**ՇԻՐԱԿԻ Մ. ՆԱԼԲԱՆԴՅԱՆԻ ԱՆՎԱՆ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ**

**ԱՎԱՐՏԱԿԱՆ ՀԵՏԱԶՈՏԱԿԱՆ ԱՇԽԱՏԱՆՔ**

**ԹԵՄԱ․***ՊԱՍԿԱԼԻ ԵՌԱՆԿՅՈՒՆԸ ԵՎ ՄԻԱՑՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՏԱՐՐԵՐԸ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ԴՊՐՈՑԱԿԱՆ ԴԱՍԸՆԹԱՑՈՒՄ*

Մասնագիտություն՝ Մաթեմատիկա

Կատարող՝ Էդգար Մարմոյան

Ստորագրություն

Գնահատական՝-----------------------------------------

Դասախոս՝ Ալվարդ Սարուխանյան

Ստորագրություն

Գյումրի 2022

Բովանդակություն

[ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ 3](#_bookmark0)

Գլուխ 1․1 Պասկալի եռանկյունը 5

* 1. Պասկալի գործողությունը 12
  2. Երկանդամային գործակիցներ 16

1․4 Տրված բազմության մասերի քանակը 19

Գլուխ 2. Պասկալի եռանկյան թվերի հատկությունների կիրառությունները 25

* 1. Պասկալի եռանկյունը և զուգորդությունների թիվը 25
  2. Պասկալի եռանկյունը և ֆակտորիալները 26
  3. Պասկալի եռանկյունը և Նյուտոնի երկանդամը 28
  4. Պասկալի եռանկյունը և պարզ թվերը 30
  5. Պասկալի եռանկյունը և Ֆիբոնաչիի թվերը: Պասկալի և Սերպինսկու եռանկյունները:.33

[ԵԶՐԱԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆ 3](#_bookmark17)5

[ՕԳՏԱԳՈՐԾՎԱԾ ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՑԱՆԿ 38](#_bookmark18)

# ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Բլեզ Պասկալը (1623, Կլերմոն-Ֆերան - 1662, Փարիզ) ֆրանսիացի փիլիսոփա, գրող, մաթեմատիկոս և ֆիզիկոս է: Նրա անունով է կոչվում ճնշման միավորը (պասկալ) և ծրագրավորման հայտնի լեզուն:

Բլեզ Պասկալը հորինել է սովորական մեքենա և մեխանիկական հաշվիչ սարք, որն իրենից ներկայացնում էր գումարող սարք, որը հնարավորություն էր տալիս գումարել վեցանիշ թվերը թվարկության տասնորդական համակարգում: Այս սարքում կիրառվող միացված անիվների սկզբունքը հաջորդ երեք հարյուրամյակների ընթացքում կիրառվում էր բազմաթիվ հաշվիչ սարքերում:

Պասկալը փորձել է ընդհանրացնել «Սնդիկի բաց մակերեսի վրա օդի ճնշման» մասին Տորրիչելլիի կատարած եզրակացությունները (նա օգտագործել է տարբեր ձևի խողովակներ, դրանք լցրել է տարբեր հեղուկներով և կազմակերպել է հանրային ցուցադրություններ: Սակայն չափազանց շատ աշխատելը հանգեցրեց կոկորդի հաճախցած ջղաձգման և ուժեղ գլխացավերի): 1647 թվ.-ին Պասկալը վերադարձել է Փարիզ, հանդիպել Ռենե Դեկարտի հետ և հրատարակել է «Դատարկության վերաբերյալ նոր փորձեր» աշխատանքը: 1647թվ.-ի վերջերին նա խնդրել է իր փեսային՝ Ֆլորեն Պերյեին, անցկացնել բարոմետրական փորձարկումներ Պյուի-դե- Դոմ լեռան գագաթին և ստորոտում, որը վեր է խոյանում Կլերմոն-Ֆերրանի վրա: Այդ հայտնի փորձարկումները, որոնք անցկացվել են միայն 1648թվ.-ին, ճանապարհ հարթեցին հիդրոդինամիկայի (ջրուժաբանություն) և հիդրոստատիկայի (ջրակայունություն) ոլորտում համակարգված հետազոտությունների իրականացման համար: Այդ փորձարկումները վերացրեցին հին պատկերացումներն այն մասին, որ բնությունը «վախենում է» դատարկությունից: Իրականացրած փորձարկումների արդյունքում Պասկալին հաջողվեց կատարել մի շարք գյուտեր (մասնավորապես, ներարկիչը և ջրաբաշխական մամլիչը) և կատարելագործել բարոմետրի կառուցվածքը: Ջրաբաշխական մամլիչը գործում էր Պասկալի կողմից առաջին անգամ ձևակերպված և նրա անունը կրող հետևյալ ֆիզիկական օրենքի հիման վրա. մակերևույթային ուժերի ազդեցության դեպքում հեղուկի բոլոր կետերում ճնշումը

նույնն է: Բլեզ Պասկալին է պատկանում կանոնավոր քաղաքային տրանսպորտի առաջին ձևի՝օմնիբուսի ստեղծման գաղափարը, իսկ «Մտքեր» գրքում Բլեզ Պասկալի կողմից շարադրված փիլիսոփայական մտքերը մեծ ազդեցություն են գործել շատ հայտնի մարդկանց, մասնավորապես՝ այնպիսի հայտնի ռուս գրողների վրա, ինչպիսիք են Ի. Ս. Տուրգենևը, Ֆ. Մ. Դոստոևսկին, Լ. Ն. Տոլստոյը: Բլեզ Պասկալը և Պիեր Ֆերման իրենց նամակագրության մեջ ներկայացրել են հավանականությունների տեսության սկզբունքները:

Առավել հայտնի մաթեմատիկական աշխատանք է համարվում Պասկալի

«Տրակտատ թվաբանական եռանկյան մասին» աշխատանքը, որը ձևավորվել է երկանդամային գործակիցների միջոցով (Պասկալի եռանկյուն): Իսկ ահա հայտնի չորրորդ կարգի կոր «Պասկալի խխունջ»-ն այդպես է անվանվել Բլեզ Պասկալի հոր՝ Էտյենի պատվին, ով համադրում էր պետական ծառայությունը (հարկահավաք) մաթեմատիկայի ուսումնասիրման հետ: Բլեզ Պասկալի առաջին մաթեմատիկական տրակտատը, որը կոչվում էր «Կոնական հատույթների տեսության փորձ» (1639), համարվում էր Ժ. Դեզարգի աշխատանքների զարգացումը և պարունակում էր պրոյեկտիվ երկրաչափության հիմնական թեորեմներից մեկը՝Պասկալի թեորեմը:

Թվերի բազմությունը, որը ձևավորում է Պասկալի եռանկյունը հայտնի էին Պասկալից առաջ, սակայն չնայած այդ ամենին Պասկալը մշակեց դրանք օգտագործելու տարբեր եղանակներ և առաջինն էր ով հավաքեց ողջ ինֆորմացիան իր [Traité du triangle arithmétique](https://hy.wikipedia.org/w/index.php?title=Trait%C3%A9_du_triangle_arithm%C3%A9tique&action=edit&redlink=1) ([1653](https://hy.wikipedia.org/wiki/1653)) գիտական աշխատության մեջ։ Այդ թվերի սկզբնական աղբյուր են հանդիսանում կոմբինատորիկայի և բինոմական թվերի հնդկական տարբեր ուսումնասիրություններ։

Պասկալի եռանկյունը շատ պարզ կառուցվածք ունի: Միևնույն ժամանակ այն իր մեջ թաքցնում է անսպառ գանձեր և միմյանց է կապում մաթեմատիկայի տարբեր բնագավառներ, որոնք առաջին հայացքից ոչ մի ընդհանուր բան չունեն: Պասկալի եռանկյան այդչափ անսովոր հատկությունները թույլ են տալիս այն համարել ամենահետաքրքիր սխեմաներից մեկը ողջ մաթեմատիկայում:

* 1. 1 Պասկալի եռանկյունը

Դիտարկենք թվերի որևէ d0, d1, …, dn, n = 0, 1, 2, …շարք (n = 0 դեպքում այս շարքը վերածվում է մի շարքի, որը կազմված է եզակիվ թվով d0 - ից): Այդ շարքից կազմենք թվերի նոր s0, s1, …, sn+1 շարք հետևյալ կանոնով.

