ՎԵՐԱՊԱՏՐԱՍՏՈՂ ԿԱԶՄԱԿԵՐՊՈՒԹՅՈՒՆ

ՇՈՒՄ ԳԻՏԱԿՐԹԱԿԱՆ ԿԵՆՏՐՈՆ ՀԿ

Ավարտական հետազոտական աշխատանք

Թեմա- Մաթեմատիկայի ուսուցման ընթացքում ապացույցի մեթոդի մի քանի մոտեցումների մասին

Կատարող՝ Արփինե Հովհաննիսյան
Գյումրու Ակադեմիական վարժարանի մաթեմատիկայի ուսուցիչ
Ղեկավար՝ Նաիրա Ասլանյան

2022թ

Բովանդակություն

Ներածություն

Տրամաբանությունն ինչ-որ ընդհանուր բան ունի մտածողության հետ. երբ մենք մտածողության ընթացքը դարձնում ենք մեր իսկ մտածողության առարկան, ապա այն անվանում ենք տրամաբանություն: (Գ. Ֆրոյդենտալ)

Հայտնի մաթեմատիկոս Ռ.Դեկարտն ասել է.<<Ես մտածում եմ,ուրեմն ես գոյություն ունեմ>>: Այս բանաձևը մարդու հոգեկան կյանքում առաջին պլան է մղում մտածողությունը՝ դարձնելով այն մարդու գոյության հայտանիշ:Հետևաբար ցանկացած մարդու՝ որպես բանական էակի դրսևորման լավագույն միջոցը սեփական մտածողության կարգավորումն է:

Գաղտնիք չէ ,որ հանրակրթական դպրոցում տարբեր առարկաների դասավանդման հիմնական խնդիրներից մեկը աշակերտի մոտ տրամաբանական մտածողության ձևավորումն ու զարգացումն է, ինչը հետագա կյանքի ընտացքում նրան կօգնի բացահայտելու պատճառահետևանքային կապեր,համակարգված մտածելու կարողություն ,մտքերի գրագետ և կապակցված արտահայտելու կարողություն կձևավորի:Այս ամենի մեջ մաթեմատիկա առարկան ունի բավականին շահեկան դիրք, քանի որ առարկայական հարցադրումների և դրանց պատասխանների որոնման ճանապարհին աշակերտը բախվում է փաստերը համադրելու, դրանք վերլուծելու,վերլուծության ընթացքում հետևություններ և եզրահանգումներ կատարելուն:

Միջնակարգ դպրոցի մաթեմատիկայի դասընթացի ծրագրերի վերլուծությունը ցույց է տալիս, որ բոլոր ժամանակներում կարևորվել է սովորողի մոտ տրամաբանական մտածողության և նրա կարևոր բաղադրիչի՝ապացուցելու ունակության ձևավորումը:Այդ ծրագրերին համապատասխան մաթեմատիկայի դասընթացները այս կամ այն հաջողությամբ մշտապես փորձել են լուծել այդ կարևորագույն հիմնահարցը, որը մաթեմատիկայի դասընթացի կարևորագույն նպատակի՝ մտածել սովորեցնելու հենքային բաղադրիչներից մեկն է:

Նախկինում այս հիմնախնդրի լուծման ամբողջ պատասխանատվությունը դրված էր երկրաչափություն առարկայի վրա:Թվում էր թե միայն այս առարկայի խնդիրներն են պարունակում ապացույց պահանջող հարցադրումներ:Մինչդեռ հանրահաշիվ առարկայի ուսուցման ընթացքում ևս կարելի հանդիպել բազմաթիվ հարցադրումների , որոնց պատասխանը պահանջում է ապացուցողական ապարատի տարրեր կամ ամբողջական ապացույց:Այս տեսանկյունից դիտելով հանրահաշիվ առարկայի դասավանդման ընթացքում կարևորվում է ապացույցի մեթոդը:Ապացուցողական ապարատի տեղափոխումը <<Երկրաչափություն>> առարկայից <<Հանրահաշիվ>> առարկա լիովին լուծված է ներկայիս գործող դասագրքերում,ինչը հնարավորություն է տալիս ՀՀ միջնակարգ դպրոցի մաթեմատիկայի դասընթացն իր հստակ ապացուցողական կառույցով և համապատասխան մեթոդական սպասարկմամբ լուծելու սովորողների՝ ՀՀ ապագա քաղաքացիների տրամաբանական մտածողության ձևավորման խնդիրը: Իսկ մտածողության զարգացման բաղադրիչներից մեկը, ինչպես նշել ենք, տրամաբանական այն ունակությունների ձևավորումն ու զարգացումն է, որը կապված է փաստարկված դատողություններ կատարելու, ապացուցելու և հերքելու ունակությունների հետ(1):

Աշխատանքի խնդիրներն են .

