական պարբերություն ($x=0$ արժեքի դեպքում այն վերածվում է հաստատունի, այսինքն՝ չունի փոքրագույն դրական պարբերություն):

Ակնհայտ է հետևյալ պնդումը:

Եթե $F(x,y)$ ֆունկցիան ըստ y փոփոխականի հանդիսանում է $T(x)$ հիմնական պարբերությամբ պարբերական ֆունկցիա, ապա

$$F(x,g(x))=F(x,h(x)) \tag{19}$$

տեսքի յուրաքանչյուր հավասարում իր թույլատրելի արժեքների բազմության վրա կհանդիսանա

$$g(x) = h(x) + nT(x) \tag{20}$$

տեսքի հավասարումների համախմբի հետևանք, որտեղ $n \in Z$:

Ենթադրենք $F(x,y)$ ֆունկցիան պարբերական է ըստ y փոփոխականի և ունի $T(x)$ հիմնական պարբերությունը և, բացի այդ, յուրաքանչյուր թույլատրելի x-ին համապատասխան կգտնվի $a(x)$ թիվ այնպիսին, որ կա՛մ $(a(x);a(x)+T(x)]$ կա՛մ $[a(x);a(x)+T(x))$ միջակայքի վրա $F(x,y)$ ֆունկցիան փոխմիարժեք է ըստ y-ի: Դիցուք x_0-ն (19) հավասարման արմատն է: Այդ դեպքում $f(y) = F(x_0, y)$ ֆունկցիան պարբերական է և ունի $T(x_0)$ հիմնական պարբերությունը՝ հանդիսանալով փոխմիարժեք կա՛մ $(a(x_0);a(x_0)+T(x_0)]$ կա՛մ $[a(x_0);a(x_0)+T(x_0))$ միջակայքի վրա, և x_0-ն հանդիսանում է $F(g(x)) = F(h(x))$ հավասարման լուծում:

Իսկ սա նշանակում է, որ [2] x_0-ն կհանդիսանա լուծում $g(x) = h(x) + nT(x_0)$ հավասարումների համախմբի համար, որտեղ $n \in Z$ և հետևաբար լուծում $g(x) = h(x) + nT(x)$ հավասարումների ընտանիքի համար:

Պնդում 1: Դիցուք $F(x,y)$ ֆունկցիան ըստ y փոփոխականի հանդիսանում է $T(x)$ հիմնական պարբերությամբ պարբերական ֆունկցիա և յուրաքանչյուր թույլատրելի x-ի համար կգտնվի $a(x)$ թիվն այնպիսին, որ կա՛մ $(a(x_0);a(x_0)+T(x_0)]$ կա՛մ $[a(x);a(x)+T(x))$ միջակայքի վրա $F(x,y)$ ֆունկցիան փոխմիարժեք է ըստ y փոփոխականի: Այդ դեպքում (19) հավասարման ԹԱԲ-ի վրա (19) հավասարումը և (20) հավասարումների ընտանիքը կլինեն հավասարազոր:

Պնդում 2: Դիցուք $F(x,y)$ ֆունկցիան հանդիսանում է զույգ և պարբերական ֆունկցիա ըստ y փոփոխականի՝ $T(x)$ հիմնական պարբերությամբ: Եթե $F(x,y)$-ը ըստ y-ի փոխմիարժեք է կա՛մ $[0,T(x)/2)$ կա՛մ $(0,T(x)/2]$ միջակայքի վրա, ապա (19) հավասարումը իր ԹԱԲ-ի վրա համարժեք է $g(x) = \pm h(x) + nT(x)$ հավասարումների ընտանիքին, որտեղ $n \in Z$:

Օրինակ 5: Լուծել $\sin^2 5x + \cos^2 5x = |\cos 5x / \cos 2x|$ հավասարումը:

Լուծում: Այս հավասարման ԹԱԲ-ն է $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$ որտեղ $k \in Z$:

Պարզ է, որ $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}$ թվերը, որտեղ $k \in Z$, հավասարման լուծումներ չեն հանդիսանա: Այդ պատճառով այս հավասարումը համարժեք կլինի հետևյալ հավասարմանը

$$\frac{\sin^2 2x + \cos^2 2x}{|\cos 2x|} = \frac{\sin^2 5x + \cos^2 2x}{|\cos 5x|}, \tag{21}$$

որն ունի (19) տեսքը, ընդ որում

$$F(x, y) = \frac{\sin^2 y + \cos^2 2x}{|\cos y|},$$

$$g(x) = 2x, \qquad h(x) = 5x:$$

$F(x, y)$ ֆունկցիան հանդիսանում է զույգ և $T(x) = \pi$ հիմնական պարբերությամբ պարբերական ֆունկցիա ըստ y փոփոխականի: Բացի այդ, նա ըստ y փոփոխականի $[0, \pi/2)$ միջակայքում խիստ աճում է: Այդ պատճառով (21) հավասարումը համարժեք կլինի $\pm 5x = 2x + n\pi$ հավասարումների ընտանիքին, որտեղ $n \in Z$: Այդ համախմբի լուծումները կլինեն

$$x = \frac{\pi n}{3}, \quad x = \frac{\pi n}{7} \text{ որտեղ } n \in Z:$$

Քանի որ այդ x-ը մտնում են ելակետային հավասարման ԹԱԲ-ի մեջ, հենց նրանք էլ կհանդիսանան լուծումները:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Գևորգյան Գ.Գ., Սահակյան Ա.Ա. Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր 10: Բնագիտամաթեմատիկական հոսքի համար: Երևան, Տիգրան Մեծ 2009
2. Чучаев И.И., Мещерякова С.И. Уравнения вида $f(g(x)) = f(h(x))$ и нестандартные методы решения. // Математика в школе. 1995. N3. С. 48-54.
3. Чучаев И.И. Нестандартные (функциональные) приемы решения уравнений: Учеб. пособие. Саранск: Изд-во Мордов. ун-та, 2001. 168 с.
4. Сильвестров В.В. Автоморфные функции – обобщение периодических функций. // Соросовский образовательный журнал. Т.6., N3., 2000. С. 124-127.
5. Бейтмен Г. Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М. Наука, 1967. Т. 3. Эллиптические и автоморфные функции Ламе и Матье.
6. Форд Л.Р. Автоморфные функции. М.: Л.: ОНТИ, 1936. 340 С.