s0 = d0, (3.1)

sk = dk+1 + dk (1 ≤ k ≤ n), (3.2)

sn+1 = dn (3.3)

Այս նոր տողի համար կասենք, որ այն ստացվել է նախորդ տողից Պասկալի օրենքով:3 Օրինակ՝ 2, 0, -2 տողից, ըստ Պասկալի օրենքի, ստացվում է 2, 2, -2, -2

տողը, իսկ այդ տողից՝ 2, 4, 0, -4, -2 տողը:

3Բլեզ Պասկալը (1623-1662թթ.) հայտնի ֆրանսիացի գիտնական է: Նա ուսումնասիրել է եռանկյունաձև թվային աղյուսակի հատկությունները, որի յուրաքանչյուր տող ստացվում է նախորդ տողից ըստ (3.1)-(3.3)

Դիտողություն 1. Եթե β տողը ստացվել է a տողից ըստ Պասկալի օրենքի, ապա β տողի անդամների գումարը հավասար է a տողի անդամների գումարի կրկնապատիկին: Իսկապես, եթե կատարվում են (3.1) – (3.3) առնչությունները, ապա՝

s0 + s1 + s2 + … + sn + sn+1 = d0 + (d0 + d1) + (d1 + d2) + … + (3.4)

+ (dn-1 + dn) + dn = 2(d0 + d1 + … + dn)

Դիտողություն 2. d0, …, dn թվերի շարքը կանվանենք սիմետրիկ, եթե ցանկացած 0-ից n ամբողջ k-ի դեպքում ճիշտ է հետևյալ հավասարությունը.

dk = dn-k (3.5)

s0, …, sn+1 թվերի շարքը, որը ստացվում է ըստ Պասկալի օրենքի d0, …, dn համաչափ շարքից, նույնպես համաչափ է: Դա ապացուցելու համար անհրաժեշտ է ստուգել հետևյալ հավասարությունը.

sk = s(n+1)-k (3.6)

k = 0, 1, …, n+1 –ի դեպքում: Բայց k = 0 և k =n+1 հավասարությունների դեպքում (3.6)-ը բխում է (3.1) - (3.3) առնչություններից և d0 = dn հավասարությունից, որը ստացվում է (3.5) առնչությունից k = 0 դեպքում: Եթե 1 ≤ k ≤ n, ապա կունենանք.

sk = dk-1 + dk = dn-(k-1) + dn-k = d(n+1)-k + d[(n+1)-k]-1 = (3.7)

= d[(n+1)-k]-1 + d(n+1)-k = s(n+1)-k

Հիմա դիտարկենք այն տողը, որը կազմված է 1 թվից: Այդ տողն անվանենք Պասկալի զրոյական տող: Ըստ Պասկալի օրենքի՝ այդ տողից կազմենք նոր տող, որը կանվանենք Պասկալի առաջին տող: Ըստ Պասկալի օրենքի Պասկալի առաջին տողից կազմենք Պասկալի երկրորդ տողը և այսպես շարունակ: Քանի որ ցանկացած հաջորդ տողին անցման ժամանակ այդ տողի անդամների քանակը ավելանում է միավորով, ապա Պասկալի n–րդ տողում կլինի n+1 թիվ: Չկատարելով ոչ մի հաշվարկ, այլ միայն դիտարկելով առաջին և երկրորդ դիտողությունները՝ կարելի է պնդել, որ՝

առնչությունների: Այդ աղյուսակը ստացել է «Պասկալի եռանկյուն» անվանումը: Այդ պատճառով օրենքը, որը դրված է այդ աղյուսակի ձևավորման հիմքում, անվանում ենք Պասկալի օրենք, իսկ աղյուսակի տողերը՝Պասկալի տողեր:

* Պասկալի n-րդ տողի թվերի քանակը հավասար է 2n, քանի որ մի տողից մյուս տողին անցում կատարելու դեպքում անդամների գումարը կրկնապատկվում է, իսկ զրոյական տողի համար այն հավասար է 20 = 1,
* Պասկալի բոլոր տողերը կլինեն համաչափ, քանի որ համաչափությունը պահպանվում է յուրաքանչյուր տողից հաջորդ տողին անցման ժամանակ, իսկ զրոյական տողը համաչափ(սիմետրիկ) է:

0-րդ տողից սկսած գրենք Պասկալի տողերն իրար տակ այնպես, որ յուրաքանչյուր տողի յուրաքանչյուր թիվ հայտնվի նախորդ տողի այն թվերի միջև, որոնց գումարը հենց այդ թիվն է: Մենք կստանանք անվերջ աղյուսակ, որը կոչվում է Պասկալի թվաբանական եռանկյուն, ինչպես նաև ուղղակի թվաբանական եռանկյուն կամ

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |  |
| 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 | 28 | 36 |  | |
| 1 | 4 | 10 | 20 | 35 | 56 | 84 |  | | |
| 1 | 5 | 15 | 35 | 70 | 126 |  | | | |
| 1 | 6 | 21 | 56 | 126 |  | | | | |
| 1 | 7 | 28 | 84 |  | | | | | |
| 1 | 8 | 36 |  | | | | | | |
| 1 | 9 |  | | | | | | | |
| 1 |  | | | | | | | | |

Պասկալի եռանկյուն: Ամբողջ աղյուսակը լրացնում է որևէ անկյան ներքին տարածությունը. 0-րդ, առաջին,…, n-րդ տողերով ձևավորված դրա ցանկացած

սկիզբն ունի եռանկյան տեսք:

Պասկալի եռանկյունը համաչափ է իր կիսորդի նկատմամբ: Այն լրացնող թվերն ունեն մի շարք հետաքրքիր հատկություններ (օր.՝ ցանկացած պարզ p թվի համար p- րդ տողի բոլոր թվերը, բացի 2 ծայրամասային թվերից, բաժանվում են p-ի):

Պարզ է, որ Պասկալի եռանկյան ձևավորման եղանակը հնարավոր էր գտնել առանց կիրառելու «Պասկալի օրենք» կամ «Պասկալի տող» հասկացությունները. Պասկալի եռանկյունը ուղղակի անվերջ թվային «եռանկյունաձև» աղյուսակ է, որտեղ

կողային հատվածներում գրված է 1 թվանշանը, և ցանկացած թիվ, բացի այդ կողային թվերից, ստացվում է այն երկու թվերի գումարի արդյունքում, որոնք գտնվում են այդ թվից աջ և ձախ: Պասկալի եռանկյունը այդպիսի տեսքով ներկայացվել է Պասկալի

«Թվաբանական եռանկյան մասին տրակտատ»-ում, որը հրատարակվել է 1665թվ.-ին՝ հեղինակի մահից հետո: Այժմ ներկայացվում է այնպիսի աղյուսակ, որում ցանկացած A թիվ հավասար է A-ից անմիջապես վերև գտնվող հորիզոնական շարքի թվի և A-ից անմիջապես ձախ գտնվող ուղղահայաց շարքի թվի գումարին:

Այսպիսով, մեր «Պասկալի եռանկյունը» տարբերվում է այն «եռանկյունից», որը դիտարկվել էր Պասկալի կողմից 45°-ի շրջադարձով:

Պասկալը մանրամասն ուսումնասիրել է իր «եռանկյան» հատկություններն ու օգտագործման տարբերակները, ինչի արդյունքում գտել է «եռանկյան» 3 հատկություն: Դրանք են.