- դասակարգել ապացուցման մեթոդները
- բացահայտել դրանց կիրառության կարևորությունը հանրահաշվի դասընթացում
- կարևորել ապացույցի մեթոդի կիրառման դերը աշակերտների մոտ մտածելաոճի ձևավորման ընթացքում

Աշխատանքի նպատակն է

- առարկայի դասավանդման ընթացքում ապացուցման մեթոդների զանազանում
- դասավանդման ընթացքում ձևավորել ապացուցման մեթոդի ճիշտ ընտրության ունակություն
- ապացուցման քայլերի ճիշտ պլանավորում և կիրառում, ինչը կնպաստի համակարգված մտածողության ձևավորմանը
- ապացույցն իրականացնելիս կարողանալ գալ վերջնարդյունքի, ինչը կձևավորի աշատնքը կատարելիս այն բերել ավարտուն, ամբողջական տեսքի ունակություն

Վերջնարդյունքը

Ապացույցի մեթոդի կիրառությունը սովորողների մոտ ինքնաճանաչողական,սովորել սովորելու և մաթեմատիկական կարողունակություններ կձևավորի ու զարգացնի:

Գլուխ1
Ապացուցման մեթոդների տեսակները

«Մաթեմատիկական ապացուցում» հասկացության հետ մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում իրար հետ սերտորեն կապված են նրա հետևյալ երեք բաղադրիչները՝ ապացուցվելիք պնդումը (թեորեմը կամ խնդիրը), ապացուցման մեթոդը և նրա բովանդակային բաղադրիչը (հիմքերի՝ փաստարկների հավաքածուն): «Փիլիսոփայական հանրագիտարանային բառարանում» մեթոդը սահմանվում է որպես «իրականության պրակտիկ և տեսականորեն յուրացնելու համար անհրաժեշտ հնարքների և գործողությունների հավաքածու» ([9; 364]), իսկ ապացուցումը՝ «ճշմարտության հաստատման ընթացք (մեթոդ), դատողության ճշմարտացիության հիմնավորում» ([9; 173]): Այդ իսկ պատճառով էլ, որպես աշխատանքային սահմանում, այսուհետև մաթեմատիկական պնդման ապացուցման մեթոդ ասելով, կհասկանանք մաթեմատիկական պնդման ճշմարտացիությունը հաստատելու համար անհրաժեշտ հաջորդական, տրամաբանական գործողությունների (մտահանգումների) վերջավոր հավաքածու:

Ապացուցման մեթոդների դասակարգմամբ զբաղվել են շատ տրամաբաններ՝ Արիստոտել, Մ. Ի. Կորինսկի, Վ. Ֆ. Ասմուս, Գ. Ա. Բրուտյան և ուրիշներ: Տրամաբանությունում ընդունված է ապացուցման մեթոդները դասակարգել ըստ տարբեր հատկանիշների՝ «ըստ տանելու եղանակի», «ըստ մտահանգման ձևի, որով եզրափակվում է ապացուցումը», «ըստ բովանդակության ճշմարտացիության և հիմքերի ու թեզիսի միջև տրամաբանական կապի ճշտության» և այլն: Ըստ ապացուցումը տանելու եղանակի՝ զանազանվում են ուղիղ (ուղղակի) և անուղղակի ([3], [4], [5], [6] և այլն), ըստ եզրափակիչ մտահանգման ձևի՝ ինդուկտիվ և դեդուկտիվ ([3], [6] և այլն) ապացուցումներ:

Յոգեբանության մեջ առանձնացվում են մտածողության երկու տեսակ՝ ինտուիտիվ և տրամաբանական :Ինտուիտիվ մտածողությունը բնութագրվում է արագ ընթացքով,հստակ փուլերի բացակայությամբ,նվազագույն գիտակցվածությամբ, իսկ տրամաբանական մտածողությունը բացված է ըստ ժամանակի, ունի հստակորեն ընդգծված փուլեր և որոշակիորեն ներկայացված է մտածող մարդու գիտակցությունում:Տրամաբանական մտածողության կարևոր բաղադրիչը սովորողի ապացուցողական կարողության ձևավորումն է :

«Մաթեմատիկական ապացուցում» հասկացության հետ մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում իրար հետ սերտորեն կապված են նրա հետևյալ երեք բաղադրիչները՝ ապացուցվելիք պնդումը (թեորեմը կամ խնդիրը), ապացուցման մեթոդը և նրա բովանդակային բաղադրիչը (հիմքերի՝ փաստարկների հավաքածուն):

Սույն հետազոտության համար հիմք է ծառայում ապացուցման մեթոդների դասակարգումն ըստ տանելու եղանակի: Ապացույցը, որը հիմնված է ինչ-որ անտարակուսելի սկզբի վրա, որից անմիջականորեն արտածվում է թեզիսի ճշմարիտ լինելը, կոչվում է **ուղիղ** ապացույց: Ապացույցը կոչվում է **անուղղակի** (ոչ ուղիղ), եթե թեզիսի ճշմարիտ լինելը հիմնավորվում է թեզիսին հակադիր պնդման ճշմարտացիության հերքման միջոցով:Գիտամեթոդական գրականության վերլուծությունը ցույց է տալիս, որ հետազոտողները որպես ուղիղ ապացուցման տարատեսակներ նշում են **համադրման և վերլուծական-համադրման մեթոդները**, իսկ որպես անուղղակի ապացուցումներ՝

