ՎԵՐԱՊԱՏՐԱՍՏՈՂ ԿԱԶՄԱԿԵՐՊՈՒԹՅՈՒՆ

ՇՈՒՄ Գիտակրթական կենտրոն ՀԿ

Ավարտական հետազոտական աշխատանք

Թեմա ՊԱՐԱՄԵՏՐԱԿԱՆ ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՄԻ ՄԵԹՈԴԻ ՄԱՍԻՆ

Կատարող ԳԱԳԻԿ ՍՈՒՔԻԱՍՅԱՆ ԱՐԱՄԻ

« [illegible]

Ղեկավար ԱՍԼԱՆՅԱՆ ՆԱԻՐԱ

ԳՅՈՒՄՐԻ 2022

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՊԱՐԱՄԵՏՐԱԿԱՆ ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՄԻ ՄԵԹՈԴԻ ՄԱՍԻՆ

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Պարամետրական անհավասարումները, որոնք բերվում են քառակուսայինի (իրենց թվում են եռանկյունաչափական, ցուցչային և լոգարիթմական անհավասարումները), դպրոցական հանրահաշվի ծրագրի պարտադիր մասն են կազմում: Այդ հավասարումների լուծման ստանդարտ մեթոդը կայանում է նրանում, որ համապատասխան ֆունկցիաները որևէ փոփոխականով նշանակելուց հետո դրանք բերվում են քառակուսային անհավասարումների, հաշվի առնելով, բնականաբար, այդ ֆունկցիաների հատկությունները: Նշված մոտեցման ժամանակ, կախված խնդրի պայմանից, հաճախ առաջանում են բավականին բարդ տեխնիկական հաշվարկներ, մասնավորապես կապված դեպքերի բազմազանությամբ:

Հետազոտական աշխատանքում առաջարկվում է նշված պարամետրական անհավասարումների լուծման մի մեթոդ, առանց որևէ նշանակումների և բարդ հաշվարկների: Այդ մեթոդի հիմքում ընկած է հնարավոր պահանջվող պարամետրի արժեքների որոշումը անհավասարման մեջ հարմար արժեքներ տեղադրելու միջոցով: Դա առաջին հերթին թույլ է տալիս նեղացնել համապատասխան պարամետրի արժեքների որոնման տիրույթը: Որից հետո, ելնելով եռանկյունաչափական, ցուցչային և լոգարիթմական ֆունկցիաների

հատկություններից, տրվում են գնահատականներ՝ պարամետրի պահանջվող արժեքները ճշգրիտ գտնելու համար: Գնահատականների տեխնիկան ենթադրում է տվյալ ֆունկցիայի հատկությունների իմացություն, որը հանդիսանում է խթան իրենց ավելի խորը ուսումնասիրության համար:
Իմ կարծիքով, առաջարկվող մեթոդը օգտակար է աշակերտների համար պարամետրական անհավասարումներ լուծելիս: Ի տարբերություն ստանդարտ մոտեցման, այն ավելի ճկուն է, ընդլայնում է ֆունկցիաների հատկությունների կիրառության հնարավորությունները, և վերջապես տնտեսում է ժամանակը, ինչը ոչ պակաս կարևոր է:

§ 1. ԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱՉԱՓԱԿԱՆ ՊԱՐԱՄԵՏՐԱԿԱՆ ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

Դիտարկենք հետևյալ անհավասարումները:
Գտնել a պարամետրի բոլոր այն արժեքները, որոնց համար անհավասարման լուծումն է ամբողջ թվային առանցքը:
№ 231 (ա) (տե[1])

$$\boldsymbol{asin^2x + 2asinx + 1} > 0 \qquad \textbf{(1)}$$

Նշանակելով $t = sinx$, կստանանք.