1. աղյուսակում գրված ցանկացած A թիվ հավասար է իրեն նախորդող հորիզոնական շարքի թվերի գումարին՝ սկսած հորիզոնական շարքի ձախ հատվածից մինչև A թիվը,
2. աղյուսակում գրված ցանկացած A թիվ հավասար է իրեն նախորդող ուղղահայաց շարքի թվերի գումարին՝ սկսած ուղղահայաց շարքի վերին հատվածից մինչև A թիվը,

աղյուսակում գրված ցանկացած A թիվ, կրճատելով միավորով, հավասար է ուղղանկյունը լրացնող բոլոր թվերի գումարին, ընդ որում այդ ուղղանկյունը սահմանափակված է այն հորիզոնական և ուղղահայաց շարքերով, որոնց հատման կետում գտնվում է A թիվը:

*A*

*A*

*A*

Այս հատկությունների ապացույցը ներկայացնենք ընթերցողին (ցուցում. երրորդ հատկությունը բխում է առաջին երկու հատկություններից):

Նշենք, որ Պասկալի տրակտատի հրատարակվելուց մեկ դար առաջ մեզ հետաքրքրող «ուղղանկյունաձև» աղյուսակը (ոչ «եռանկյունաձև») ներկայացվել է հայտնի իտալացի մաթեմատիկոս Նիկոլլո Տարտալյայի «Թվի և չափի մասին ընդհանուր տրակտատ» շարադրանքում, որը հրատարակվել է 1556-1560թթ.-ին հեղինակի մահից հետո: Տարտալյայի աղյուսակն ուներ հետևյալ տեսքը.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 |
| 1 | 4 | 10 | 20 | 35 | 56 |
| 1 | 5 | 15 | 35 | 70 | 126 |
| 1 | 6 | 21 | 56 | 126 | 252 |
| 1 | 7 | 28 | 84 | 210 | 462 |
| 1 | 8 | 36 | 120 | 330 | 792 |

Այստեղ առաջին տողը կազմված է միավորներից. Մնացած շարքերում ձախ հատվածի սկզբում մեկեր են, իսկ յուրաքանչյուր հաջորդ թիվ ստացվում է տվյալ թվին նախորդող թվի և ուղղահայաց դիրքով տվյալ թվից անմիջապես վերև գտնվող թվի գումարման միջոցով(օր.՝ 2=1+1, 15=10+5 և այլն): Տարտալյայի առաջարկած աղյուսակը կոչվում է «Տարտալյայի ուղղանկյուն»:

Պասկալի յուրաքանչուր տողի անդամները սովորաբար համարակալվում են ձախից աջ՝ սկսած 0-ից: Այսպես. հինգերորդ տողի չորրորդ տեղը զբաղեցնում է 10 թիվը: n-րդ տողի k-րդ տեղում գտնվող թիվը նշանակենք 𝑇𝑘: Այնպես, որ, օրինակ,

𝑛

𝑇0= 1, 𝑇4= 10, 𝑇4 = 1001: 𝑇𝑘 արտահայտությունը որոշված է ցանկացած n ≥ 0 և k = 0,

0 5 14 𝑛

1, …, n դեպքում:

Դիտարկենք 𝑇𝑘 թվերի միջոցով ձևավորված անվերջ հաջորդականությունը որևէ k հաստատունի և n փոփոխականի դեպքում: Այդ հաջորդականությունն ունի հետևյալ տեսքը.

𝑛

𝑇𝑘, 𝑇𝑘 , 𝑇𝑘 , …, 𝑇𝑘, … (3.8)

𝑛 𝑘+1 𝑘+2 𝑛

Այս հաջորդականության անդամները թվեր են, որոնք գտնվում են Պասկալի եռանկյան մեջ «ձախ կողմնային կողին զուգահեռ k-րդ գծի ձախ կողմում», ինչպես նաև թվեր են, որոնք գտնվում են «աջ կողմնային կողին զուգահեռ k-րդ գծի աջ կողմում»: Տարտալյեի ուղղանկյան մեջ այդ թվերը լրացնում են k-րդ սյունակը և k-րդ տողը:

k = 0 դեպքում կստանանք հետևյալ հաջորդականությունը.

1, 1, 1, 1, 1, 1, …

Ինչպես տեսնում ենք այն կազմված է 1-երից (Տարտալյայի ուղղանկյան զրոյական տող կամ զրոյական սյունակ):

k = 1 դեպքում կստանանք հետևյալ հաջորդականությունը.

1, 2, 3, 4, 5, 6, …

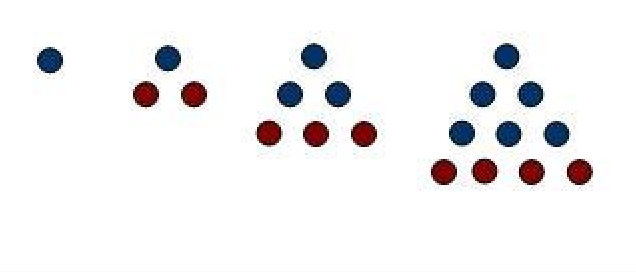
(Տարտալյեի ուղղանկյան առաջին տող կամ առաջին սյունակ): k = 2 դեպքում կստանանք հետևյալ հաջորդականությունը.

1, 3, 6, 10, 15, 21, …

(Տարտալյեի ուղղանկյան երկրորդ տող կամ երկրորդ սյունակ):

Այս հաջորդականության անդամները կոչվում են եռանկյունային թվեր. 1–ը առաջին եռանկյունային թիվ, 3–ը երկրորդ եռանկյունային թիվ, 6–ը երրորդ եռանկյունային թիվ և այլն: Այսինքն, եռանկյունային թիվը հավասար է 𝑇2 : Հաջորդականության թվերը ստացել են այդպիսի անվանում, քանի որ թվերը ցույց են տալիս գնդակների կամ այլ նույնանման առարկաների քանակը, որոնք դասավորված են եռանկյունաձև: Այսինքն եռանկյունային թիվը ցույց է տալիս, թե Պասկալի եռանկյան քանի անդամ է գտնվում առաջին m տողերում՝ 0-ից մինչև m-1:

𝑚+1



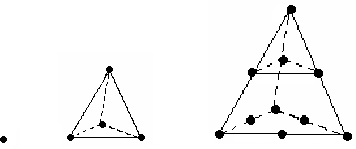
Տեղադրելով k=3 արժեքը՝ կստանանք հետևյալ հաջորդականությունը.

1, 4, 10, 20, 35, 56, …

(Տարտալյայի ուղղանկյան երրորդ տող կամ երրորդ սյունակ): Այս հաջորդականության անդամները կոչվում են բրգաձև թվեր կամ քառանիստային թվեր. 1–ը առաջին քառանիստային թիվ, 4–ը երկրորդ քառանիստային թիվ, 10–ը երրորդ քառանիստային թիվ և այլն: Այնպես, որ քառանիստային թիվը հավասար է

𝑇3 : Այս թվերը ցույց են տալիս գնդակների քանակը, որոնք դասավորված են եռանկյուն բուրգի տեսքով:

𝑚+2



Նշենք, որ եռանկյունային և բրգաձև թվերը, որոնք համարվում են ֆիգուրային թվերի մասնավոր դեպքեր, հետաքրքրություն են առաջացրել դեռևս Հին Հունաստանում, որտեղ նրանց էին վերագրվում առեղծվածային (միստիկ) հատկություններ: Մեզ հասած բավականին հին շարադրանքներից է

«Մաթեմատիկայի ներածություն»-ը, որտեղ խոսվում է եռանկյունային և բրգաձև թվերի մասին: Այդ շարադրանքի հեղինակն է հույն մաթեմատիկոս Նիկոմախ՝ Գերասայից: Այնուամենայնիվ, բազմանկյունային թվերը հայտնի էին դեռ մ.թ.ա երկրորդ դարում, և դեռ ավելի շուտ՝ մ.թ.ա հինգերորդ դարում հայտնի մաթեմատիկոս Պյութագորասին և նրա աշակերտներին:

* 1. Պասկալի գործողությունը

Ըստ սահմանման՝𝑇𝑘 թվերը ենթակա են հետևյալ առնչություններին.