հակասության (հակասող ենթադրության) և բացառության մեթոդները:

Համադրման կոչվում է ապացուցման այն մեթոդը, որի հիմքում ընկած է մի դատողություն, որը ելնում է նրանից, ինչ արդեն տրված (հայտնի) է և ավարտում նրանով, ինչը պահանջվում է հաստատել, ապացուցել:

Վերլուծական-համադրման մեթոդը ապացուցման այնպիսի եղանակ է, երբ նախ պնդման (խնդրի) եզրակացությունը (պահանջը) այնքան է մոտեցվում պայմանին, մինչև որ հստակ երևում է դատողությունների շղթայի՝ համադրման մեթոդի առաջին քայլը (սկիզբը): Դրանից հետո միանում է համադրման մեթոդը և հակառակ կարգով շարադրելով վերլուծությունը՝ ավարտում ապացուցումը ([5; 25-26]):

Անուղղակի ապացուցման ամենատարածված տեսակը **հակասության** մեթոդն է, որը հաճախ գիտամեթոդական գրականության մեջ անվանվում է **հակասող ենթադրության** մեթոդ, ապագոգիկ անուղղակի ապացուցում, կամ ապացուցում՝ անհեթեթության հանգեցմամբ ([5; 26]): Սա «ոչ ուղիղ կամ ասես մի կողմ ուղղված ապացուցում է. որևէ պնդման ճշմարիտ լինելը ուղիղ և դրականորեն հաստատող փաստերի փոխարեն ժամանակավորապես ընդունվում է հակադիր պնդման ճշմարտությունը, որից արտածվում է հետևանք, որի արդյունքում մենք հանգում ենք հակասության: Դրա հիման վրա արվում է հետևություն, որ հակադիր պնդումը կեղծ է, և, հետևաբար ճշմարիտ է ապացուցվելիք պնդումը» ([6; 46]): Այսպիսով՝ «հակասության մեթոդն ապացուցման այնպիսի եղանակ է, երբ ուղիղ ճանապարհով պայմանից պահանջը գնալու փոխարեն ենթադրվում է պահանջի հակադիր պնդման (ժխտման) ճշմարիտ լինելը, այստեղից այնուհետև արտածվում է հակասություն, որի հիման վրա հայտարարվում է, թե ճշմարիտ է ապացուցվելիք պնդումը» ([1; 33]): Ինչպես հայտնի է, ուղիղ ապացույցը հենված է մի ենթադրության վրա, ըստ որի՝ պնդման պայմանը պարունակում է բավարար տեղեկություններ՝ եզրակացությանը հանգեցնող և տրամաբանորեն իրար հետ կապված քայլերի վերջավոր շղթա (հաջորդականություն) կառուցելու համար: Սակայն առանձին պնդումներն ապացուցելիս հաճախ մեզ չի հաջողվում գտնել ուղիղ ճանապարհով պնդման պայմանից դեպի եզրակացությունը ընթացող դատողությունների շղթան: Նման բան կարող է լինել ոչ թե այն պատճառով, որ մենք պարզապես անկարող ենք դա կատարել, այլ այն պատճառով, որ մարդկությանը պնդման A պայմանից դեպի B եզրակացությունը գնացող ուղիղ ճանապարհ դեռևս հայտնի չէ կամ էլ պարզապես հնարավոր չէ գտնել:

Անուղղակի ապացուցման հաջորդ տեսակը **բաժանարար կամ բացառության մեթոդով** կատարած ապացուցումն է: Այն կիրառվում է այն դեպքում, երբ հայտնի է, որ ապացուցվելիք թեզը, օրինակ, « B1 կամ B2 կամ B3 » ճշմարիտ բաժանարար պնդման բաղադրիչներից մեկն է (օրինակ՝ B1 -ը): Մեթոդի կառուցվածքը հետևյալն է. նախ որոնվում է վերոհիշյալ բաժանարար ճշմարտությունը, ապա հակասության մեթոդով մեկ առ մեկ բացառվում են բոլոր՝ (B2 և B3) դեպքերը՝ բացի մեկից՝ B1 -ից: Սրա հիման վրա եզրակացվում է, որ ճշմարիտ է B1 -ը ([1; 33]): Ինչպես նշում է Գ. Բրուտյանը, «բաժանարար անուղղակի ապացուցման դեպքում քննարկվող հարցի վերաբերյալ սովորաբար գոյություն են ունենում մի շարք ենթադրություններ, որոնցից մեկն էլ ապացուցվող թեզն է: Մեկ առ մեկ ժխտվում են, ապացուցվող թեզից բացի, մյուս ենթադրությունները, մնում է միակ ենթադրությունը՝ ապացուցվող թեզը, որը և համարվում է ապացուցված՝ որպես միակ հնարավոր ենթադրություն տվյալ հարցի վերաբերյալ» ([3; 262]): Բաժանարար դատողությունն այնպիսի «դատողություն է, որում ասվում է, որ տրված առարկային վերագրվում է (կամ չի վերագրվում) այդ դատողության մեջ նշված հայտանիշներից միայն մեկը» ([6; 507]):

