ՎԵՐԱՊԱՏՐԱՍՏՈՂ ԿԱԶՄԱԿԵՐՊՈՒԹՅՈՒՆ
ՇՈՒՄ Գիտակրթական կենտրոն ՀԿ

ԱՎԱՐՏԱԿԱՆ ՀԵՏԱԶՈՏԱԿԱՆ ԱՇԽԱՏԱՆՔ

ՀԵՏԱԶՈՏՈՒԹՅԱՆ ԹԵՄԱՆ՝ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԱՊԱՑՈՒՅՑՈՒՄՆԵՐԻ ՈՒՍՈՒՑՄԱՆ ՄԵԹՈԴՆԵՐԸ ԴՊՐՈՑԱԿԱՆ ԴԱՍԸՆԹԱՑՈՒՄ

Հետազոտող ուսուցիչ՝ ՌՈՒԶԱՆՆԱ ՍԱՐԳՍՅԱՆ
անուն, ազգանուն

ԲԱՆԴԻՎԱՆԻ Հ. ՍՈՒՔԻԱՍՅԱՆԻ ԱՆՎԱՆ ՄԻՋՆԱԿԱՐԳ ԴՊՐՈՑ

Մենթոր ուսուցիչ՝ ԱՍԼԱՆՅԱՆ ՆԱԻՐԱ
անուն, ազգանուն

ԳՅՈՒՄՐԻ- 2022

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Թեմայի արդիականությունը: Ժամանակակից կրթական հայեցակարգերում ավելի է կարևորվում սովորողների բարձրակարգ մտածողության զարգացման խնդիրը: Աշխարհում տեղի ունեցող արագընթաց զարգացումները իրենց անմիջական ներգործությունն են ունենում կրթական համակարգերի վրա՝ առաջադրելով գիտելիքահեն տնտեսության և տեղեկատվական հասարակության պայմաններում գործող և ապրող մարդու ձևավորման նոր պահանջ: Եվ դա իր հերթին առաջ է բերում կրթության բովանդակության վերանայման ու արդիականացման խնդիր:

Հանրահայտ է, որ հանրակրթության առանցքային նպատակներից մեկը աշակերտին մտածել սովորեցնելն է: Առանձնացվում են այդ նպատակին հասնելու երկու հիմնական ուղիներ. մտածողության մասին գիտության՝ տրամաբանության տարրերի իմացությունը և մաթեմատիկայի ուսումնասիրությունը, ինչը բոլոր ժամանակներում դիտվել է որպես սովորողների տրամաբանական մտածողության զարգացման լավագույն միջոց: Սակայն այստեղ առաջանում են հետևյալ հարցադրումները. արդյո՞ք պետք է տրամաբանության հիմունքները ներառվեն հանրակրթական ծրագրերում, թե՞ միայն մաթեմատիկայի ուսուցումը բավարար է մտածողության ձևավորման խնդրի լուծման համար: Իսկ միգուցե պետք է համադրե՞լ այս մոտեցումները և տրամաբանության տարրերը ներառել մաթեմատիկայի դասընթացու՞մ: Տարբեր ժամանակներում տարբեր շեշտադրումներ են կատարվել ու տարբեր մոտեցումներ են ցուցաբերվել այդ հարցերի լուծման նկատմամբ: Դրանք համակողմանիորեն ուսումնասիրված են Ի. Հարությունեանցի, Լ.Ն. Լանդայի, Ջ. Բրուների, Լ. Քերոլի, Ջ. Պոյայի, Գ. Շեդրովիցկու, Հ. Ֆրոյդենտալի, Պ.Պ. Բլոնսկու, Վ.Մ. Բրադիսի, Ա.Ն. Կոլմոգորովի, Վ. Բոլտյանսկու, Ռ.Ս. Չերկասովի, Ա.Ա. Ստոլյարի, Յու.Ա. Պետրովի, Վ.Ի. Ռիժիկի, Գ.Ի. Սարանցևի, Ի.Լ. Տիմոֆեևայի, Գ.Ա. Բրուտյանի, Ս.Հ. Ավետիսյանի, Հ.Ս. Միքայելյանի, Ս.Է. Հակոբյանի, Է.Ի. Այվազյանի և այլոց կողմից:

Սակայն գիտամանկավարժական գրականության մեջ միասնական տեսակետ չի ձևավորվել: Ավելին, հաճախ արտահայտվում են միմյանց հակադիր, իրարամերժ կարծիքներ: Մասնավորապես ԽՍՀՄ-ում, որի կրթական ավանդույթները պահպանվում էին նաև մեր երկրում, 50-60-ական թվականներին գերիշխում և իրականացվում էր այն տեսակետը, որ անհրաժեշտ է միջնակարգ դպրոցում դասավանդել առանձին «Տրամաբանություն» առարկա: Սակայն հետագայում, գաղափարական և քաղաքական նկատառումներից ելնելով, դադարեցվել է այդ առարկայի դասավանդումը, և առաջին պլան է մղվել այն տեսակետը, թե տրամաբանական մտածողության զարգացման համար պետք է բավարարվել մաթեմատիկայի ընձեռած հնարավորություններով,իսկ նման հնարավորություններ ստեղծեցին Ա.Ն. Կոլմոգորովի գլխավորությամբ ստեղծված դասագրքերը:

Հավանաբար, այդ դասագրքերի բարդությունն էր հիմնական պատճառը, որ հետագա տարիների ընթացքում աստիճանաբար նվազեց տրամաբանության բաղադրիչի դերը հանրակրթական ծրագրերում: Մասնավորապես 80-ական թվականներին ստեղծված մաթեմատիկայի, հատկապես հանրահաշվի ծրագրերի ու դասագրքերի վերլուծությունը ցույց է տալիս, որ գերիշխող են դարձել գիտելիքի հաղորդման և յուրացման վարժանքային սխեմաները, ինչի հետևանքով շոշափելի նահանջ է ունեցել սովորողների տրամաբանական մտածողության զարգացման մակարդակը: Դրա վերաբերյալ բազմաթիվ արձագանքներ են առկա 1985 թվականից հետո հրատարակված գիտամանկավարժական գրականության մեջ: Հնչում էին տեսակետներ այն մասին, որ առանց տրամաբանական գիտելիքների ուսուցման, անհնար է ապահովել սովորողների մտավոր կարողությունների զարգացումը:

Ապացուցումը և նրա եղանակները մշտապես եղել են գրեթե բոլոր տրամաբանների, բազմաթիվ մաթեմատիկոսների և մեթոդիստների ուշադրության կենտրոնում, որովհետև այդ տրամաբանական գործողությունը հսկայական պրակտիկ նշանակություն ունի շրջակա աշխարհի ճանաչման գործընթացում:

Արիստոտելը (384–322 մ. թ. ա.) ապացուցելու ունակությունը համարում էր մարդու ամենաբնութագրիչ հատկանիշը: «…Չի կարող ամոթալի չլինել ինքն իրեն խոսքով (մտքով -Է. Ա.) օգնելու անկարողությունը, - գրում է Արիստոտելը իր «Ճարտասանությունում»,- քանի որ մարդկային բնույթին ավելի հատկանշանական է ավելի շատ խոսքից, քան մարմնից օգտվելը»[1]:

<u>Հետազոտության նպատակը</u> և <u>խնդիրները:</u> Հետազոտության հիմնական նպատակն է ներկայացնել և ուսումնասիրել հանրակրթական դպրոցներում մաթեմատիկական ապացուցումների ուսուցման մեթոդները: Այդ նպատակների իրականացումը

[1] Кондаков М. И., Логический словарь-справочник. 2-е изд., испр. и доп, М., “Наука”, 1975, 158 с.