𝑛

T0 = 1 (4.1)

0

T0 = Tn+1 = 1, երբ n=0, 1, 2, …(4.2)

𝑛+1 n+1

T𝑘 = Tk−1+ Tk, երբ n=0, 1, 2, … և k=1, 2, …, n (4.3)

𝑛+1 𝑛 𝑛

Այս առնչություններով Tk թվերն ամբողջությամբ սահմանված են. օգտագործելով (4.1)-(4.3) առնչությունները՝ կարելի է ստեղծել Պասկալի եռանկյունու ցանկացած քանակի տող:

n

Tkարտահայտությունը կարելի է վերափոխել այնպես, որ այն իմաստ ունենա ցանկացած ոչ բացասական n ամբողջ թվի և ցանկացած k թվի դեպքում: Դրա համար

n

ընդունենք Tk = 0, եթե n ≥ 0, իսկ k-ն որոշված չէ 0 ≤ k և k ≤ n անհավասարությունների

n

դեպքում: Այսպիսով, Tk = 0 բոլոր (n, k) զույգերի համար, որտեղ n ≥ 0, k < 0, և բոլոր (n, k) զույգերի համար, որտեղ n ≥ 0, k > n: Հիմա Tk= Tk−1 + Tk առնչությունը

n

n n n

գոյություն կունենա բոլոր k-երի համար, իսկ Tkթվերը կսահմանվեն հետևյալ

n

հավասարություններով.

T0 = 1, (4.4)

0

Tk = 0, k ≠ 0 դեպքում, (4.5)

0

Tk = Tk−1+ Tk, բոլոր n ≥ 0 և բոլոր k-երի դեպքում (4.6)

n+1 n n

Վերոնշյալը թույլ է տալիս ներկայացնել Պասկալի եռանկյունու առաջացման պատկերը: Դիտարկենք զրոներից կազմված անվերջ աղյուսակ, որոնք դասավորված են շախմատաձև.

. . . . 0 0 0 0 . . . .

. . . . 0 0 0 0 0 . . . .

. . . . 0 0 0 0 . . . .

. . . . 0 0 0 0 0 . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . .

Իհարկե, այս աղյուսակի համար կգործի Պասկալի օրենքը, համաձայն որի ցանկացած թիվ ստացվում է իրեն մոտ գտնվող այն 2 թվերի գումարից, որոնք գտնվում են նախորդ տողում (ենթադրենք«…, s-3, s-2, s-1, s0, s1, s2, …» տողը ստացվել է«…, d-2, d-1, d0, d1, d2, …» անվերջ տողից Պասկալի օրենքով, և «sk = dk-1 + dk» ցանկացած k-ի դեպքում: Այդ դեպքում վերջավոր տողերի համար Պասկալի օրենքը որոշվում է այստեղից, եթե ցանկացած «x0, x1, …, xn» վերջավոր տող նույնացվի «…, 0, 0, x0, x1, …, xn, 0, 0, 0, …» անվերջ տողի հետ): Ենթադրենք այդ աղյուսակի առաջին տողում 0- ներից մեկը փոխարինվել է 1-ով: Եթե մենք պահանջենք, որ Պասկալի օրենքը պահպանվի, ապա աղյուսակը կունենա հետևյալ տեսքը.

. . . . 0 0 1 0 0 . . . .

. . . . 0 0 1 1 0 0 . . . .

. . . . 0 1 2 1 0 . . . .

. . . . 0 1 3 3 1 0 . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . .

Առաջարկել կամայական n և k (n = 0, 1, 2, …; k = 0, 1, …, n) կարելի է, եթե ունեք բավականաչափ ժամանակ և համբերություն Tk գտնելու համար: Դրա համար անհրաժեշտ է շարունակել գրել Պասկալի եռանկյունին այնքան ժամանակ, մինչև չհասնենք n-րդ տողի k-րդ թվին, կամ կարելի է օգտվել (4.1)-(4.3) առնչություններից, որոնք թույլ կտան, կատարելով վերջավոր թվով գումարման գործողություն, գտնել Tk-ն:

n

n

Խնդիր. Քա՞նի գումարման գործողություն է անհրաժեշտ կատարել գտնելու համարTk-ն՝ օգտագործելով (4.1)-(4.3) առնչությունները (փորձեք նվազեցնել գումարման գործողությունների քանակը՝ օգտագործելով Պասկալի եռանկյուն ու համաչափությունը):

n

Գործողությունը, որտեղ օգտագործվում են n և k թվերը Tk թիվը գտնելու համար, կոչվում է Պասկալի գործողություն: Այն որոշված է ցանկացած n և k թվերի համար, որոնց դեպքում n ≥ 0, 0 ≤ k ≤ n:4

n

Իսկ եթե 𝑇𝑘-ն վերափոխենք այնպես, ինչպես նշել ենք վերևում, ապա Պասկալի գործողությունը կորոշվի ցանկացած ոչ բացասական n ամբողջ թվի և ցանկացած k ամբողջ թվի համար:

𝑛

Պասկալի գործողության միջոցով հեշտությամբ գրվում են𝐻𝑘թվերը, որոնք համարվում են ութերորդ օլիմպիադայի խնդրի պատասխանը: Գրառման այդպիսի տարբերակ գտնելու համար m = 0, 1, …, 1000; q = 0, 1, …, m թվերի համար՝

𝑛

𝑍𝑞 = 1 ∙ 𝐻𝑞 (4.7)5

𝑚 21000−𝑚 𝑚

այնպես, որ՝



Այս դեպքում (4.7) և (4.1) առնչություններից կստանանք.

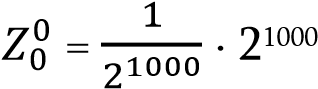
4Պասկալը իր գիտական շարադրանքում դիտարկել է այլ գործողություն, այն է՝ x և y թվերի միջոցով գտնել այն թիվը, որը գտնվում է x-րդ ուղղահայաց շարքի և y-րդ հորիզոնական շարքի հատման կետում(1-ից սկսած շարքերը համարակալելու դեպքում, այնպես, որ այդ գործողությունը որոշված է x ≥ 1, y ≥ 1 դեպքում): Եթե

փնտրվող թիվը նշանակենք P(x, y), ապա հեշտ է նկատել, որ P(x, y) = 𝑇𝑥−1 , որտեղից 𝑇𝑘 = P(k+1, n-k+1):

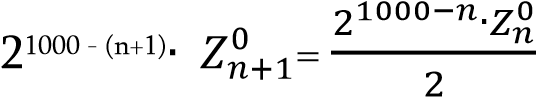
𝑥−1+𝑦−1 𝑛

5 Քանի որ 20 = 1, ապա m = 1000 դեպքում (4.7) հավասարությունը կունենա հետևյալ տեսքը. 𝑍𝑞 = 𝐻𝑞 :

1. 1000

= 1 (4.9)

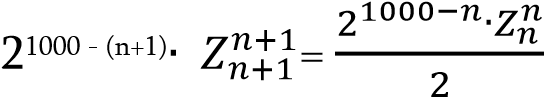
(1.2), (1.4) և (1.3) առնչությունների մեջ 𝐻𝑚𝑞 թվերի փոխարեն տեղադրենք դրանց արտահայտությունները-ի միջոցով՝ համաձայն (4.8) առնչության: (1.2) առնչությունից կստանանք՝

,

որտեղից՝

 (4.10)

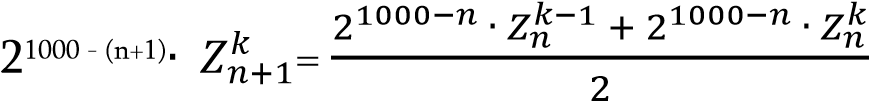
Նույնկերպ (1.4) առնչությունից կստանանք՝

,

որտեղից՝

 (4.11)

Եվ վերջապես, (1.3) առնչությունից կստանանք՝

,

որտեղից՝

 (4.12)

(4.10)-(4.12) հավասարությունները ցույց են տալիս, որ ցանկացած,

…, 𝑍𝑛𝑛++11> տող, որտեղ n = 0, 1, …, 999, ստացվում է դրան նախորդող՝ꙍ 𝑛 = < 𝑍𝑛0, …, 𝑍𝑛𝑛> տողից Պասկալի օրենքով: Քանի որ, ինչպես երևում է (4.9) հավասարությունից, առաջինտողը հենց Պասկալի զրոյական տողն է, ապա այդ տողին հաջորդող ꙍ1տողը Պասկալի առաջին տողն է, ꙍ2տողը՝Պասկալի երկրորդ տողը, և այլն: Ցանկացած 0-ից 100 [[1]](#footnote-1) m-ի համար ꙍ𝑚- ը Պասկալի m-րդ տողն է, և՝

 (4.13)