Բացի վերոհիշյալ՝ ուղիղ և անուղղակի մեթոդներից՝ տրամաբանությունում և ուսումնամեթոդական գրականությունում կիրառվում են նաև երկու մեթոդներ, որոնք հավասար իրավունքով հաճախ դասվում են ինչպես ուղիղ, այնպես էլ անուղղակի մեթոդների թվին: Դրանք լրիվ ինդուկցիայի և կառուցարկման մեթոդներն են: Լրիվ ինդուկցիան ինդուկտիվ մտահանգման տեսակ է, որի արդյունքում ընդհանուր պնդում է արվում ինչ-որ առարկաների ողջ բազմության մասին, այդ բազմության, առանց բացառության, բոլոր առարկաների մասին ունեցած գիտելիքների հիման վրա միայն: Լրիվ ինդուկցիայի մեթոդը հիմնված է լրիվ ինդուկցիայի կանոնի վրա, որի բանաձևը հետևյալն է ([5; 27]). S1-ը P է, S2-ը P է, S3-ը P է: Բայց S1, S2, S3-ը ամբողջովին սպառում են S-ը: Հետևաբար՝ S-ը P է: Տրամաբանությունում զանազանվում է լրիվ ինդուկցիայի երկու տեսակ. 1. լրիվ ինդուկցիա նմուշներից (վերջավոր բազմության տարրերից) դեպի դասը (բազմությունը): Լրիվ ինդուկցիայի այս տեսակը կիրառվում է, երբ դասի նմուշների կամ բազմության տարրերի քանակը մեծ չէ: 2. Լրիվ ինդուկցիա տեսակներից (ենթաբազմություններից) դեպի դասը (բազմությունը): Ինդուկցիայի այս տեսակը հաճախ է կիրառվում մաթեմատիկայում, երբ բազմության տարրերի քանակը շատ մեծ է, կամ բազմությունն անվերջ է [5; 28]: Այն դեպքում, երբ ապացուցվելիք առնչության որոշման տիրույթը N-ն է, կիրառվում է լրիվ ինդուկցիայի մի այլ տեսակ՝ լրիվ մաթեմատիկական կամ պարզապես մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը: Այս մեթոդը հիմնված է մաթեմատիկական ինդուկցիայի սկզբունքի վրա. «n բնական պարամետրից կախված A(n) պնդումը համարվում է ապացուցված, եթե ապացուցված է A(1)-ը և ցանկացած n բնական թվի համար այն ենթադրությունից, որ A(n)-ը ճշմարիտ է, արտածվում է, որ ճշմարիտ է նաև A(n+1)-ը» [7; 338]:

Կառուցարկման (կոնստրուկտավորման) մեթոդը կիրառվում է օբյեկտի (հարաբերության) գոյության ապացույցներում: Այն ունի անչափ մեծ կիրառության շառավիղ ոչ միայն երկրաչափությունում, այլև մնացած՝ մաթեմատիկական, բնական, հասարակական գիտություններում ([5; 29]): Կառուցարկման մեթոդը չունի որոշակի տրամաբանական կառուցվածք: Որոշակիորեն, կարելի է ասել, որ այս մեթոդով կատարված ապացուցումներն ունեն երկու փուլ՝ ա) որոնելի օբյեկտի կառուցարկում («կառուցում» և բ) ապացուցում (որ այդկերպ «կառուցված» օբյեկտը այն է, ինչի գոյությունը պահանջվում էր ապացուցել): Բացի ապացուցման վերոհիշյալ մեթոդներից՝ հաճախ հանդիպում է ապացուցման ևս մեկ տեսակ, որը որոշակիորեն տարբերվում է թվարկված մեթոդներից: Ապացուցման այդ տեսակը որևէ թեզի սխալ կամ անհիմն լինելու ապացուցումն է՝ հերքումը: Ըստ Գ. Բրուտյանի՝ տրամաբանությունում զանազանվում է հերքման երեք հիմնական ձև: 1. Թեզը հերքելու ժամանակ այդ թեզին հակադրում են այնպիսի փաստեր, որոնցից ուղղակի բխում է հերքվող թեզի սխալ լինելը: Հերքման այս ձևը կոչվում է հերքում փաստերի միջոցով: 2. Ապացուցում են հերքվող թեզին հակասող թեզի` հակաթեզի ճշմարիտ լինելը և երրորդի բացառման օրենքի համաձայն` սխալ համարում հերքվող թեզը: 3. Այս դեպքում ենթադրում ենք հերքվող թեզի ճշմարիտ լինելը և ուսումնասիրում, թե ինչ հետևանքներ են բխում այդ թեզից: Նկատելով, որ տվյալ հետևանքները հակասում են գոյություն ունեցող հայտնի ճշմարտություններին, եզրակացնում ենք այդ հետևանքների սխալ լինելը: Իսկ հետևանքների սխալ լինելուց էլ բխեցնում ենք հիմքի, այսինքն` հերքվող թեզի սխալ լինելը [3; 264]:

Գլուխ2

Միջնակարգ հանրակրթական դպրոցի մաթեմատիկայի դասընթացի ապացուցման մեթոդները

Մաթեմատիկական ապացուցումների ուսուցման մեթոդիկային նվիրված գրականությունում նշվում է, որ դպրոցական մաթեմատիկայի ամենակիրառական ապացուցման մեթոդը` համադրումը, ունի մեկ դժվարություն` ապացուցման առաջին, ինչպես նաև, ցանկացած հաջորդ քայլի ընտրությունը: Ինչպես գրում է Վ. Վ. Ռեպյովը, «այդ իմաստով մեթոդն ունի առանձնահատուկ թերություն: Ապացուցումը որոնողի տրամադրության տակ չկա ճանապարհի ընտրության որևէ չափանիշ. նա չգիտի` որ ճանապարհով պետք է գնա, որպեսզի պնդման պայմանը մոտեցնի եզրակացությանը: Ապացուցողի տրամաբանության տակ չկա նաև այն բանի չափանիշը, թե որպես ելակետային ինչ պնդումներ ընտրել, ինչպիսի հետևություններ կատարել դրանցից և այլն: Այնուամենայնիվ, այն ունի որոշակի նշանակություն` արժեք, հատկապես այն դեպքերում, երբ թեորեմի պայմանը եզրակացությանը կապող տրամաբանական իրավիճակները բարդ չեն» [8; 109]:

Գրեթե նույն դժվարություններն են ուղեկցում նաև բացառության մեթոդին: Չենց այդ դժվարություններն են պատճառը, որ ավանդաբար այդ մեթոդները դասվում են մաթեմատիկայի դասընթացի ամենաբարդ մեթոդների շարքին, իսկ այդ մեթոդներով կատարված ապացուցումները անմատչելի են հիմնական դպրոցի շատ սովորողների համար: Ավանդաբար դժվար մեթոդների շարքին է դասվում նաև կառուցարկման մեթոդը: Համենայն դեպս, երկրաչափությունում դա այդպես է (որպես օրինակ՝ տե՛ս [43] աշխատանքի էջ 30-ում բերված խնդրի լուծումը կառուցարկման մեթոդով. երկու փուլ՝ կառուցարկում, ապացուցում և տասը տրամաբանական քայլ): Ուսումնասիրությունները ցույց են տալիս, որ երկրաչափության և հանրահաշվի դպրոցական դասընթացների ապացուցման առաջատար մեթոդը համադրումն է: Միաժամանակ այն ցանկացած այլ մեթոդով կատարված ապացուցումների բաղկացուցիչ մաս է:

Վերլուծական-համադրման մեթոդի էությունից բխում է, որ այդ մեթոդով իրականացված ապացուցումներում կիրառվում են պնդման եզրակացության վերլուծությունը և համադրումը: Ընդ որում, եթե վերլուծության ընթացքում ամենուրեք պահպանվում է բանաձևերի համարժեքությունը, ապա համադրումն ավելորդ է: Անուղղակի ապացուցման մյուս տեսակի՝ բացառության մեթոդի էությունից բխում է, որ այդ մեթոդով իրականացված անուղղակի ապացուցումները հանգում են բացառության կառույցի կիրառմանը1 և հակասության մեթոդով մնացած այլընտրանքների (դեպքերի) բացառմանը՝ հերքմանը: Մաթեմատիկական ապացուցումների վերլուծությունը ցույց տվեց նաև, որ կառուցարկման մեթոդով կատարված ապացուցումը սկսվում է այն օբյեկտի (հարաբերության) կառուցարկումից, որի գոյությունը պահանջվում է ապացուցել, և ավարտվում է ապացուցումով, այսինքն՝ այն փաստի հիմնավորմամբ, որ այդպես կառուցարկված օբյեկտը (հարաբերությունը) իսկապես պատկանում է թեորեմի (խնդրի) պայմանով որոշվող օբյեկտների դասին: Ընդ որում՝ սովորաբար այդ փաստի ապացուցումը կատարվում է «փաստի տակ տանելու» գործողությամբ (համադրման մեթոդով տրված հասկացությունը բնութագրող հատկանիշների իրականացման ստուգում):