ենթադրում է կոնկրետ խնդիրների լուծում, որոնք էլ ապահովում են աշխատանքի տրամաբանությունն ու կառուցվածքը:

Առաջադրված նպատակին հասնելու համար աշխատանքում առաջադրվել են հետևյալ *խնդիրները*՝

- Վերլուծել հիմնախնդրի վերաբերյալ մասնագիտական գրականություն:
- Պարզաբանել մաթեմատիկական ապացուցումների դերը դասաժամերին:
- Լուսաբանել ապացուցումների ուսուցման գործընթացը և յուրացումը:

Հետազոտության օբյեկտը և առարկան: Հետազոտության օբյեկտ են հանդիսանում աշակերտները, իսկ առարկա է հանդիսանում դասարանը, որտեղ կատարվում է դասապրոցես:

Գրականության ակնարկ: Գիտական և մեթոդական գրականության հանգամանալի վերլուծությունը ցույց է տալիս, որ մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում տրամաբանության տարրերի ներառման վերաբերյալ Ա.Ա. Ստոլյարի, Յու.Ա. Պետրովի, Վ.Ի. Ռիժիկի, Գ.Ի. Սարանցևի, Ի.Լ. Տիմոֆեևայի և այլոց կողմից կատարված հետազոտությունները կրում են զուտ վերլուծական բնույթ և չեն ապահովում ընդհանուր հարցադրումների մակարդակից անցում առարկայական բովանդակային դաշտ, ուստի և գրեթե չեն արծարծում ուսուցման մեթոդիկայի մշակման հարցեր: Այդպիսի մշակումներ արված են Հ.Ս. Միքայելյանի աշխատանքներում, սակայն այդ մշակումները վերաբերում են միայն միջին դպրոցի հանրահաշվի դասընթացին: Մինչդեռ «Մաթեմատիկա» ուսումնական բնագավառում ներառվում են տարբեր առարկաներ, որոնք դասավանդում են կրթական բոլոր աստիճաններում և, թեև մեր կողմից կատարված ուսումնասիրությունները ինչ-որ չափով ամբողջացնում են կատարված մոտեցումները, բայց, այնուամենայնիվ, հարցի համակարգված դիտարկումը մնում է բաց:

Աշխատանքի կառուցվածքը և ծավալը: Աշխատանքը բաղկացած է բովանդակությունից, ներածությունից, երկու գլուխներից, եզրակացություններ բաժնից, օգտագործված գրականության ցանկից:

ԳԼՈՒԽ 1. «ԱՊԱՑՈՒՑՈՒՄ ԵՎ «ԱՊԱՑՈՒՑՄԱՆ ՄԵԹՈԴ» ՀԱՍԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆԸ

Տրամաբանությունն ինչ-որ ընդհանուր բան ունի մտածողության հետ. երբ մենք մտածողության ընթացքը դարձնում ենք մեր իսկ մտածողության առարկան, ապա այն անվանում ենք տրամաբանություն: (Գ. Ֆրոյդենտալ)

Հայտնի մաթեմատիկոս Ռ. Դեկարտն ասում էր. «Ես մտածում եմ, ուրեմն ես գոյություն ունեմ»: Ըստ հոգեբան Օ. Կ. Տիխոմիրովի՝ «այս բանաձևը մարդու հոգեկան կյանքում առաջին պլան է մղում մտածողությունը՝ համարելով այն մարդու գոյության հայտանիշ: Ոչինչ, ըստ Դեկարտի, այդպես համոզիչ կերպով չի կարող ապացուցել մարդու գոյությունը, ինչպես մտածողության փաստը (ակտը)»[2]: Հետևաբար ցանկացած մարդու՝ որպես բանական էակի դրսևորման լավագույն միջոցը սեփական մտածողության կարգավորումն է:

Հոգեբանության մեջ առանձնացվում են մտածողության ինտուիտիվ և տրամաբանական տեսակները: Կան, իհարկե, նաև այլ «դասակարգումներ», օրինակ՝ տեսողաշարժողական մտածողություն, պատկերային մտածողություն և խոսքատրամաբանական (լեզվատրամաբանական) մտածողություն: Առաջին տրոհման հիմքում դրված է պրոցեսի ընթացքի տևողության՝ ժամանակային հայտանիշը, որը բնութագրվում է ընթացքի մակարդակով (գիտակցված կամ չգիտակցված) և կառուցվածքով (պրոցեսի տրոհումը փուլերի):

Տրամաբանական մտածողությունը բացված է ըստ ժամանակի, ունի հստակորեն ընդգծված փուլեր և որոշակիորեն ներկայացված է մտածող մարդու գիտակցությունում: Ինտուիտիվ մտածողությունը բնութագրվում է արագ (շատ արագ) ընթացքով, հստակ (ընդգծված) փուլերի բացակայությամբ, նվազագույն գիտակցվածությամբ:

Տրամաբանական մտածողության ձևավորման կարևորագույն բաղադրիչը սովորողների ապացուցողական ունակությունների ձևավորումն է:

Գիտամեթոդական գրականությունում տարբերվում են ոչ ձևական (բովանդակային) և ձևական ապացուցումներ, որոնք համապատասխանաբար կիրառ վում են ոչ ձևական (կիսաձևական) և ձևական մաթեմատիկական տեսություններում:

---

[2] Тихомиров О. К., Психология мышления, М., "Изд-во МГУ", 1984, 8 с.

Ձևական իմաստով ապացուցել A բանաձևը (թեորեմը) նշանակում է կառուցել բանաձևերի A A An , , . . . , 1 2 այնպիսի հաջորդականություն, որտեղ An - ը A- ն է, իսկ յուրաքանչյուր i-ի (1≤ i ≤ n) համար A i – ն կա՛մ տրված ձևական տեսության աքսիոմ է, կա՛մ էլ որոշ նախորդ բանաձևերի անմիջական հետևանքն է՝ ըստ որևէ արտածման կանոնի:

Բովանդակային (ոչ ձևական) իմաստով «ապացուցումը տրամաբանական գործողություն է, որի ընթացքում ինչ-որ մտքի ճշմարտություն հիմնավորվում է այլ մտքերի օգնությամբ: Այս տրամաբանական գործողությունն ունի հսկայական պրակտիկ նշանակություն շրջակա աշխարհի ճանաչողության ընթացք: Բոլոր գիտություններում էլ ապացուցելու հարկ կա: Ընդ որում՝ այն մտքերի բովանդակությունը, որոնց ճշմարիտ լինելը պահանջվում է հիմնավորել, յուրաքանչյուր գիտությունում տարբեր է: Տրամաբանությունն էլ հենց գտնում է այն ընդհանուրը, որը բնութագրական է բոլոր այդ ապացուցումների համար՝ անկախ այս կամ այն ապացուցման կոնկրետ բովանդակությունից»:

Այսուհետև «ապացուցում» հասկացությունը տեքստում մեծ մասամբ օգտագործվելու է ոչ ձևական, ավելի ճիշտ՝ «դպրոցական մաթեմատիկական պնդումների ապացուցում» իմաստով:

Դպրոցական մաթեմատիկայի դասընթացը ներառում է բովանդակային շարադրանքով որոշ մաթեմատիկական տեսությունների հիմունքներ կամ տարրեր. թվաբանություն, հանրահաշիվ, մաթեմատիկական անալիզ, տարրական (էվկլիդյան) երկրաչափություն, անալիտիկ երկրաչափություն, եռանկյունաչափություն, միացությունների տեսություն և այլն: Այդ պատճառով էլ դպրոցական մաթեմատիկայում ապացուցումները բովանդակային դատողություններով կառուցված ոչ ձևական ապացուցումներ են:

Տրամաբանությունը յուրաքանչյուր ոչ ձևական ապացուցումում առանձնացնում է նրա երեք կառուցվածքային տարրերը՝ թեզիս, հիմք (փաստարկ, արգումենտ) և կշռադատություն (փաստարկում, արգումենտացիա, հիմնավորում, ցուցադրում)[3]:

Թեզիս (հունարեն՝ thesis - դրույթ, պնդում) տրամաբանությունում կոչվում է այն պնդումը, որի ճշմարիտ լինելը պահանջվում է ապացուցել, հաստատել:

---

[3] Մակարիչև Յու. Ն. և ուրիշներ, Հանրահաշիվ 6, 7, 8, Ե., «Լույս», (երեք գրքով), 1983:

Հիմք կամ փաստարկ կոչվում է այն առաջադրությունը (պնդումը), որի ճշմարիտ լինելն արդեն նախկինում ստուգված կամ ապացուցված է, և որը կարող է օգտագործվել թեզիսի ճշմարիտ կամ կեղծ լինելը հիմնավորելիս:

Կշռադատությունը կամ փաստարկումը այն եղանակն է, որի միջոցով թեզիսի ճշմարիտ լինելը բխում է ապացուցման հիմքերից, փաստարկներից, կամ՝ այն տրամաբանական դատողությունն է, որի ընթացքում փաստարկներից ար տածվում է թեզիսի ճշմարիտ (կեղծ) լինելը, կամ տրամաբանական կանոնների այն հավաքածուն է, որոնք օգտագործվել են ապացուցման մեջ: Ինչպես դպրոցական երկրաչափության, այնպես էլ հանրահաշվի դասընթացների ուսումնասիրման ընթացքում տրամաբանական արտածման կանոնները սովորաբար չեն դառնում հատուկ ուսումնասիրության առարկա. նրանց ձևավորումը լավագույն դեպքում կատարվում է ինտուիտիվ մակարդակում:

«Մաթեմատիկական ապացուցում» հասկացության հետ մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում իրար հետ սերտորեն կապված են նրա հետևյալ երեք բաղադրիչները՝ ապացուցվելիք պնդումը (թեորեմը կամ խնդիրը), ապացուցման մեթոդը և նրա բովանդակային բաղադրիչը (հիմքերի՝ փաստարկների հավաքածուն):

«Փիլիսոփայական հանրագիտարանային բառարանում» մեթոդը սահմանվում է որպես «իրականության պրակտիկ և տեսականորեն յուրացնելու համար անհրաժեշտ հնարքների և գործողությունների հավաքածու», իսկ ապացուցումը՝ «ճշմարտության հաստատման ընթացք (մեթոդ), դատողության ճշմարտացիության հիմնավորում»: Այդ իսկ պատճառով էլ, որպես աշխատանքային սահմանում, այսուհետև մաթեմատիկական պնդման ապացուցման մեթոդ ասելով, կհասկանանք մաթեմատիկական պնդման ճշմարտացիությունը հաստատելու համար անհրաժեշտ հաջորդական, տրամաբանական գործողությունների (մտահանգումների) վերջավոր հավաքածու:

«Ապացուցում կատարելու կարողությունը» կամ որ նույնն է՝ «ապացուցելու կարողությունը» տարրալուծվում է կարողությունների (ունակությունների) մի շղթայի, որոնցից յուրաքանչյուրին հետագայում կանվանենք տարրական ապացուցողական ունակություններ: Ընդհանուր՝ «ապացուցելու ունակության» տրոհումը տարրական՝ այլևս չտրոհվող, ատոմական ունակությունների (ապացուցման քայլերի) լիովին համապատասխանում է ապացուցելու ունակության՝ որպես տրամաբանական մտածողության հնարքի հոգեբանական մեկնաբանությանը: Ինչպես նշում է Ն. Ֆ.

Տալիզինան, հոգեբանությունում ցանկացած հնարք (մտավոր գործողություն) ընդունված է տրոհել այդ գործունեության որոշակի «միավորների»՝ գործողությունների: Մեր դեպքում որպես նման «միավորներ» (աղյուսիկներ) հանդես են գալիս ապացուցողական տարրական ունակությունները:

Այսուհետև մենք երկու իմաստով էլ կիրառելու ենք «ապացուցողական ունակություն» հասկացությունը: Ընդ որում՝ ամեն անգամ միայն ենթատեքստից պարզ կլինի, թե որ իմաստով է այն օգտագործված՝ լա՞յն, թե՞ նեղ:

Ապացուցման մեթոդների դասակարգմամբ զբաղվել են շատ տրամաբաններ՝ Արիստոտել, Մ. Ի. Կորինսկի, Վ. Ֆ. Ասմուս, Գ. Ա. Բրուտյան և ուրիշներ: Տրամաբանությունում ընդունված է ապացուցման մեթոդները դասակարգել ըստ տարբեր հատկանիշների՝ «ըստ տանելու եղանակի», «ըստ մտահանգման ձևի, որով եզրափակվում է ապացուցումը», «ըստ բովանդակության ճշմարտացիության և հիմքերի ու թեզիսի միջև տրամաբանական կապի ճշտության» և այլն: Ըստ ապացուցումը տանելու եղանակի՝ զանազանվում են ուղիղ (ուղղակի) և անուղղակի, ըստ եզրափակիչ մտահանգման ձևի՝ ինդուկտիվ և դեդուկտիվ ապացուցումներ: Հանդիպում են նաև ըստ էության և գենետիկ ապացուցումներ[4]:

Տրամաբանությունում ընդունված այս դասակարգումներն իրենց արտացոլումն են գտնում նաև գիտամեթոդական գրականության մեջ: Օրինակ՝ մի շարք մեթոդիստներ իրենց աշխատանքներում առանձնացնում են նաև անալիտիկ և սինթետիկ ապացուցումներ:

Սույն հետազոտության համար հիմք է ծառայում ապացուցման մեթոդների դասակարգումն ըստ տանելու եղանակի: Ապացույցը, որը հիմնված է ինչ-որ անտարակուսելի սկզբի վրա, որից անմիջականորեն արտածվում է թեզիսի ճշմարիտ լինելը, կոչվում է ուղիղ ապացույց: Ապացույցը կոչվում է անուղղակի (ոչ ուղիղ), եթե թեզիսի ճշմարիտ լինելը հիմնավորվում է թեզիսին հակադիր պնդման ճշմարտացիության հերքման միջոցով:

Ապացուցման մեթոդների այս դասակարգման մեջ նման հիմքի ընդունումը արդարացված է նրանով, որ ինչպես երկրաչափության, այնպես էլ հանրահաշվի գործող դասընթացներում ուսումնական նյութի դեդուկտիվ շարադրման պայմաններում

[4] Այվազյան Է. Ի., «Մաթեմատիկական ապացուցումների ուսուցման մեթոդաբանական հիմունքները», Ե., 2013, 306 էջ:

ապացուցումը տանելու եղանակը ձեռք է բերում առանձնահատուկ կարևորություն: Օրինակ՝ լրիվ ինդուկցիայի մեթոդով թեորեմների ապացուցումներում լրիվ ինդուկցիան միայն սկսում է և ավարտում ապացույցը, իսկ առանց յուրաքանչյուր մասնավոր դեպքի՝ ենթաթեորեմների ապացուցման եղանակները ընկալելու, անհնար է համարել, որ ապացույցն ընկալված է ամբողջությամբ: Գիտամեթոդական գրականության վերլուծությունը ցույց է տալիս, որ հետազոտողները որպես ուղիղ ապացուցման տարատեսակներ նշում են համադրման և վերլուծական-համադրման մեթոդները, իսկ որպես անուղղակի ապացուցումներ՝ հակասության (հակասող ենթադրության) և բացառության մեթոդները:

Համադրման կոչվում է ապացուցման այն մեթոդը, որի հիմքում ընկած է մի դատողություն, որը ելնում է նրանից, ինչ արդեն տրված (հայտնի) է և ավարտում նրանով, ինչը պահանջվում է հաստատել, ապացուցել:

Վերլուծական-համադրման մեթոդը ապացուցման այնպիսի եղանակ է, երբ նախ պնդման (խնդրի) եզրակացությունը (պահանջը) այնքան է մոտեցվում պայմանին, մինչև որ հստակ երևում է դատողությունների շղթայի՝ համադրման մեթոդի առաջին քայլը (սկիզբը): Դրանից հետո միանում է համադրման մեթոդը և հակառակ կարգով շարադրելով վերլուծությունը՝ ավարտում ապացուցումը:

Անուղղակի ապացուցման ամենատարածված տեսակը հակասության մեթոդն է, որը հաճախ գիտամեթոդական գրականության մեջ անվանվում է հակասող ենթադրության մեթոդ, ապագոգիկ անուղղակի ապացուցում, կամ ապա ցուցում՝ անհեթեթության հանգեցմամբ: Սա «ոչ ուղիղ կամ ասես մի կողմ ուղղված ապացուցում է. որևէ պնդման ճշմարիտ լինելը ուղիղ և դրականորեն հաստատող փաստերի փոխարեն ժամանակավորապես ընդունվում է հակադիր պնդման ճշմարտությունը, որից արտածվում է հետևանք, որի արդյունքում մենք հանգում ենք հակասության: Դրա հիման վրա արվում է հետևություն, որ հակադիր պնդումը կեղծ է, և, հետևաբար ճշմարիտ է ապացուցվելիք պնդումը»:

Այսպիսով՝ «հակասության մեթոդն ապացուցման այնպիսի եղանակ է, երբ ուղիղ ճանապարհով պայմանից պահանջը գնալու փոխարեն ենթադրվում է պահանջի հակադիր պնդման (ժխտման) ճշմարիտ լինելը, այստեղից այնուհետև արտածվում է հակասություն, որի հիման վրա հայտարարվում է, թե ճշմարիտ է ապացուցվելիք պնդումը»:

Ինչպես հայտնի է, ուղիղ ապացույցը հենված է մի ենթադրության վրա, ըստ որի՝ պնդման պայմանը պարունակում է բավարար տեղեկություններ՝ եզրակացությանը հանգեցնող և տրամաբանորեն իրար հետ կապված քայլերի վերջավոր շղթա (հաջորդականություն) կառուցելու համար: Սակայն առանձին պնդումներն ապացուցելիս հաճախ մեզ չի հաջողվում գտնել ուղիղ ճանապարհով պնդման պայմանից դեպի եզրակացությունը ընթացող դատողությունների շղթան[5]: Նման բան կարող է լինել ոչ թե այն պատճառով, որ մենք պարզապես անկարող ենք դա կատարել, այլ այն պատճառով, որ մարդկությանը պնդման A պայմանից դեպի B եզրակացությունը գնացող ուղիղ ճանապարհ դեռևս հայտնի չէ կամ էլ պարզապես հնարավոր չէ գտնել: **Օրինակ**, դիցուք, պահանջվում է ապացուցել, որ «Եթե x -ը ռացիոնալ թիվ է, իսկ y -ը՝ իռացիոնալ, ապա նրանց x + y գումարը իռացիոնալ թիվ է» թեորեմը: Առանձնացնելով թեորեմի պայմանը կամ ենթադրությունը և եզրակացությունը՝ կստանանք՝

A. Տրված են x ռացիոնալ և y իռացիոնալ թվերը (ոչ բացահայտ տեղեկություն):

B. x + y գումարը իռացիոնալ թիվ է:

Եթե այժմ մենք ցանկանում ենք ուղիղ ճանապարհով ստուգել այս պնդումը, ապա մենք, օրինակ, ստիպված պետք է դիտարկենք ռացիոնալ և իռացիոնալ թվերի բոլոր հնարավոր գումարները, ինչը հնարավոր չէ: Գոյություն ունի՞ արդյոք ավելի կարճ ճանապարհ: Իռացիոնա՞լ է արդյոք x + y գումարը:

Ապացույց: Ենթադրենք B եզրակացությունը ճշմարիտ չէ, այսինքն՝ ճշմարիտ է նրա ոչ B ժխտումը: Այսպիսով՝ մենք ենթադրում ենք, որ x + y թիվը իռացիոնալ չէ: Սակայն իրական թիվը կարող է լինել կա՛մ ռացիոնալ, կա՛մ իռացիոնալ: Հետևաբար x + y թիվը ռացիոնալ է: Ուստի համաձայն ռացիոնալ թվի սահմանումներից մեկի՝ $x + y = m / n$, որտեղ $n \in N$ և $m \in Q$:

Քանի որ, ըստ ենթադրության, x -ը նույնպես ռացիոնալ է, ուստի՝ $x = a / b$, $b \neq 0$:

Լուծելով a, b, m, n պարամետրերով $a / b + y = m / n$ հավասարումը y-ի նկատմամբ՝ կստանանք՝ $y = ( )\ mb - an / nb$, որտեղ $nb \neq 0$, քանի որ $b \neq 0$ և $n \neq 0$: Իսկ քանի որ $y = mb - an$ և nb թվերը ամբողջ թվեր են, ուստի y -ը նույնպես ռացիոնալ թիվ է: Այսինքն՝ ճշմարիտ է ոչ A պնդումը: Այսպիսով՝ մենք ապացուցեցինք, որ ճշմարիտ է ոչ B ⇒ոչ A պնդումը, որն էլ, ինչպես նշել ենք, համարժեք է A⇒ B պնդմանը: Ապացույցն ավարտված է:

[5] Այվազյան Է. Ի., «Մաթեմատիկական ապացուցումների ուսուցման մեթոդաբանական հիմունքները», Ե., 2013, 306 էջ:

Անուղղակի ապացուցման հաջորդ տեսակը բաժանարար կամ բացառության մեթոդով կատարած ապացուցումն է: Այն կիրառվում է այն դեպքում, երբ հայտնի է, որ ապացուցվելիք թեզը, օրինակ, « B1 կամ B2 կամ B3 » ճշմարիտ բաժանարար պնդման բաղադրիչներից մեկն է (օրինակ՝ B1 -ը): Մեթոդի կառուցվածքը հետևյալն է. նախ որոնվում է վերոհիշյալ բաժանարար ճշմարտությունը, ապա հակասության մեթոդով մեկ առ մեկ բացառվում են բոլոր՝ (B2 և B3) դեպքերը՝ բացի մեկից՝ B1 -ից: Սրա հիման վրա եզրակացվում է, որ ճշմարիտ է B1 -ը:

Բացի վերոհիշյալ՝ ուղիղ և անուղղակի մեթոդներից՝ տրամաբանությունում և ուսումնամեթոդական գրականությունում կիրառվում են նաև երկու մեթոդներ, որոնք հավասար իրավունքով հաճախ դասվում են ինչպես ուղիղ, այնպես էլ անուղղակի մեթոդների թվին: Դրանք լրիվ ինդուկցիայի և կառուցարկման մեթոդներն են:

Այն դեպքում, երբ ապացուցվելիք առնչության որոշման տիրույթը N-ն է, կիրառվում է լրիվ ինդուկցիայի մի այլ տեսակ՝ լրիվ մաթեմատիկական կամ պարզապես մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը: Այս մեթոդը հիմնված է մաթեմատիկական ինդուկցիայի սկզբունքի վրա. «n բնական պարամետրից կախված A(n) պնդումը համարվում է ապացուցված, եթե ապացուցված է A(1)-ը և ցանկացած n բնական թվի համար այն ենթադրությունից, որ A(n)-ը ճշմարիտ է, արտածվում է, որ ճշմարիտ է նաև A(n+1)-ը»:

Կառուցարկման (կոնստրուկտավորման) մեթոդը կիրառվում է օբյեկտի (հարաբերության) գոյության ապացույցներում: Այն ունի անչափ մեծ կիրառության շառավիղ ոչ միայն երկրաչափությունում, այլև մնացած՝ մաթեմատիկական, բնական, հասարակական գիտություններում: Կառուցարկման մեթոդը չունի որոշակի տրամաբանական կառուցվածք: Որոշակիորեն, կարելի է ասել, որ այս մեթոդով կատարված ապացուցումներն ունեն երկու փուլ՝ ա) որոնելի օբյեկտի կառուցարկում («կառուցում» և բ) ապացուցում (որ այդկերպ «կառուցված» օբյեկտը այն է, ինչի գոյությունը պահանջվում էր ապացուցել):

Բացի ապացուցման վերոհիշյալ մեթոդներից՝ հաճախ հանդիպում է ապացուցման ևս մեկ տեսակ, որը որոշակիորեն տարբերվում է թվարկված մեթոդներից: Ապացուցման այդ տեսակը որևէ թեզի սխալ կամ անհիմն լինելու ապացուցումն է՝ հերքումը:

Ըստ Գ. Բրուտյանի՝ հերքումը կարող է ուղղված լինել ապացուցման բաղկացուցիչ տարրերի՝ հիմքերի, փաստարկման և թեզի դեմ: Հերքումն ուղղված է հիմքերի դեմ, երբ ապացուցվելիք թեզը ճշմարիտ է, բայց նրա ապացուցման համար բերված փաստարկները (հիմքերը) անհաջող են և չեն կարող հիմնավորել ապացուցվող թեզը: «Այս երևույթը հատկապես նկատելի է թույլ աշակերտների կամ ուսանողների պատասխաններում: Նրանք հիշում են, թե ինչ պետք է ապացուցեն, ճիշտ են ձևակերպում ապացուցվող թեզը, սակայն չեն կարողանում առաջադրված թեզն ապացուցելու համապատասխան փաստարկներ բերել»: Նման դեպքերում հերքվում են սովորողի կողմից բերված ոչ ճիշտ հիմքերը, այսինքն՝ հերքումն ուղղում են հիմքերի դեմ:

Կարող է պատահել նաև, որ ապացուցվելիք ճշմարիտ թեզի և նրա հիմնավորման համար անհրաժեշտ հիմքերի առկայության պարագայում անգամ սխալ է այդ հիմքերից թեզի բխեցման ձևը՝ փաստարկումը: Այս դեպքում հերքումն ուղղում են փաստարկման (մեթոդի) դեմ: Սակայն, ինչպես նշում է Գ. Բրուտյանը, անհրաժեշտ է հիշել, որ փաստարկները կամ փաստարկումը հերքելը բոլորովին էլ չի նշանակում ապացուցվող թեզի հերքում: «Ապացուցվող թեզը հերքվում է միայն այն դեպքում, երբ հերքումը այս կամ այն եղանակով ուղղված է լինում հենց իր՝ բուն թեզի դեմ»:

ԳԼՈՒԽ 2. ՄԻՋՆԱԿԱՐԳ ՀԱՆՐԱԿՐԹԱԿԱՆ ԴՊՐՈՑԻ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ԴԱՍԸՆԹԱՑԻ ԱՊԱՑՈՒՑՄԱՆ ՄԵԹՈԴՆԵՐԸ

Հիմնական դպրոցի 6-8-րդ դասարանների հանրահաշվի և երկրաչափության նախկին և գործող դասագրքերի ինչպես տեսական նյութերի, այնպես էլ խնդիրների համակարգերի տրամաբանական վերլուծությունը ցույց է տալիս, որ ավանդաբար մաթեմատիկայի դասընթացում բացահայտ կամ կիսաբացահայտ տեսքով գործում են ապացուցման համադրման, վերլուծական-համադրման, հակասության, բացառության, լրիվ ինդուկցիայի, կառուցարկման մեթոդները, ինչպես նաև փաստի հերքման հակաօրինակի և թերի մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդները:

Հանրահաշվի գործող դասագրքերում այդ մեթոդները հանդես են գալիս ինչպես ավանդական, այնպես էլ ոչ ավանդական ձևերով: Ընդ որում, բացի հակասության մեթոդից, ՀՀ նախկին՝ «Հանրահաշիվ 6-8 (7-9)» դասընթացում կիրառվում է նաև հակասող ենթադրության մեթոդի մի տարատեսակ, որը կիրառվում է միակության ապացուցումներում և չի հանգեցնում հակասության, այլ ենթադրե լով, որ որոնելի օբյեկտը (հարաբերությունը) միակը չէ, օրինակ, երկուսն է, ցույց է տրվում, որ իրականում դրանք իրար հավասար են[6]:

Հայտնի է, որ մաթեմատիկայի դպրոցական դասագրքերի դասանյութերում զետեղված մաթեմատիկական պնդումների ապացուցումներն ու խնդիրների լուծումները յուրահատուկ ցուցանմուշի դեր են կատարում: Հեղինակային այդ ապացուցումներն ու լուծումները ցուցադրում են նաև, թե սովորողները ինչպես (ինքնուրույն) պետք է կատարեն դասանյութի վերջում զետեղված վարժություններն ու խնդիրները: Հետևաբար, եթե որևէ ապացուցման մեթոդ դասանյութի տեսական մասում մեկնաբանված ու ցուցադրված չէ, անտրամաբանական է մտածել, որ տնային ու դասարանական հանձնարարությունները կատարելիս սովորողները դրանք կկարողանան կիրառել:

Մաթեմատիկայի դասավանդման մեթոդիկայում ավանդաբար պահանջվում է, որ մաթեմատիկայի դպրոցական դասագրքի խնդիրների հավաքածուն լինի համակարգված[7]: Դա անչափ կարևոր չափանիշներից մեկն է, որով սովորաբար պարզում են

[6] «Մաթեմատիկա: Հանրակրթական դպրոցի առարկայական չափորոշիչ (նախագիծ)», ՀՀ ԿԳՆ ԿԲԿ, - Ե., 2001, 64 էջ:

[7] «Մաթեմատիկա: Հանրակրթական հիմնական դպրոցի առարկայական, չափորոշիչ և ծրագիր», Ե., 2007, 84 էջ:

մաթեմատիկայի ցանկացած նոր դասագրքի ու խնդրագրքի պիտանելիության հարցը: Սակայն հազվադեպ են հանդիպում դասանյութի տեսական մասի շարադրմանը վերաբերող նման պահանջ-չափանիշներ: Մեր կարծիքով՝ լավ դասագիրքը ոչ միայն ունի համակարգված խնդիրների ու վարժությունների հավաքածու, այլև տեսական նյութի բացատրությունում պետք է անհրաժեշտ համամասնությամբ զետեղված լինեն բոլոր այն տրամաբանական կառույցները (մեթոդները, արտածման կանոնները), որոնք անհրաժեշտ են դասագրքի խնդիրներն ու վարժությունները լուծելու համար:

Նշենք, որ ոչ ավանդական արտածումները, որոնք հանդիպում են ՀՀ միջնակարգ դպրոցի նախկին և արտասահմանյան որոշ դասագրքերում, էապես նպաստում են հիմնական դպրոցի շրջանավարտների փաստարկման կարողությունների ու ալգորիթմական մտածողության ձևավորմանը, որն էլ իր հերթին նպաստում է նրանց ճանաչողական ունակությունների և տրամաբանական մտածողության ձևավորմանը:

Մաթեմատիկայի դասավանդման ավանդական մեթոդիկան հիմնականում ի զորու չի եղել ձևավորել սովորողների գերակշռող մեծամասնության տրամաբանական մտածողությունը, մասնավորապես ապացուցողական ունակությունները: Ավանդական մեթոդիկայով մատուցված (ավանդական) ապացուցումները հնարավորություն չէին տալիս սովորողներին տեսնելու այդ արտածումներում կիրառված տրամաբանական կառույցները և դրանք ընկալելու որպես տրամաբանական (ապացուցողական) որոշակի քայլերի հաջորդականություն («ալգորիթմ») և հետևաբար նաև ճանաչելու կիրառված ապացուցման մեթոդը, որի անունն անգամ մեծ մասամբ չի հիշատակվում դասագրքերում: Բացառություն են կազմում միայն հակասող ենթադրության (հակասության) և մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդները[8]:

Մաթեմատիկական ապացուցումների ուսուցման մեթոդիկային նվիրված գրականությունում նշվում է, որ դպրոցական մաթեմատիկայի ամենակիրառական ապացուցման մեթոդը՝ համադրումը, ունի մեկ դժվարություն՝ ապացուցման առաջին, ինչպես նաև, ցանկացած հաջորդ քայլի ընտրությունը: Ինչպես գրում է Վ. Վ. Ռեպյովը, «այդ իմաստով մեթոդն ունի առանձնահատուկ թերություն: Ապացուցումը որոնողի տրամադրության տակ չկա ճանապարհի ընտրության որևէ չափանիշ. նա չգիտի՝ որ ճանապարհով պետք է գնա, որպեսզի պնդման պայմանը մոտեցնի եզրակացությանը:

[8] «Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր, Երկրաչափություն: Հանրակրթական ավագ դպրոցի չափորոշիչներ և ծրագրեր», Ե., «Տիգրան Մեծ», 144 էջ:

Ապացուցողի տրամաբանության տակ չկա նաև այն բանի չափանիշը, թե որպես ելակետային ինչ պնդումներ ընտրել, ինչպիսի հետևություններ կատարել դրանցից և այլն: Այնուամենայնիվ, այն ունի որոշակի նշանակություն՝ արժեք, հատկապես այն դեպքերում, երբ թեորեմի պայմանը եզրակացությանը կապող տրամաբանական իրավիճակները բարդ չեն»:

Իրականում լրիվ ինդուկցիան միայն սկսում է և ավարտում ապացուցումը, իսկ ապացուցման հիմնական ծանրությունը ընկնում է այն ուղիղ կամ անուղղակի ապացուցման մեթոդների վրա, որոնցով կատարվում է թեորեմի ապացուցումը յուրաքանչյուր դեպքում: Այս պատճառով մեթոդական գրականությունում սխալմամբ լրիվ ինդուկցիայով կատարված ապացուցումները հաճախ դասվում են ուղիղ կամ անուղղակի ապացուցումների թվին՝ կախված այն բանից՝ ուղիղ մեթոդով են ապացուցված ենթաթեորեմները, թե անուղղակի մեթոդով:

Լրիվ ինդուկցիայով կատարված ապացուցումների ամենադժվար պահերն են՝ ա) ճշմարիտ բաժանարար դատողության ընտրությունը, բ) օբյեկտների Q բազմության տրոհումը զույգ առ զույգ չհատվող, ոչ դատարկ դասերի (դեպքերի) և գ) այն բանի հիմնավորումը, որ սպառվել (քննարկվել) են բոլոր դեպքերը: Բացի դրանից՝ կարելի է նշել հիմնական դպրոցում այդ մեթոդի կիրառության ևս մի առանձնահատկություն՝ դատողությունների բազմափուլությունը:

Գրեթե նույն դժվարություններն են ուղեկցում նաև բացառության մեթոդին: Հենց այդ դժվարություններն են պատճառը, որ ավանդաբար այդ մեթոդները դասվում են մաթեմատիկայի դասընթացի ամենաբարդ մեթոդների շարքին, իսկ այդ մեթոդներով կատարված ապացուցումները անմատչելի են հիմնական դպրոցի շատ սովորողների համար:

Ավանդաբար դժվար մեթոդների շարքին է դասվում նաև կառուցարկման մեթոդը: Համենայն դեպս, երկրաչափությունում դա այդպես է: Ուսումնասիրությունները ցույց են տալիս, որ երկրաչափության և հանրահաշվի դպրոցական դասընթացների ապացուցման առաջատար մեթոդը համա դրումն է: Միաժամանակ այն ցանկացած այլ մեթոդով կատարված ապացուցումների բաղկացուցիչ մաս է: Օրինակ՝ հակասության մեթոդի էությունը բացահայտվում է հետևյալ թեորեմով.

« A A Am ,. . . , 1 2 ├ B , եթե որպես տրամաբանական հետևություն A A Am ,. . . , 1 2 և ˥ B բանաձևերից կարելի է արտածել հակասություն»: Եթե այստեղ A A Am ,. . . , 1 2 բանաձևերի տակ հասկանանք ապացուցվելիք պնդման պայմանը, իսկ B -ի տակ՝ եզրակացությունը, ապա որպեսզի A = {A1 A2 ,. . . , Am} պայմանից արտածենք B -ն, բավական է A-ից և ˥ B -ից արտածել հակասություն, այսինքն՝

A, ˥ B ├ C &˥C , (α)

որն էլ դպրոցական մաթեմատիկայում կատարվում է համադրման մեթոդով:

Այսպիսով՝ հակասության մեթոդով ապացուցման էական մասը (α) արտածման ստացումն է համադրման մեթոդով: Իսկ դա նշանակում է, որ հակասության մեթոդով իրականացված ապացուցումներում կիրառվում են հակասության կառույցը և համադրման մեթոդը:

Վերլուծական-համադրման մեթոդի էությունից բխում է, որ այդ մեթոդով իրականացված ապացուցումներում կիրառվում են պնդման եզրակացության վերլուծությունը և համադրումը: Ընդ որում, եթե վերլուծության ընթացքում ամենուրեք պահպանվում է բանաձևերի համարժեքությունը, ապա համադրումն ավելորդ է:

Անուղղակի ապացուցման մյուս տեսակի՝ բացառության մեթոդի էությունից բխում է, որ այդ մեթոդով իրականացված անուղղակի ապացուցումները հանգում են բացառության կառույցի կիրառմանը1 և հակասության մեթոդով մնացած այլընտրանքների (դեպքերի) բացառմանը՝ հերքմանը:

Մաթեմատիկական ապացուցումների վերլուծությունը ցույց տվեց նաև, որ կառուցարկման մեթոդով կատարված ապացուցումը սկսվում է այն օբյեկտի (հարաբերության) կառուցարկումից, որի գոյությունը պահանջվում է ապացուցել, և ավարտվում է ապացուցումով, այսինքն՝ այն փաստի հիմնավորմամբ, որ այդպես կառուցարկված օբյեկտը (հարաբերությունը) իսկապես պատկանում է թեորեմի (խնդրի) պայմանով որոշվող օբյեկտների դասին: Ընդ որում՝ սովորաբար այդ փաստի ապացուցումը կատարվում է «փաստի տակ տանելու» գործողությամբ (համադրման մեթոդով տրված հասկացությունը բնութագրող հատկանիշների իրականացման ստուգում):

Լրիվ ինդուկցիայի մեթոդը կիրառվում է $\forall x \in X\ (A(x) \Rightarrow B(x))$ տիպի տրամաբանական ձև ունեցող թեորեմներ ապացուցելիս, որտեղ այդ պնդման ընդհան րության շնորհիվ սովորողներին հայտնի բաժանարար դատողության միջոցով ընդհանրության քվանտորի որոշման տիրույթը տրոհվում է չհատվող և ոչ դատարկ դասերի (դեպքերի): Այդ պատճառով լրիվ ինդուկցիայի կառույցը ենթադրում է.

1. սովորողներին հայտնի ճշմարիտ բաժանարար դատողության որոնում,
2. թեորեմի բացատրամասում խոսվող օբյեկտների բազմության տրոհում դեպքերի (դասերի),
3. ուղիղ կամ անուղղակի մեթոդներով թեորեմի ապացուցում յուրաքանչյուր դեպքում,
4. լրիվ ինդուկցիայի կանոնի կիրառում: Պնդման հերքման հակօրինակի մեթոդով իրականացված ապացուցումները, որպես կանոն, սկսվում են այն օբյեկտի՝ հակաօրինակի որոնմամբ, որի համար՝

$$\forall x \in X \, (A(x) \Rightarrow B(x))$$

ընդհանրական պնդման A(x_0) x պայմանը ճշմարիտ է, իսկ, հակառակը, B(x_0) x եզրակացությունը՝ կեղծ:

Հաջորդ փուլում ապացուցվում (ստուգվում) է, որ ճշմարիտ են (x_0) 0 A x և] (x_0) 0 B x բանաձևերը:

Մեծ մասամբ մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում հանդիպող հերքման առաջադրանքներում որոնվող x0 ∈ X օբյեկտը թիվ է կամ երկրաչափական պատկեր, որը գտնելը առանձնապես մեծ դժվարություն չի ներկայացնում: Սակայն հաճախ այդ օբյեկտի որոնումը միանգամից հնարավոր չէ. այն անհրաժեշտ է կառուցարկել այնպես, որ ճշմարիտ լինի (x_0) 0 A x &] (x_0) 0 B x բանաձևը: Նման իրավիճակի մենք հանդիպում ենք մաթեմատիկայի պատմությունում: Որպես օրինակ՝ կարելի է նշել Էվկլիդեսի կողմից պարզ թվերի անվերջության ապացուցումը, որտեղ «պարզ թվերի բազմությունը վերջավոր է, և դրանք n p_2, p , p ,. . . , p_1 = 2 3 թվերն են» պնդումը հերքելու համար կառուցարկվում է 1 X_0 = p_1 p_2 pn + թիվը, որը ակնհայտորեն չի բաժանվում {p_1, p_2, p_3,. . . , pn } պարզ թվերից և ոչ մեկի վրա, ուստի այն ևս պարզ է[9]:

Այսպիսով՝ կատարած վերլուծությունները թույլ են տալիս եզրակացնել, որ ապացուցման գործընթացներում, բացի համադրման մեթոդից, ապացուցման մնացած մեթոդներից և ոչ մեկը «մաքուր» վիճակում, միայնակ չի գործում, այլ դրանք կիրառվում են

[9] Ամիրջանյան Յու. Ա., Ժամանակակից դիդակտիկա: Ե., «Լույս», 1990, 328 էջ:

որոշակի հավաքածուներով՝ միակցություններով: Ընդ որում՝ յուրաքանչյուր ապացուցումում կարելի է առանձնացնել ապացուցման առաջատար մեթոդը և նշել օժանդակ մեթոդները: Առաջատար մեթոդը սկսում է և ավարտում ապացուցումը, տանում է ապացուցման ընդհանուր գիծը՝ մարտավարությունը, իսկ օժանդակ մեթոդները կատարում են միջանկյալ աշխատանք՝ իրենց վրա վերցնելով առանձին դեպքերի հիմնավորումը կամ հերքումը և այլն:

Ավանդաբար ապացուցման եղանակը բնութագրելիս անվանվում է միայն առաջատար մեթոդը, օրինակ՝ «ապացուցում հակասության մեթոդով» կամ «ապացուցում լրիվ ինդուկցիայի մեթոդով» և այլն:

Հենց այս իմաստով էլ կարելի է խոսել ոչ թե առանձին մեթոդի, այլ մեթոդների միակցության (կոմպլեքսի) մասին՝ ավանդաբար շարունակելով դրանք անվանել յուրաքանչյուրն ըստ իր առաջատար մեթոդի:

Այսպիսով՝ միջնակարգ հանրակրթական դպրոցի մաթեմատիկայի դասընթացում գործում են ապացուցման մեթոդների հետևյալ միակցությունները (կոմպլեքսները).

1. համադրման մեթոդ,
2. վերլուծական-համադրման մեթոդ = [վերլուծություն] + [համադրման մեթոդ],
3. հակասության մեթոդ = [հակասության կառույց] + [համադրման մեթոդ],
4. բացառության մեթոդ = [բացառության կառույց] + [հակասության մեթոդ]
5. հերքում հակաօրինակի մեթոդով = [օբյեկտի կառուցարկում, որոնում] +[համադրման մեթոդ]:
6. կառուցարկման մեթոդ = [օբյեկտի կառուցարկում] + [համադրման մեթոդ],
7. լրիվ ինդուկցիայի մեթոդ = [լրիվ ինդուկցիայի կառույց] + [համադրման մեթոդ] կամ [հակասության մեթոդ],
8. մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդ = [մաթ.ինդուկցիայի սկզբունք] + [համադրման մեթոդ]:

Վերոհիշյալ հավաքածուների մեջ մտնող մեթոդների տարրերը մաթեմատիկական պնդումների ապացուցման ընթացքում հանդես են գալիս որպես մի ամբողջական համակարգի տարրեր[10]: Դեռ ավելին՝ կոնկրետ իրավիճակներում, այսինքն՝ կոնկրետ թեորեմների ապացուցումներում կամ խնդիրների լուծումներում սովորողների կողմից

[10] «Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր, Երկրաչափություն: Հանրակրթական ավագ դպրոցի չափորոշիչներ և ծրագրեր», Ե., «Տիգրան Մեծ», 144 էջ:

հաճախ չեն ընկալվում, չեն գիտակցվում առանձին՝ ինչպես առաջատար, այնպես էլ՝ օժանդակ մեթոդների կիրառությունը: Նույնիսկ մեթոդական գրականությունում որոշ հեղինակներ, օրինակ՝ բացառության մեթոդով կատարված ապացուցումները անվանում են հակասող ենթադրության մեթոդ: Այդ պատճառով էլ «յուրաքանչյուր կոնկրետ ապացուցումում կիրառված մեթոդների ողջ միակցության ու նրանց տարրերի ընդհանուր հավաքածուն ընկալվում է որպես մի ամբողջություն կազմող գիտելիքների ու ունակությունների հավաքածու, այսինքն՝ ապացուցողական գիտելիքների ու ունակությունների կոմպլեքս»:

Ասվածից հետևում է, որ ապացուցման մեթոդների ուսուցման պարտադիր արդյունքների մեջ համադրման մեթոդի հետ միասին պետք է քննարկել նաև սովորողների կողմից ապացուցման մեթոդների հետևյալ հիմնական կառույցների յուրացումը՝ հակասության, բացառության, լրիվ ինդուկցիայի և կառուցարկման: Ընդ որում՝ սովորողները պետք է հասկանան ապացուցման ընթացքում այդ կառույցների և համադրման մեթոդի համագործակցության եղանակը:

Կառուցարկումը, ինչպես արդեն նշել ենք, գոյության փաստի ապացուցման առաջին փուլն է: Սակայն որոշ հետազոտողներ կառուցարկումը համարում են նաև համադրման մեթոդով կատարված երկրաչափական ապացուցումների պարտադիր մասը, կառուցարկում ասելով՝ հասկանում են երկրաչափական թեորեմի (խնդրի) գծագրի կառուցումը՝ որպես օժանդակ միջոց:

Գիտամեթոդական գրականությունում խնդրի գծագրի դերի հարցը մինչ օրս համարվում է վիճելի և լուծված չէ: Որոշ մաթեմատիկոսներ (Ժ. Դեդոնե) գտնում են, որ գծագիրը միայն վնասում է երկրաչափությանը, իսկ մյուսները (Ա. Դ. Ալեքսանդրով և ուրիշներ), հակառակը, գտնում են, որ «երկրաչափական մեթոդն էլ հենց այն է, որում տրամաբանական ապացուցումը կամ խնդրի լուծումը ուղղորդվում է զննական ներկայացմամբ, ամենից լավը այն է, երբ ապացուցումը կամ լուծումը, կարելի է ասել, բխում է զննական նկարից: (Հին հնդկական հետազոտություններում պատահում է այնպես, որ ապացուցումը հանգեցվում է գծագրին, որը ուղեկցվում է մեկ բառով «Տե՛ս»… Այս մոտեցումը պետք է սովորեցնել նաև աշակերտին՝ սկսելով գծագրից, ուրվագծից, զննական նկարագրից)»: Այս իմաստով գծագրի հարցը պատկանում է զննականության պրոբլեմներին և՛ ոչ թե մեր հետազոտության առարկային:

Հետագայում օբյեկտի կառուցարկումը և համապատասխան մեթոդը մենք կմեկնաբանենք լայն իմաստով, որպես որևէ փաստի գոյության ապացուցման մաս: Այս իմաստով կառուցարկման մեկնաբանման կարևորության մասին նշում է Ֆ. Ասմուսը. «Որպեսզի սահմանումը գիտության համար պիտանի լինի, անհրաժեշտ է, որ սահմանվող առարկան իրականում գոյություն ունենա: Այդ պատճառով և՛ բնագիտությունում, և՛ հասարակական գիտություններում սահմանման ընդունումը ենթադրում է, որ կարող է և պետք է ապացուցվի այդ սահմանմամբ բնութագրվող առարկայի գոյությունը… Պետք է ապացուցվի նաև սահմանման համապատասխանությունը սահմանվող առարկային»[11]:

Այսպիսով՝ ապացուցման մեթոդների ուսուցման արդյունքները պլանավորելիս անհրաժեշտ է քննարկել սովորողների կողմից համադրման մեթոդի, հակասության, բացառության և լրիվ ինդուկցիայի կառույցների յուրացման, ինչպես նաև կառուցարկման մեթոդի և հերքման հակաօրինակի մեթոդի էությունը հասկանալու հարցերը:

[11] Այվազյան Է. Ի., «Մաթեմատիկական ապացուցումների ուսուցման մեթոդաբանական հիմունքները», Ե., 2013, 306 էջ:

ԵԶՐԱԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆ

Այս հետազոտական աշխատանքը շոշափում է մի այնպիսի թեմա , ինչպիսին է սովորողների տրամաբանական մտածողությունը ապացուցումների մեթոդների վերաբերյալ:

Սովորողների տրամաբանական մտածողության և դրա հետ շաղկապված լեզվական կարողությունների զարգացման խնդիրը ընդհանուր հարցադրումների և նպատակադրումների մակարդակից փոխադրվում է կոնկրետ առարկայական դաշտ: Եվ դա իրականացվում է այն մոտեցման շնորհիվ, ըստ որի տրամաբանության հիմունքներից ընտրված որոշակի գիտելիքները կրթության բովանդակության մեջ բացորոշ ձևով ներառելուն զուգընթաց, միաժամանակ, մեթոդական համակարգը հարստացվում է այնպիսի բաղադրիչներով, որոնցում առավել ամբողջական ու լիարժեք են արտացոլվում կրթության նորացված բովանդակության առանձնահատկությունները: Դրա արդյունքում բավարար լուծում են ստանում մեթոդամանկավարժական, մասնավորապես նաև մաթեմատիկայի դասավանդման մեթոդիկայի արդիական մի քանի հիմնահարցեր:

Այսպիսով, մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում տրամաբանության տարրերի ներառման և ժամանակակից մեթոդների արդյունավետ կիրառման շնորհիվ ուսումնական բնագավառների համակարգում զգալիորեն մեծանում է մաթեմատիկայի հանրակրթական ներուժը, և արդյունքում՝ մաթեմատիկան «ընտրյալների համար նախատեսված» առարկայից վերածվում է բոլորի համար հասանելի առարկայի:

ՕԳՏԱԳՈՐԾՎԱԾ ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՑԱՆԿ

1. «Միջնակարգ (լրիվ) ընդհանուր կրթության պետական չափորոշիչ»: ՀՀ ԿԳՆ «Տեղեկագիր», 2000 թ., N2, էջ 24-46:
2. «Մաթեմատիկա: Հանրակրթական դպրոցի առարկայական չափորոշիչ (նախագիծ)», ՀՀ ԿԳՆ ԿԲԿ, -Ե., 2001, 64 էջ:
3. «Հանրակրթության պետական կրթակարգ: Միջնակարգ կրթության պետական չափորոշիչ», Ե., 2004, 72 էջ:
4. «Մաթեմատիկա: Հանրակրթական հիմնական դպրոցի առարկայական, չափորոշիչ և ծրագիր», Ե., 2007, 84 էջ:
5. «Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր, Երկրաչափություն: Հանրակրթական ավագ դպրոցի չափորոշիչներ և ծրագրեր», Ե., «Տիգրան Մեծ», 144 էջ:
6. Ամիրջանյան Յու. Ա., Ժամանակակից դիդակտիկա: Ե., «Լույս», 1990, 328 էջ:
7. Այվազյան Է. Ի., Մաթեմատիկայի ուսուցման արդյունքների պլանավորման մասին, «Սովետական մանկավարժ»,1988, N12, 16-20 էջեր:
8. Այվազյան Է. Ի., Ապացուցման մեթոդի ընտրության մասին, «Մաթեմատիկան դպրոցում», 1998, N 3, 9-16 էջեր:
9. Այվազյան Է. Ի., «Մաթեմատիկական ապացուցումների ուսուցման մեթոդաբանական հիմունքները», Ե., 2013, 306 էջ:
10. Кондаков М. И., Логический словарь-справочник. 2-е изд., испр. и доп, М., “Наука”, 1975, 717 стр.
11. Тихомиров О. К., Психология мышления, М., “Изд-во МГУ”, 1984, 230 стр.