Հետևաբար (4.8) առնչության մեջ ցանկացած m = 0, 1, …, 1000 ևցանկացած k =

0, 1, …, m դեպքում՝

𝐻𝑚𝑞 = 21000 - m∙ 𝑇𝑚𝑞 (4.14)

Մասնավորապես՝

 (4.15)

Այսպես. 1000-րդ շարքի խաչմերուկներ եկած մարդկանց քանակը հենց Պասկալի հազարերորդ տողի անդամներն են: Եթե Պասկալի գործողությունը համարենք ստանդարտ գործողություն, ապա (4.15) հավասարությունը կլուծի ութերորդ օլիմպիադայի խնդիրը: Հաջորդ երկու պարագրաֆներում մենք կտեսնենք, թե ինչպես կարելի է Պասկալի գործողության օգնությամբ գտնել 2 կարևոր խնդիրների լուծումները:

### Երկանդամային գործակիցներ

Այս պարագրաֆում մենք ցույց կտանք՝ ինչպես կարելի է երկանդամային գործակիցներն արտահայտել Պասկալի գործողության միջոցով: Երկանդամային գործակիցները որոշվում են հետևյալ կերպ. վերցնենք 1+x երկանդամը և սկսենք այն բարձրացնել 0, 1, 2, 3 և այլ աստիճաններ՝ միևնույն ժամանակ բարձրացնելու արդյունքում ստացված բազմանդամները դասավորելով x-ի աճող աստիճաններով: Արդյունքում կստանանք.

(1+x)0 = 1, (5.1)

(1+x)1 = 1 + x, (5.2)

(1+x)2 = (1+x)(1+x) = 1+ 2x + x2, (5.3) (1+x)3 = (1+x)2 (1+x) = 1 + 3x + 3x2 + x3 (5.4)

և այլն:

Ցանկացած ոչ բացասական n ամբողջ թվի համար՝

(1+x)n = a0 + a1x + a2x2 + … + apxp (5.5)

որտեղ a0, a1, …, ap-ն որոշ թվեր են: Ցանկության դեպքում դժվար չէր լինի համոզվել, որ p=n և a0=ap=1: Սակայն դա մեզ հիմա պետք չէ: Մենք դա կստանանք մի քիչ ուշ՝

որպես առավել ընդհանուր բանաձևի հետևանք: Այս փուլում մեզ համար բավական է իմանալ, որ (1+x) երկանդամի n աստիճան բարձրացնելու արդյունքը (որտեղ n-ը ոչ բացասական ամբողջ թիվ է) կարելի է ներկայացնել թվային գործակիցներով x բազմանդամի աճող աստիճանների տեսքով, ինչպես ցույց է տրված (5.5) առնչության մեջ: Բազմանդամը, որը գտնվում է այդ առնչության աջ մասում, կոչվում է n ցուցիչի համար երկանդամի վերլուծություն: Նրա գործակիցները (և դրանց p քանակը) կախվածեն n-ից: Այդ կախվածությունն ընդգծելու համար հաճախ օգտագործում են այդ գործակիցների համար հատուկ նշաններ, որոնց մեջ մտնում է n-ը: Հենց n ցուցիչի

համար երկանդամի վերլուծության մեջ գործակիցը xk-ի դեպքում նշանակվում է ( 𝑛

):

𝑘

( 𝑛) թվերը կոչվում են երկանդամային գործակիցներ:

𝑘

(5.5) առնչությունը կարելի է այժմ ներկայացնել հետևյալ տեսքով.

(1+x)n = (

0

𝑛) + (

𝑛) ∙ x + (

𝑛) ∙ x2 + … + (

𝑛) ∙ xp (5.6)

իսկ (5.1) – (5.4) առնչություններից կստանանք.

1

2

𝑝

( 0) = 1

0

( 1) = 1 ( 1) = 1

0

1

( 2) = 1 (

0

2

3

2) = 2 (

2) = 1

( 3) = 1 (

1

2

0

1

3) = 3 (

3) = 3 (

3) = 1

Մենք տեսնում ենք, որ n=0,1,2,3 ցուցիչների համար երկանդամային գործակիցների տողերը համընկնում են համապատասխանաբար Պասկալի եռանկյան առաջին, երկրորդ և երրորդ տողերի հետ: Հիմա մենք կհամոզվենք, որ դա ճիշտ է ցանկացած n-ի համար: Այդ նպատակով տեսնենք, թե ինչպես է n+1 ցուցիչի համար գործակիցների տողը ստացվում n ցուցիչի համար գործակիցների տողից: Օգտվենք հետևյալ բանաձևից.

(1+x)n+1 = (1+x)n∙ (1+x) (5.7)

Այս բանաձևի աջ և ձախ մասերի համար դուրս գրենք x-ի աճող աստիճաններով վերլուծությունը: Ձախ մասի համար, n-ի փոխարեն գրելով n+1, (5.6) բանաձևից կստանանք հետևյալ բանաձևը.

(1+x)n+1 = (

0

𝑛+1) + (

𝑛+1) ∙ x + … + (

𝑛+1) ∙ xk + … + (

𝑛+1) ∙ xq (5.8)

Որտեղ q-ն որևէ թիվ է: Աջ մասի համար, n-ի փոխարեն գրելով n+1, (5.6) բանաձևից կստանանք հետևյալ բանաձևը.

1

𝑘

𝑞

(1+x)n∙ (1+x) = [(

𝑛) + (

𝑛) ∙ x + … + (

𝑛) ∙ xp] ∙ (1+x) = (

𝑛) + (

𝑛) ∙ x + … +

+( 𝑛) ∙ xk + … + (

0

1

𝑝

0

1

𝑘

𝑛) ∙ xp + (

𝑛) ∙ x + … + (

𝑛 ) ∙ xk + … + (

𝑛 ) ∙ xp + (

𝑛) ∙ xp+1 =

= ( 𝑛) + [(

𝑝

0

𝑛) + (

𝑛)] ∙ x + … + [(

𝑛

𝑝

0

𝑘−1

) + (

𝑛)] ∙ xk + … + [(

𝑛

𝑘−1

𝑝−1

𝑝−1

) + (

𝑛)] ∙ xp + (

𝑛) ∙ xp+1

(5.9)

0

1

𝑘

𝑝

𝑝

(5.8) և (5.9) առնչությունների աջ հատվածները հավասար են: Այդ պատճառով q

= p+1; x-ի միևնույն աստիճանների դեպքում, հավասարեցնելով գործակիցները, կստանանք.

( 𝑛+1) = ( 𝑛) (5.10)

0

0

( 𝑛+1) = (

𝑘

𝑛

𝑘−1

𝑝

𝑛) (5.11)

𝑛+1

) + (

𝑘

) = (

(

𝑝+1

𝑛) (5.12)

(5.10)–(5.12) առնչությունները ցույց են տալիս, որ n+1 ցուցիչի համար վերլուծության գործակիցների տողը ստացվում է n ցուցիչի համար վերլուծության գործակիցների տողից ըստ Պասկալի օրենքի: Քանի որ 0 ցուցիչի համար վերլուծության գործակիցների տողը համընկնում է Պասկալի զրոյական տողի հետ, ապա բոլոր հաջորդող գործակիցների տողերը նույնպես կհամընկնեն Պասկալի

𝑘

եռանկյունու համապատասխան տողերի հետ: Այդ պատճառով ( են միայն k = 0, 1, …, n թվերի համար, և

𝑛) թվերը որոշված

( 𝑛) = 𝑇𝑘 (5.13)

𝑘 𝑛

Դիտողություն. Այն հարցին, թե ինչ գործակիցներով են x-3-ը և x20-ը մտնում 5 ցուցիչի համար երկանդամի վերլուծության մեջ, կարելի է պատասխանել՝ 0-ին հավասար

𝑘

գործակիցներով: Այդ պատճառով բնական է վերափոխել (

𝑛) արտահայտությունը

k < 0 և k > n դեպքում՝ ենթադրելով, որ այդ դեպքում (

𝑛) = 0: Այդ ժամանակ (5.13)

հավասարությունը ճիշտ կլինի բոլոր ոչ բացասական n և բոլոր k ամբողջ թվերի համար:

𝑘

Մենք երկանդամային գործակիցներն արտահայտեցինք Պասկալի գործողության միջոցով: Հիմա մենք կարող ենք (5.6) առնչությունը ներկայացնենք հետևյալ կերպ.