Լրիվ ինդուկցիայի մեթոդը կիրառվում է պնդման ընդհանրության շնորհիվ սովորողներին հայտնի բաժանարար դատողության միջոցով ընդհանրության քվանտորի որոշման տիրույթը տրոհվում է չհատվող և ոչ դատարկ դասերի (դեպքերի): Այդ պատճառով լրիվ ինդուկցիայի կառույցը ենթադրում է. 1) սովորողներին հայտնի ճշմարիտ բաժանարար դատողության որոնում, 2) թեորեմի բացատրամասում խոսվող օբյեկտների բազմության տրոհում դեպքերի (դասերի), 3) ուղիղ կամ անուղղակի մեթոդներով թեորեմի ապացուցում յուրաքանչյուր դեպքում, 4) լրիվ ինդուկցիայի կանոնի կիրառում:

Այսպիսով՝ կատարած վերլուծությունները թույլ են տալիս եզրակացնել, որ ապացուցման գործընթացներում, բացի համադրման մեթոդից, ապացուցման մնացած մեթոդներից և ոչ մեկը «մաքուր» վիճակում, միայնակ չի գործում, այլ դրանք կիրառվում են որոշակի հավաքածուներով՝ միակցություններով: Ընդ որում՝ յուրաքանչյուր ապացուցումում կարելի է առանձնացնել ապացուցման առաջատար մեթոդը և նշել օժանդակ մեթոդները: Առաջատար մեթոդը սկսում է և ավարտում ապացուցումը, տանում է ապացուցման ընդհանուր գիծը՝ մարտավարությունը, իսկ օժանդակ մեթոդները կատարում են միջանկյալ աշխատանք՝ իրենց վրա վերցնելով առանձին դեպքերի հիմնավորումը կամ հերքումը և այլն:

Ավանդաբար ապացուցման եղանակը բնութագրելիս անվանվում է միայն առաջատար մեթոդը, օրինակ՝ «ապացուցում հակասության մեթոդով» կամ «ապացուցում լրիվ ինդուկցիայի մեթոդով» և այլն: Հենց այս իմաստով էլ կարելի է խոսել ոչ թե առանձին մեթոդի, այլ մեթոդների միակցության (կոմպլեքսի) մասին՝ ավանդաբար շարունակելով դրանք անվանել յուրաքանչյուրն ըստ իր առաջատար մեթոդի:

Այսպիսով՝ միջնակարգ հանրակրթական դպրոցի մաթեմատիկայի դասընթացում գործում են ապացուցման մեթոդների հետևյալ միակցությունները (կոմպլեքսները).

1. համադրման մեթոդ,
2. վերլուծական-համադրման մեթոդ = [վերլուծություն] + [համադրման մեթոդ],
3. հակասության մեթոդ = [հակասության կառույց] + [համադրման մեթոդ],
4. բացառության մեթոդ = [բացառության կառույց] + [հակասության մեթոդ]
5. հերքում հակաօրինակի մեթոդով = [օբյեկտի կառուցարկում, որոնում] +[համադրման մեթոդ]:
6. կառուցարկման մեթոդ = [օբյեկտի կառուցարկում] + [համադրման մեթոդ],
7. լրիվ ինդուկցիայի մեթոդ = [լրիվ ինդուկցիայի կառույց] + [համադրման մեթոդ] կամ [հակասության մեթոդ],
8. մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդ = [մաթ.ինդուկցիայի սկզբունք] + [համադրման մեթոդ]:

Գլուխ 3

Միջնակարգ դպրոցի դասագրքերում հանդիպող որոշ խնդիրների քննարկում

Դիտարկենք մի քանի օրինակներ , որտեղ որպես ապացույցի եղանակ ընտրված է վերոհիշյալ եղանակներից որևէ մեկը, կամ դրանց համակցությունը:

Օրինակ1 Ապացուցել, որ եթե p-ն 3-ց մեծ որևէ պարզ թիվ է ,ապա ($p^2 - 1$) թիվը բաժանվում է 24-ի:

Ապացույցը կտանենք վերլուծական-համադրման մեթոդով:Որպես փաստ կընդունենք որ 3-ից մեծ ցանկացած պարզ թիվ կենտ է և p թիվը երեքի բազմապատիկ չէ:Մյուս կողմից ($p^2 - 1$)=(p-1)(p+1):

Ակնհայտ է որ p-1 և p+1 թվերը p թվի նախորդ և հաջորդ զույգ թվերն են ,որոնցից մեկը 3-ի բազմապատիկ է,մյուս կողմից այդ թվերից մեկը

4-ի բազմապատիկ է ,ուստի առանց ընդհանրությունը խախտելու կընդունենք որ p-1=12k,իսկ p+1=2t, հետևաբար (p^2-1)=24kt տեսքի թիվ է , որը բաժանվում է 24-ի:

Օրինակ2 Ապացուցել ,որ $\frac{n^3}{6}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{3}$ արտահայտության արժեքը ամբողջ թիվ է(որտեղ n-ը բնական թիվ է):

Ապացույցը տանենաք համադրման մեթոդով.