$$at^2 + 2at + 1 > 0\,, t \in [-1; 1],$$

այսինքն պետք է գտնել a պարամետրի այն արժեքները, որոնց համար անհավասարումը տեղի ունի բոլոր $t \in [-1; 1]$ համար:
Անմիջապես ստուգելով կհամոզվենք, որ $a = 0$ արժեքը բավարարում է պահանջին: a-ի մնացած արժեքները հետազոտվում են կախված a-ի նշանից, դիսկրիմինանտի նշանից և քառակուսային եռանդամի արմատների դասավորությունից: Հարաբերական բարդությունը կայանում է նրանում, որ անհավասարումը պետք է տեղի ունենա ոչ բոլոր t-ի համար, այլ

միայն $t \in [-1;1]$ համար: Դա կթողնենք աշակերտներին որպես ինքնուրույն աշխատանք:

Այժմ շարադրենք առաջարկվող մեթոդը: Քանի որ տրված անհավասարումը պետք է տեղի ունենա x-ի բոլոր արժեքների համար, ապա վերցնելով $x = \mp \frac{\pi}{2}$, կստանանք.

$$x = -\frac{\pi}{2}, \qquad -a + 1 > 0 \;\Rightarrow\; a < 1;$$

$$x = \frac{\pi}{2}, \qquad 3a + 1 > 0 \;\Rightarrow\; a > -\frac{1}{3},$$

այսինքն, a պարամետրի հնարավոր արժեքները ընկած են $(-\frac{1}{3};1)$ ինտերվալում:

Ինչպես արդեն նշել ենք, $a = 0$ արժեքը բավարարում է:

$a \in (0;1)$-ի համար ունենք.

$$(sinx + 1)^2 > 1 - \frac{1}{a},$$

որը ճիշտ է բոլոր $x \in R$ համար, քանի որ $1 - \frac{1}{a} < 0$:

Իսկ եթե $a \in (-\frac{1}{3};0)$, ապա նմանապես կունենանք

$$(sinx + 1)^2 < 1 - \frac{1}{a},$$

որտեղից, հաշվի առնելով, որ

$$(sinx + 1)^2 \le 4 < 1 - \frac{1}{a},$$

կստանանք, որ (1) անհավասարումը տեղի ունի բոլոր $x \in R$ համար:

Պատասխան՝ $a \in \left(-\frac{1}{3};1\right)$:

Առաջարկվող մեթոդի մեջ $x = \mp \frac{\pi}{2}$ արժեքների ընտրությունը հուշում է հենց անհավասարման տեսքը:

№ 231 (բ) (տես [1])

$$(a^2 - 1)cos^2x - 2acosx - 2 \le 0 \qquad (2)$$

Վերցնելով (2) անհավասարման մեջ $x = 0$, կստանանք

$$a^2 - 2a - 3 \le 0 \;\Rightarrow\; a \in [-1;3]:$$

Իսկ վերցնելով $x = \pi$, կունենանք

$$a^2 + 2a - 3 \le 0 \;\; \Rightarrow \;\; a \in [-3; 1]:$$

Ստացված հատվածների հատումը $a \in [-1; 1]$ բազմությունն է: Մեզ մնում է ցույց տալ, որ ստացված բազմությունն է հանդիսանում տվյալ անհավասարման լուծումը:

Այսպիսով, եթե $a \in [-1; 1]$, ապա

$$a^2 - 1 \le 0,$$

$$(a^2 - 1)cos^2x \le 0, x \in R:$$

Մյուց կողմից,

$$|2acosx| \le 2,$$

$$0 \le 2acosx + 2 \le 4, x \in R:$$

Վերջին երկու անհավասարումներից բխում է հետևյալ անհավասարումը.

$$(a^2 - 1)cos^2x \le 0 \le 2acosx + 2,$$

որն էլ ապացուցում է, որ (2) անհավասարումը տեղի ունի բոլոր $x \in R$ համար $a \in [-1; 1]$ պարամետրի արժեքների դեպքում:

Պատասխան՝ $a \in [-1; 1]$:

Այսպիսով, նշանակման ստանդարտ մեթոդը փոխարինված է անհավասարման մեջ այսպես ասած հարմար արժեքներ տեղադրելով, ինչով և որոշվում է պահանջվող պարամետրի հնարավոր արժեքների տիրույթը: Այդ հարմար արժեքների ընտրությունը եռանկյունաչափական անհավասարումների դեպքում կատարվում է՝ ելնելով եռանկյունաչափական ֆունկցիաների առանձնահատկություններից: Որից հետո տարրական գնահատականների միջոցով հեշտությամբ կարող ենք հասնել դրված նպատակին: Առաջարկվող մեթոդը տալիս է հիմնավորված, առանց ավելորդ հաշվարկների մոտեցում՝ բավականին լայն դասի պարամետրական անհավասարումների լուծման համար:

§ 2. ՑՈՒՑՉԱՅԻՆ ՊԱՐԱՄԵՏՐԱԿԱՆ ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

Ցուցչային պարամետրական անհավասարումների համար, բացի անհավասարման մեջ հարմար արժեքներ տեղադրելուց, օգտագործվում է նաև սահմանային անցումը:
Այստեղ մենք կօգտվենք ցուցչային ֆունկցիայի հետևյալ հատկություններից.

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0\,,\; a > 1\,,$$

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty\,,\; a > 1\,:$$

Գտնել a պարամետրի բոլոր այն արժեքները, որոնց համար անհավասարման լուծումն է ամբողջ թվային առանցքը:

№ 232 ( )ս(տե[1])

$$\mathbf{4^x - (a+2)2^x + a + 3 > 0} \qquad \textbf{(3)}$$

Քանի որ (3) անհավասարումը պետք է տեղի ունենա բոլոր $x \in R$ համար, ապա անցնելով սահմանի, երբ $x \to -\infty$, կստանանք $a \geq -3$:
Դժվար չէ ստուգել, որ $a = -3$, $a = -2$ արժեքները բավարարում են պահանջին:
Եթե $a \in (-3; -2)$, ապա

$$a + 3 > 0\,,\; -(a+2) > 0\,,$$

$$4^x - (a+2)2^x + a + 3 > 0\,,\, x \in R\,:$$

Դիտարկենք այն դեպքը, երբ $a > -2$: Հիշելով, որ

$$\min_{0<t<t_0} t(t - t_0) = -\frac{t_0^2}{4}\,,$$

կստանանք.

$$4^x - (a+2)2^x + a + 3 = 2^x\big(2^x - (a+2)\big) + a + 3 \geq$$

$$\geq -\frac{(a+2)^2}{4} + a + 3\,, x \in R\,:$$

Եվ վերջում պետք է գտնել a-ի այն արժեքները, որոնց համար

$$-\frac{(a+2)^2}{4} + a + 3 > 0\,,$$

$$a^2 - 8 < 0\,, a \in \big(-2; 2\sqrt{2}\big)\,:$$

Պատասխան՝ $\boldsymbol{a} \in \big[-3; 2\sqrt{2}\big)$ **:**

№ 232 (բ) (տես [1])

$$a9^{|x|}-2(a-1)3^{|x|}+3a-1\geq 0 \tag{4}$$

Քանի որ $a<0$ դեպքում ունենք.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(a9^{|x|}-2(a-1)3^{|x|}+3a-1\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}9^{|x|}\left(a-\frac{2(a-1)}{3^{|x|}}+\frac{3a-1}{9^{|x|}}\right)=-\infty,$$

ապա (4) անհավասարումը չի կարող տեղի ունենալ բոլոր $x\in R$ համար, երբ $a<0$: Հետևաբար, $a<0$ դեպքը չի բավարարում:

Դիտարկենք $a\geq 0$ դեպքը: (4) անհավասարման մեջ համապատասխան ձևափոխություններ անելուց հետո կստանանք.

$$a\left(3^{|x|}-1\right)^2+2\left(3^{|x|}-1\right)+2a+1\geq 0:$$

Քանի որ վերջին գումարի մեջ բոլոր գումարելիները ոչ բացասական են ($3^{|x|}-1\geq 0, x\in R$), ապա (4) անհավասարումը տեղի կունենա բոլոր $x\in R$ համար $a\geq 0$ արժեքների դեպքում:

Պատասխան՝ $a\in[0;+\infty)$:

№ 890 (ա) (տես [1])

$$a9^{x}+4(a-1)3^{x}+a-1\geq 0 \tag{5}$$

(5) անհավասարման մեջ անցնելով սահմանի, երբ $x\to-\infty$, կստանանք $a\geq 1$: Մնում է նկատել, որ (5)-ի մեջ բոլոր գումարելիները ոչ բացասական են բոլոր $x\in R$ համար $a\geq 1$ արժեքների դեպքում:

Պատասխան՝ $a\in[1;+\infty)$:

№ 5216 (տես [2])

$$4^{x^2}+2(2a+1)2^{x^2}+4a^2-3>0 \tag{6}$$

$x=0$ դեպքում ունենք.

$$a^2+a>0, \qquad a\in(-\infty;-1)\cup(0;+\infty):$$

Եթե $a>0$, ապա ($2^{x^2}\geq 1, x\in R$)

$$4^{x^2}+2(2a+1)2^{x^2}+4a^2-3=$$

$$=\left(\left(2^{x^2}+1\right)^2-4\right)+4a\left(2^{x^2}-1\right)+4(a^2+a)>0,\ x\in R:$$

Իսկ եթե $a<-1$, ապա

$$4^{x^2}+2(2a+1)2^{x^2}+4a^2-3=$$
$$=\left(2^{x^2}+(2a+1)\right)^2-4(a+1)>0\,,x\in R\,:$$

Պատասխան՝ $a\in(-\infty;-1)\cup(0;+\infty)$.

Բերված օրինակներում էական դեր են խաղում ցուցչային ֆունկցիայի հատկությունները, որոնք բավականին լավ են ուսումնասիրվում 11-րդ դասարանում: Սահմանային անցումը, մասնավորապես, երբ փոփոխականը ձգտում է անվերջի, մաթեմատիկական անալիզի դպրոցական ծրագրից դուրս է: Սակայն, չնայած դրան, ցուցչային ֆունկցիայի վարքը անվերջում կարելի է գրաֆիկորեն ցույց տալ, որից հետո դրա կիրառությունը շատ օգտակար կլինի աշակերտների համար:

Ամեն դեպքում պարամետրական ցուցչային անհավասարումների լուծման համար առաջարկվող ալտերնատիվ մեթոդը լիովին բացառում է աշխատանքը քառակուսային եռանդամի դիսկրիմինանտի հետ (դասագրքում այս տիպի բոլոր անհավասարումները կապվում են դիսկրիմինանտի հետ): Այս մեթոդը աշակերտին տալիս է ընտրության հնարավորություն, բայց նրա ավելի խորը գիտելիքներ ֆունկցիաների:

§ 3. ԼՈԳԱՐԻԹՄԱԿԱՆ ՊԱՐԱՄԵՏՐԱԿԱՆ ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

Գտնել a պարամետրի բոլոր այն արժեքները, որոնց համար անհավասարման լուծումն է ամբողջ թվային առանցքը:

№ 890 (բ) (տ[1])

$$\log_{a(a+1)}(|x|+2)>1 \qquad (7)$$

$x=0$ դեպքում ունենք.

$$\log_{a(a+1)}2>1\,,$$
$$\frac{1}{\log_2 a(a+1)}>1\,,$$

$$0 < \log_2 a(a+1) < 1\,,$$

$$1 < a(a+1) < 2\,,$$

որտեղից կստանանք. $a \in \left(-2;\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2};1\right)$:

Յանկացած $x \in R$ և $a \in \left(-2;\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2};1\right)$ համար ճիշտ են հետևյալ անհավասարումները.

$$\log_{a(a+1)}(|x|+2) \geq \log_{a(a+1)} 2 > 1:$$

Պատասխան՝ $\boldsymbol{a \in \left(-2;\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2};1\right)}$:

Մի քիչ ձևափոխենք (7) անհավասարումը.