(1+x)n = T0 + T1 x + T2 x2 + … + Tk xk + … + Tn xn (5.14)

n n n n n

(5.14) բանաձևը երբեմն անվանում են Նյուտոնի երկանդամի բանաձև կամ ուղղակի Նյուտոնի երկանդամ: 7Այս բանաձևի առավել ընդունված մեկ այլ տարբերակ կներկայացվի 7-րդ պարագրաֆում:

Կարող ենք համարել, որ այս պարագրաֆում մենք դիտարկեցինք

երկանդամային գործակիցների վերաբերյալ հետևյալ խնդիրը. (

𝑛)-ի համար գտնել

արտահայտություն: Ինչպես գիտենք 2-րդ պարագրաֆից, կարելի է տարբեր կերպ հասկանալ, թե ինչն է համարվում այդպիսի խնդրի լուծում: Եթե, օրինակ, ուծում համարենք այն արտահայտությունը, որը թույլ է տալիս n-ից և k-ից անցում կատարել տասական համակարգով ներկայացված համապատասխան երկանդամային

𝑘

𝑘

գործակցի, ապա (

𝑛)-ն ինքնին կլինի այդպիսի լուծում: Պահանջենք, որ լուծումը

( 𝑛)-ն արտահայտի n, k թվերի և ստանդարտ գործողությունների միջոցով. լուծման

𝑘

այդպիսի տարբերակը կախված կլինի ստանդարտ գործողությունների ընտրությունից: Եթե Պասկալի գործողությունը համարենք ստանդարտ գործողություն, ապա (5.13) բանաձևը կլուծի երկանդամային գործակիցների մասին խնդիրը: Այդ խնդրի մեկ այլ լուծում այլ ստանդարտ գործողությունների կիրառման դեպքում կներկայացվի 7-րդ պարագրաֆում:

* 1. Տրված բազմության մասերի քանակը

Մաթեմատիկայում առարկաների ցանկացած ամբողջություն կոչվում է

բազմություն: Օրինակ՝

* բոլոր ամբողջ թվերի բազմություն,
* բոլոր զույգ թվերի բազմություն,
* որևէ արկղում դրված մատիտների բազմություն և այլն:

Եթե նշված է որևէ առարկա և որևէ բազմություն, ապա հնարավոր է 2 դեպք.

7(5.14) բանաձևը հայտնի էր դեռևս մինչև Նյուտոնը՝ Տարտալյեի մոտ: Նյուտոնի անունը կապվում է քննարկվող բանաձևի հետ միայն այն պատճառով, որ նա 1676թվ.-ին բացահայտեց այդ բանաձևի ընդհանրացման եղանակը կամայական ռացիոնալ(այդ թվումբացասական) ցուցիչի դեպքում:

1. ուսումնասիրվող առարկան պատկանում է ուսումնասիրվող բազմությանը,
2. ուսումնասիրվող առարկան չի պատկանում ուսումնասիրվող բազմությանը:

Առաջին դեպքում ուսումնասիրվող առարկան կոչվում է ուսումնասիրվող բազմության տարր: Օր.՝ 3 թիվը համարվում է բոլոր ամբողջ թվերի բազմության տարր և չի համարվում բոլոր զույգ թվերի բազմության տարր:

Հնարավոր է նաև դեպք, որ որևէ A բազմության բոլոր տարրերը միաժամանակ հանդիսանան մեկ այլ B բազմության տարրեր (օր.՝ բոլոր զույգ թվերի բազմության բոլոր տարրերը համարվում են բոլոր ամբողջ թվերի բազմության տարրեր): Այդ դեպքում A բազմությունը կոչվում է B բազմության մաս կամ ենթաբազմություն: Պարզ է, որ ցանակացած բազմություն համարվում է ինքն իր մաս: Եթե A բազմությունը համարվում է B բազմության մաս և B բազմությունը համարվում է A բազմության մաս, ապա դա նշանակում է, որ A-ն և B-ն կազմված են միևնույն տարրերից, այսինքն՝ համընկնում են:

Բազմությունները լինում են 2 տեսակի.

1. վերջավոր. այս բազմությունները համարվում են կոմբինատորիկայի ուսումնասիրման առարկան

#### անվերջ

Այս պարագրաֆում կդիտարկենք վերջավոր բազմությունները: Վերջավոր բազմությունների շարքում առանձնանում է մի բազմություն, որը չի պարունակում որևէ տարր: Այդպիսի բազմությունը կոչվում է դատարկ: Այսպես. բացառված չէ, որ, բացելով արկղը, մենք այն տեսնենք դատարկ: Դատարկ բազմության մասին Պ. Ս. Ալեքսանդրովը8 գրում է. «Վերջավոր բազմությունների շարքին է դասվում նաև դատարկ բազմությունը, այսինքն՝ բազմությունը, որը ոչ մի տարր չի պարունակում.դատարկ բազմության տարրերի քանակը 0 է: Անհրաժեշտ է դիտարկել դատարկ բազմությունը, քանի որ երբ մենք այս կամ այն տարբերակով որոշում ենք բազմություն, ապա կարող ենք նախօրոք չիմանալ՝ պարունակում է այն որևէ տարր, թե ոչ»: Դատարկ բազմությունը համարվում է ցանկացած բազմության մաս:

Եթե բազմությունը վերջավոր է, ապա նրա տարրերը կարելի է հաշվել՝ գտնելով բազմության տարրերի քանակը: Բազմությունը, որը կազմված է n տարրերից, կոչվում

8П. С. Александров ‘’Введение в общую теорию множеств и функций’’, М.-Л., Гостехиздат, 1948, стр. 14

է «n-տարրային»: Օր.՝ դատարկ բազմությունը համարվում է 0-տարրային բազմություն:

Օրինակ. դիտարկենք մի բազմություն, որը կազմված է 3 տարրերից.մատիտ, փետուր և ռետին: Գտնենք այդ բազմության բոլոր մասերը: Կա ընդամենը 1 0- տարրային մաս՝ դատարկ բազմություն: Կան 3 միատարր մասեր՝ մատիտ, փետուր, ռետին: Կա 3 երկտարր մասեր՝ փետուր-ռետին, մատիտ-ռետին և մատիտ-փետուր: Եվ վերջապես, կա 1 եռատարր մաս՝ մատիտ-ռետին-փետուր: Այսպիսով, ընդհանուր առմամբ մեր բազմությունը կազմված է 8 մասից:

Տրված է բազմություն, որը կազմված է n տարրերից: Այդ բազմության ցանկացած k-տարրային մաս կոչվում է n տարրերի զուգորդություն ըստ k-ի: Պարզ է, որ n տարրերի զուգորդությունների քանակը ըստ k-ի կախված չէ նրանից, թե ինչ n տարրերից է կազմված բազմությունը, այլ կախված է n և k թվերից: Այդ պատճառով այդ թիվը կոչվում է n տարրերի զուգորդության թիվ ըստ k-ի և նշանակվում է հետևյալ կերպ.



Այլ կերպ ասած, -տարրային բազմության k-տարրային մասերի թիվն է:

Սովորաբարարտահայտությունն իմաստ ունի, երբ n=0,1,2, …, և 0 ≤ k ≤ n:[[2]](#footnote-2) n-տարրային բազմության մասերի քանակը նշանակենք Cn-ով՝այնպես, որ՝

Cn + … +  (6.1)

Իսկ ինչի՞ են հավասար Cn, 𝐶𝑛𝑘 թվերը: Այսպես. Նոր ուսումնասիրված օրինակից հետևում է, որ C=3: Բացի այդ, տեղ ունի զուգորդությունների քանակի 3 հատկություն.

1. զուգորդությունների թվի առաջին հատկություն.

= 1 (6.2)

Ապացույց. m-տարրային E բազմությունն ունի մեկ 0-տարրային մաս (դատարկ բազմություն) և մեկ m-տարրային մաս (E բազմությունը): Առանց հաշվարկելու  թվերը՝ առանձնացնենք այդ թվերի ևս 2 հատկություն: Երկրորդ հատկությունը հնարավորություն կտա հեշտությամբ ընկալել այս պարագրաֆում ներկայացված հասկացությունները, իսկ առաջին և երրորդ հատկություններն ընկած են  թվերի հաշվարկման հիմքում,

1. զուգորդությունների քանակի երկրորդ հատկություն.