$$.\frac{n^3}{6}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{3}=\frac{n^3+3n^2+2n}{6}=\frac{n(n^2+3n+2)}{6}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Նկատենք որ n,n+1,n+2 հաջորդական բնական թվեր են , որոնցից որևէ մեկը 2-ի բազմապատիկ է,իսկ որևէ մեկը 3-ի բազմապատիկ, ուստի ստացված կոտորակի համարիչը 6-ի բամապատիկ է, իսկ կոտորակի արժեքը ամբողջ թիվ n-ի կամայական արժեքի դեպքում:

Օրինակ 3 Ապացուցել որ $\sqrt{3}$ թիվը իռացիոնալ թիվ է:

Ապացույցը տանենաք հակասող ենթադրությամբ,այսինքն ընդունենք որ $\sqrt{3}$ թիվը ռացիոնալ թիվ է:Այդ դեպքում $\sqrt{3}=\frac{m}{n}$,(որտեղ $\frac{m}{n}$ կոտորակը անկրճատելի կոտորակ է):Բարձրացնենք վերջին հավասարաման երկու մասը քառակուսի կստանանք $m^2=3n^2$ (1) ,որտեղից կհետևի որ m-ը 3-ի բազմապատիկ թիվ է, այսինքն m=3k,տեղադրելով (1)արտահայտության մեջ կստանանք $n^2=3k^2$,այսինքն n-ը ևս 3-ի բազմապատիկ թիվ է:Արդյունքում կատարված ենթադրությունը հանգեցրեց այն եզրակացության ,որ m և n թվերը 3-ի բազմապատիկ են ,ուստի $\frac{m}{n}$ կոտորակը կլինի կրճատելի,ինչը հակասում է պայմանիան ,ուստի կատարված ենթադրությունը կեղծ է,իսկ պնդումը ճշմարիտ:

Օրինակ4 Բացառության մեթոդով կարելի է հասնել միջին դասարաններում հետևյալ բովանդակությամբ խնդիրների լուծմանը:

Տղայի գրպանում ութ դրամ ընդհանուր արժողությամբ երկու մետաղադրամ կա:Մետաղադրամներից մեկը հինգդրամանոց չէ:Ի՞նչ մետաղադրամներ էին տղայի գրպանում, եթե շրջանառության մեջ տվյալ ժամանակաշրջանում կային մեկդրամանոց,երեքդրամանոց,հինգդրամանոց և դասդրամանոց մեըաղադրամներ:

Ենթադրենք առաջին մետաղադրամը x դրամանոց է , և $x\neq 5$, իսկ մյուսը՝ y դրամանոց, ուստի x+y=8,որտեղ x=1 կամ x=3 կամ x=10:

Երբ x=1, ապա y=7 որը հնարավոր չէ:

Երբ x=10 y- ի արժեքը կլինի բացասական ,որը նույնպես հնարավոր չէ:

Մնում է x=3 և y=5:

Պատասխան ՝ տղայի գրպանում հինգդրամանոց և երեքդրամանոց մետաղադրամներ էին:

Օրինակ 5.Պարզել պնդման ճշմարտացիությունը.ցանկացած n բնական թվի համար $\square^2 + \square + 17$ արտահայտության արժեքը պարզ թիվ է:

Պնդման ճշմարտացիությունը ապացուցելու կամ հերքելու համար որպես հակաօրինակ բավական է դիտարկել n=17k տեսքի թվերը և համոզվել որ այդ տեսքի թվերի դեպքում արտահայտությունը կբաժանվի 17-ի, ուստի այն բաղադրյալ թիվ կլինի և պնդումը կլինի կեղծ:

Կառուցարկման մեթոդից հինականում օգտվում են երկրաչափության դասընթացում:

Օրինակ7 Լրիվ ինդուկցիայի մեթոդով ապացուցենք ,որ կամայական a և b թվերի համար ճշմարիտ է $|\square| - |\square| \leq |\square - \square|$ անհավասարությունը:

Լրիվ ինդուկցիա կիրառելու համար դիտարկենք a և b թվերի հնարավոր դեպքերը.

ա/ $\square \geq 0; \square \geq 0$

բ/ $\square > 0; \square \leq 0$

գ/ $\square \leq 0; \square > 0$

դ/ $\square < 0; \square < 0$

Ինչպես տեսնում ենք նշված դեպքերում ներառվեցին a և b թվերի բոլոր հնարավոր դեպքերը:Ապացուցենք անհավասարությունը դեպքերից յուրաքանչյուրի համար:

ա/ եթե $\square \geq 0; \square \geq 0$ և a$\geq \square$,ապա $|\square| - |\square| = |\square - \square|$,իսկ եթե $\square \geq 0; \square \geq 0$ և a$\leq \square$,ապա $|\square - \square| \geq 0 \geq |\square| - |\square|$,որտեղից էլ կհետևի $|\square| - |\square| \leq |\square - \square|$