$$\boldsymbol{\log_{a(a+1)}(|x|+2) < 1:} \qquad \textbf{(8)}$$

$x = 0$ դեպքում կրկին ստանում ենք.

$$\log_{a(a+1)} 2 < 1\,,$$

$$\frac{1}{\log_2 a(a+1)} < 1\,,$$

$$\left[\begin{array}{l}\log_2 a(a+1) < 0\,,\\ \log_2 a(a+1) > 1\,,\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0 < a(a+1) < 1\,,\\ \quad a(a+1) > 2\,,\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a \in \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2};-1\right) \cup \left(0;\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\\ \quad a \in (-\infty;-2) \cup (1;+\infty)\end{array}\right.:$$

Երբ $0 < a(a+1) < 1$, ապա

$$\log_{a(a+1)}(|x|+2) \leq \log_{a(a+1)} 2 < 1\,, x \in R:$$

Ակնհայտ է, որ $a(a+1) > 2$ դեպքում անհավասարումը չի կարող տեղի ունենալ բոլոր $x \in R$ համար:

Պատասխան՝ $\boldsymbol{a \in \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2};-1\right) \cup \left(0;\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)}$**:**

№ 5218 (տես [2])

$$\boldsymbol{\log_{a^2-2}((a^2-1)x^2+2x+2) > 1} \qquad \textbf{(9)}$$

$x = 0$ դեպքում ունենք.

$$\log_{a^2-2} 2 > 1\,,$$

$$\frac{1}{\log_2(a^2-2)} > 1\,,$$

$$0 < \log_2(a^2-2) < 1,$$

$$1 < a^2-2 < 2\,,$$

որտեղից ստանում ենք $a \in (-2;-\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3};2)$:

Բացի դրանից, ցանկացած $x \in R$ համար ունենք.

$$\log_{a^2-2}\left((a^2-1)x^2+2x+2\right)=\log_{a^2-2}\left((a^2-1)x^2+2x+2\right)$$

$$=\log_{a^2-2}\left((a^2-1)(x+\frac{1}{a^2-1})^2+2-\frac{1}{a^2-1}\right)\geq\log_{a^2-2}\left(2-\frac{1}{a^2-1}\right):$$

Մնում է գտնել $a \in \left(-2;-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};2\right)$ այն արժեքները, որոնց համար

$$\log_{a^2-2}\left(2-\frac{1}{a^2-1}\right)>1\,,$$

$$2-\frac{1}{a^2-1}>a^2-2\,,$$

$$a^4-5a^2+5<0\,,$$

$$a\in\left(-\sqrt{0{,}5(5+\sqrt{5})};-\sqrt{0{,}5(5-\sqrt{5})}\right)\cup\left(\sqrt{0{,}5(5-\sqrt{5})};\sqrt{0{,}5\left(5+\sqrt{5}\right)}\right):$$

Պատասխան՝ $\boldsymbol{a}\in\left(-\sqrt{0{,}5(5+\sqrt{5})};-\sqrt{\mathbf{3}}\right)\cup\left(\sqrt{\mathbf{3}};\sqrt{0{,}5(5+\sqrt{5})}\right):$

Վերջին երեք անհավասարումները չեն բերվում քառակուսային անհավասարումների, սակայն նույնիսկ այդ դեպքում տեղադրման մեթոդը արդյունավետ է: Սկզբում տեղադրումով որոշում ենք a-ի թույլատրելի արժեքները, որից հետո տարրական գնահատականներով գտնում ենք a-ի ճշգրիտ արժեքները:

Գ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

1. Գ. Գ. Գևորգյան, Ա. Ս. Սահակյան, *Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր*, բնագիտամաթեմատիկական հոսքի համար, 12 դասարան, Երևան, «Տիգրան Մեծ» հրատարակչություն, 2017 թ.
2. Ի. Գ. Խաչատրյան, *Մաթեմատիկայի խնդիրների ժողովածու*, «Գեղամա» փոքր ձեռնարկություն, Երևան, 1991 թ.