 (6.3)

Ապացույց. Վերցնենք որևէ n-տարրային M բազմություն: Մենք պետք է ապացուցենք, որ այդ բազմության k-տարրային մասերի քանակը հավասար է (n-k)-տարրային մասերի քանակին: Մտովի կատարենք հետևյալ գործողությունը. Թուղթը բաժանենք մեր դիտարկած բազմությունում առկա k-տարրային մասերի քանակին հավասար քառակուսիների (այսինքն՝) և այդ մասերից յուրաքանչյուրի վրա նշենք բազմության մասերը այնպես, որ յուրաքանչյուր k-տարրային մաս պատկերված լինի թղթի որևէ մասի վրա: Այնուհետև թղթից կտրենք  շրջաններ և (n-k)-տարրային մասերից յուրաքանչյուրը պատկերենք այդ շրջաններից մեկի վրա: Այս դեպքում մենք կնկատենք, որ շրջանների և քառակուսիների քանակը նույնն է: Դրա համար բոլոր քառակուսիները դնենք սեղանի վրա և դրանցից յուրաքանչյուրի վրա դնենք շրջան հետևյալ կանոնով. Եթե քառակուսու վրա պատկերված է M բազմության որև է kտարրային մաս, ապա այդ քառակուսու վրա պետք է դրված լինի շրջան, որի վրա պատկերված է M բազմությանայնպիսի մաս, որը կազմված է մնացած՝ (n-k) տարրերից: Պարզէ, որ յուրաքանչյուր քառակուսու վրա կդրվի մեկ շրջան, և յուրաքանչյուր շրջան կդրվի մեկ քառակուսու վրա,իսկ դա նշանակում է, որ շրջանների և քառակուսիների քանակները հավասար են:

Նախքան երրորդ հատկությանն անցնելը, ապացուցենք հետևյալ լեմմը:

Լեմմ. (n+1)-տարրային բազմության մեջ առանձնացնենք որևէ տարր: Տվյալ բազմության այդ տարրը պարունակող k-տարրային մասերի քանակը հավասար է



Ապացույց. Կրկին մտովի փորձարկում անցկացնենք շրջանների և քառակուսիների հետ: Թղթից կտրենք առանձնացված տարրը պարունակող k-տարրային մասերի քանակին հավասար քառակուսիներ, և յուրաքանչյուր քառակուսու վրա պատկերենք մի այդպիսի մաս այնպես, որ բազմության բոլոր մասերը պատկերվեն: Թղթից կտրենք 𝐶𝑛𝑘−1 շրջաններ և յուրաքանչյուր շրջանի վրա պատկերենք բազմության մնացած բոլոր տարրերի (բացի առանձնացվածից) (k-1)-տարրային մասերից մեկն այնպես, որ բոլոր այդպիսի մասերը պատկերվեն: Յուրաքանչյուր քառակուսու վրա դնենք շրջան հետևյալ կանոնով. Եթե քառակուսու վրա պատկերված է որևէ A բազմություն, ապա այդ քառակուսու վրա պետք է դրվի շրջան, որի վրա պատկերված է մի բազմություն, որը ստացել է A-ից՝ հեռացնելով առանձնացված տարրը: Ակնհայտ է, որ յուրաքանչյուր քառակուսու վրա կդրվի մեկ շրջան, և յուրաքանչյուր շրջան կդրվի մեկ քառակուսու վրա, իսկ դա նշանակում է, որ քառակուսիների և շրջանների քանակները հավասար են, այսինքն՝: Բայց չէ, որ մենք քառակուսիներ ենք կտրել առանձնացված տարրը պարունակող (n+1)-տարրային բազմության k-տարրային մասերի քանակին հավասար քանակությամբ: Դա նշանակում է, որ այդ մասերի քանակը հավասար է, ինչը և պետք է ապացուցվեր:

Հիմա ներկայացնենքթվի երրորդ հատկությունը:

3.զուգորդությունների քանակի երրորդ հատկություն.

 (6.4)

Ապացույց. Վերցնենք կամայական (n+1)-տարրային M բազմություն և կազմենք այդ բազմության բոլոր k-տարրային մասերը: M բազմության մեջ առանձնացնենք որևէ տարր. Այդ տարրը նշանակենք a տառով: X տառով նշանակենք M բազմության այն kտարրային մասերի քանակը, որոնք պարունակում են a տարրը, և Y տառով նշանակենք M բազմությանայն k-տարրային մասերի քանակը, որոնք չեն պարունակում a տարրը: Այդ դեպքում՝

= X + Y (6.5)

Բայց ըստ լեմմի X = : Ինչ վերաբերում է Y-ին, ապա այն հենց n չառանձնացված տարրերի զուգորդությունների քանակն է ըստ k-ի, այսինքն՝: Այդ պատճառով՝

 (6.6)

ինչը և պետք էր ապացուցել:

Երրորդ հատկությունն առաջին հատկության հետ ցույց է տալիս, որ

𝐶𝑛0+1, 𝐶𝑛1+1, …, 𝐶𝑛𝑛++11 (6.7)

տողը ստացվում է

, …,  (6.8)

տողից ըստ Պասկալի օրենքի: Քանի որ n=0 դեպքում

𝐶00 (6.9)

տողը համընկնում է Պասկալի զրոյական տողի հետ, ապա կամայական n թվի համար (6.8) տողը կհամընկնի Պասկալի n-րդ տողի հետ: Այդ պատճառով՝

𝐶𝑛𝑘 = 𝑇𝑛𝑘 (6.10)

Այսպես. մենք հիմա կարող ենք հաշվարկել n-տարրային բազմության kտարրային մասերի քանակը: n տարրերի զուգորդությունների քանակը ըստ k-ի (այսպիսով 6.10 բանաձևը տալիս է «Զուգորդությունների քանակի խնդրի» լուծում պայմանով, որ Պասկալի գործողությունը համարվի ստանդարտ գործողություն):

Ինչ վերաբերում է n-տարրային բազմության բոլոր մասերի քանակին, ապա (6.1) և (6.10) առնչությունները ցույց են տալիս, որ այդ մասերի քանակը հավասար է Պասկալի n-րդ տողի անդամների գումարին (ինչպես գիտենք Պասկալի n-րդ տողի անդամների գումարը հավասար է 2n): Հետևաբար՝

Cn = 2n (6.11)

## Գլուխ 2. Պասկալի եռանկյան թվերի հատկությունների կիրառությունները

* 1. Պասկալի եռանկյունը և զուգորդությունների թիվը

Պասկալի եռանկյունը կապված է զուգորդությունների թվի հետ: Պասկալի եռանկյան տարրերը համընկնում են զուգորդությունների թվի հետ: Մենք դա կապացուցենք հետագա շարադրանքում՝ ելնելով Պասկալի եռանկյան և զուգորդությունների թվի սահմանումներից:

Բացատրենք, թե ինչ ենք հասկանում ասելով զուգորդությունների թիվ: Տրված է A = {a1,a2, …, an} բազմությունը, որը կազմված է n տարրերից:Ck(n, k ∈ N 𝖴 {0}) զուգորդությունների թիվ է կոչվում A բազմությունից բոլոր հնարավոր k տարրերի քանակի ընտրությունը (առանց կրկնությունների և այդ տարրերի հերթականությունը հաշվի առնելու):

n

Դիտարկենք հետևյալ օրինակը, որը տալիս է վերոնշյալ արտահայտության բացատրությունը:

Օրինակ. Գլխարկի մեջ դրված է 36 խաղաթղթերից կազմված կապուկ: Այս դեպքում առանց հերթականությունը հաշվի առնելու գլխարկից 5 խաղաթուղթ հանելու հավանականությունը հավասար է C5 :

36

Հիշենք, որ C0= 1, C0= 1, Cn= 1: Կոմբինատորիկայի բաժնում կան

0 𝑛 𝑛

զուգորդությունների շատ կարևոր հատկություններ: Ապացուցենք այդ հատկություններից հետևյալը.