բ/ եթե $\square > 0; \square \leq 0$, ապա $|\square - \square| = |\square|+|\square|>|\square| - |\square|$,որտեղից էլ պարզ կդառնա $|\square| - |\square| \leq |\square - \square|$ առնչությունը

գ/ եթե $\square \leq 0; \square > 0$,ապա $|\square - \square|=|\square|+|\square|>|\square| - |\square|$,որտեղից էլ պարզ կդառնա $|\square| - |\square| \leq |\square - \square|$ առնչությունը

դ/եթե $\square < 0; \square < 0$ ապա $|\square - \square| = |\square| - |\square| > |\square| - |\square|$, եթե $|\square| > |\square|, |\square - \square| = |\square| - |\square|$, եթե $|\square| < |\square|$:Դիտարկված երկու դեպքում էլ $|\square| - |\square| \leq |\square - \square|$:

Քանի որ a և b թվերի բոլոր հնարավոր դեպքերի համար հաստատվեց անհավասարման ճշմարտացիությունը, ուստի անհավասարումը ճշմարիտ է :

Վերջին մեթոդը՝ մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը, լայն կիրառություն ունի հանրահաշվի դասընթացում :Այն կարելի է կիրառել գումարներ հաշվելիս,նույնություններ ապացուցելիս,անհավասարություններ ապացուցելիս,բաժանելիության վերաբերյալ խնդիրներում,թվային հաջորդականություններ ուսումնասիրելիս, եռանկյունաչափական խնդիրներում:

Բերենք դրանցից մի օրինակ:

Ապացուցել, որ ցանկացած n-ի դեպքում $(4^{n}+15n-1)$բաժանվում է 9-ի:

Պնդումն ապացուցենք n=1դեպքի համար, իրոք երբ n=1 կստանանաք 4+15-1=18 և պնդումը իրավացի է:

Ենթադրենք պնդումը ճշմարիտ է n=k դեպքում , այսինքն $4^{n}+15n-1$ արտահայտությունը բաժանվում է 9:

Ապացուցենք որ n=k+1 դեպքում ևս պնդումը ճշմարիտ է .

$$4^{n+1}+15(n+1)-1=4\cdot 4^{n}+15n+15-1=4^{n}+15n-1+3\cdot 4^{n}+15$$
$$=(4^{n}+15n-1)+3(4^{n}+5)$$

Վերջին գումարի առաջին գումարելին ըստ ինդուկտիվ ենթադրության բաժանվում է 9-ի, իսկ երկրորդ գումարելին ևս բաժանվում է 9-ի, քանի որ մաթեմատիկական ինդուկցիայի միջոցով կարող ենք ապացուցել ,որ $(4^{n}+5)$-ը բաժանվում է 3-ի:Իրոք երբ n=1 4+5=9 և բաժանվում է 3-ի:

Ենթադրենք n=k դեպքոիմ պնդումը ճշմարիտ է:Ապացուցենք , որ այն ճշմարիտ է n=k+1 դեպքի համար:Իրոք $4^{n+1}+5=4\cdot 4^{n}+5=3\cdot 4^{n}+(4^{n}+5)$ Վերջին արտահայտության մեջ առաջին գումարելին 3-ի բազմապատիկ է, իսկ երկրորդ գումարելին բաժանվում է երեքի ըստ ինդուկտիվ ենթադրության:Այսպիսով վերադառնալով բուն առաջադրանքին տեսնում ենք, որ n=k+1դեպքի համար $4^{n+1}+15(n+1)-1$ արտահայտությունը բաժանվում է 9-ի, ուստի պնդումը իրավացի է n-ի ցանկացած արժեքի համար:

Օգտագործված գրականության ցանկ

1. Այվազյան Է. Ի., «Մաթեմատիկական ապացուցումների ուսուցման մեթոդաբանական հիմունքները», Ե., 2013, 306 էջ:

2. Այվազյան Է. Ի <<Մաթեմատիկայի դասավանդման մեթոդիկա>> Եր., ԵՊՀ հրատ., 2016, 202 էջ:

3. Բրուտյան Գ. Ա., Տրամաբանության դասընթաց, -Ե., ԵՊՀ հրատարակչություն, 1976, 507 էջ:

4. Գևորգյան Գ. Գ., Սահակյան Ա. Ա, Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր - 10, 11, 12 (երեք գրքով)։ Ընդհանուր և հումանիտար հոսքեր, Ե. «Էդիթ Պրինտ», 2009, 136 էջ, 2010, 128 էջ, 2011, 128 էջ։

5. Асмус В. Ф., Логика. “Госполитиздат”, 1947, -387 стр

6. Кондаков М. И., Логический словарь-справочник. 2-е изд., испр. и доп, М., “Наука”, 1975, 717 стр.

7. Математический энциклопедический словарь, М., 1983, 847 стр.

8. Репьев В. В., Общая методика преподавания математики, М., “Учпедгиз”, 1958, 223 стр.

9. Философский энциклопедический словарь, М., “Советская энциклопедия”, 1983, 840 стр.