C𝑘= C𝑘−1+ C𝑘

𝑛 𝑛−1 𝑛−1

Դրա համար դիտարկենք M բազմությունը, որը կազմված է n տարրերից: Այդ բազմության մեջ նշենք որևէ a1 տարր: M բազմությունից k տարրերի ընտրության ժամանակ հնարավոր է միայն 2 տարբերակ.

* ընտրված k տարրերի մեջ կլինի a1. այս դեպքում մնում է M բազմության (n-1) տարրից «վերցնել» (k-1) տարր: Այդ տարբերակների քանակը հավասար է C𝑘−1,

𝑛−1

* ընտրված k տարրերի մեջ չի լինի a1. այս դեպքում k տարրերի ընտրությունը կատարվում է M բազմության (n-1) տարրից, քանի որ ընտրության գործընթացում a1 տարրն արդեն չի մասնակցում:

Այսպիսով, մենք ունենք 2 անկախ անդամներ, և գումարման կանոնի համաձայն10՝ կստանանք.

C𝑘= C𝑘−1+ C𝑘

𝑛 𝑛−1 𝑛−1

Սա էլ հենց պետք է ապացուցեինք:

Նկատենք, որ Պասկալի եռանկյան տարրերի և զուգորդությունների քանակի

համար նախնական պայմանները և հարաբերակցությունները համընկնում են: Այսպիսով, մենք կստանանք 𝑇𝑘= C𝑘: Եվ, հաշվի առնելով այն հանգամանքը, որ

𝑛 𝑛

Պասկալի եռանկյան ցանկացած տող համաչափ է, ստանում ենք՝ 𝐶𝑛−𝑘 = C𝑘:

𝑛 𝑛

* 1. Պասկալի եռանկյունը և ֆակտորիալները

Հիմա ապացուցենք Պասկալի եռանկյան ցանկացած տարր գտնելու համար օգտագործվող հետևյալ բանաձևը.

𝑇𝑘 = 𝑛!

𝑛 𝑘! ∙ (𝑛−𝑘)!

n𝜖 N թվի ֆակտորիալ(նշանակումը՝ n!) է կոչվում հետևյալ շարքը. n! = 1 ∙2 ∙ … ∙ n

Ուշադրություն դարձնենք, որ՝

* կարելի է հաշվել նաև 0 թվի ֆակտորիալը. 0! = 1,
* n! = 1 ∙ 2 ∙ … ∙ n հավասարության աջ հատվածում «սկզբում» նշվում են առաջին (n- 1) բնական թվերը, որոնք բազմապատկվում են n-ով: Այսպիսով, n! = (n-1)! ∙ n, որտեղ n 𝜖 N:

10Եթե a տարրը հնարավոր է ընտրել m տարբերակներով, իսկ b տարրը` n տարբերակներով, ընդ որում a տարրի յուրաքանչյուր ընտրություն տարբերվում է b տարրի յուրաքանչյուր ընտրությունից, ապա «a- իկամ b-ի» ընտրությունը կարելի է իրականացնել (m+n) տարբերակներով(տես՝ Виленкин Н. Я. Алгебра и математический анализ 11 класс.-М.: Мнемозина, 2005г.):

Ներկայացնելով ֆակտորիալի հասկացությունը՝ հանգում ենք Պասկալի եռանկյան ցանկացած տարր գտնելու համար օգտագործվող հետևյալ բանաձևի դուրսբերմանը.

𝑇𝑘 = 𝑛!

𝑛 𝑘! ∙ (𝑛−𝑘)!

𝑇𝑘-ի փոխարեննույն բանաձևն արտահայտենք 𝐹𝑘 –ով.

𝑛 𝑛

𝐹𝑘 = 𝑛!

𝑛 𝑘! ∙ (𝑛−𝑘)!

Գտնենք 𝐹0-ն, 𝐹0-ն և 𝐹𝑛-ը.

0 𝑛 𝑛

0! 𝑛!

𝐹0 = 0

= 1, 𝐹 =

= 1, 𝐹𝑛 = 𝑛! = 1

0 0! ∙ 0!

𝑛 0! ∙ 𝑛!

𝑛 𝑛! ∙ 0!

Դիտարկենք հետևյալ հավասարությունը.

𝐹𝑘−1+ 𝐹𝑘 = (𝑛−1)!

(𝑛−1)!

+

(𝑛−1)!

=

* ( 1 + 1) =

𝑛−1

𝑛−1

(𝑘−1)!(𝑛−𝑘)!

𝑘!(𝑛−𝑘−1)!

(𝑘−1)!(𝑛−𝑘−1)!

𝑛−𝑘 𝑘

(𝑛−1)! 𝑛

= ∙

𝑛!

=

= 𝐹𝑘

(𝑘−1)!(𝑛−𝑘−1)!

𝑘(𝑛−𝑘)

𝑘!(𝑛−𝑘)! 𝑛

Այսպիսով, մենք ստացանք 𝐹0 = 1, 𝐹0 = 1, 𝐹𝑛 = 1 և 𝐹𝑘−1+ 𝐹𝑘 = 𝐹𝑘: Հետևաբար,

0 𝑛 𝑛

𝑛−1

𝑛−1 𝑛

𝑇𝑘= 𝐹𝑘, իսկ դա նշանակում է, որ 𝑇𝑘= 𝑛!

, ինչը և պետք էր ապացուցել:

𝑛 𝑛

𝑛 𝑘!(𝑛−𝑘)!

Եթե սովորողները գիտեն տեղափոխման և տեղադրման հասկացությունները, կամ ուսուցիչը հարմար է գտնում բացատրել այդ հասկացությունները ուսուցման

ներկա փուլում, ապա 𝑇𝑘= 𝑛!

բանաձևի ապացույցը կարելի է ձևակերպել՝ ելնելով

𝑛 𝑘!(𝑛−𝑘)!

Պասկալի եռանկյան տարրերի «կոմբինատորական» բնույթից: Իսկապես, ենթադրենք ունենք n տարրերից կազմված a1,a2, …, an շարքը: Դիտարկենք տրված n թվերից որոշ k տարրերի 𝐴𝑘 տեղադրում (միաժամանակյա վերադասավորմամբ ընտրություն): Դրա համար վերցնենք որևէ (k-1) տարրի < a1,a2, …, an > տեղադրում և նրան միացնենք ak տարր: Քանի որ (k-1) դիրքերում արդեն կան տարրեր, ապա ak-ն կարող է զբաղեցնել միայն մնացած n - (k-1) տեղերից մեկը: Հետևաբար.

𝑛

𝐴𝑘= 𝐴𝑘−1(n-(k-1))

𝑛 𝑛

𝐴𝑘= 𝐴𝑘−1(n-(k-1)) = 𝐴𝑘−2(n-(k-1)) (n-(k-2)) = … =𝐴1 (n-(k-1)) (n-(k-2))…(n-1)

𝑛 𝑛 𝑛 𝑛

Եվ քանի որ n տարբեր տարրերից մեկը կարելի է ընտրել n տարբերակներով,

ապա 𝐴1 = n և 𝐴𝑘(n-(k-1)) (n-(k-2))…(n-1) n = 𝑛! :

𝑛 𝑛

(𝑛−𝑘)!

Նկատենք, որ k տարրերի յուրաքանչյուր անկանոն հավաքածու տալիս է կանոնակարգված հավաքածուների k!: Հետևաբար, ստացված արդյունքն անհրաժեշտ է բաժանել k!-ի: Այսպիսով՝

𝐶𝑘= 𝑛!

𝑛 𝑘!(𝑛−𝑘)!

Քանի որ 𝑇𝑘= 𝐶𝑘, ապա 𝑇𝑘 = 𝑛!

, ինչը և պետք է ապացուցեինք:

𝑛 𝑛

𝑛 𝑘!(𝑛−𝑘)!

* 1. Պասկալի եռանկյունը և Նյուտոնի երկանդամը

Հաջորդ քայլով տանք Պասկալի եռանկյան տարրերի և երկանդամիական վերլուծության գործակիցների միջև կապը: Ուշադրություն ենք դարձնում այն փաստի վրա, որ այստեղ շարադրանքը տարբերվում է ստանդարտ շարադրանքից, որը ներկայացված է մի շարք դասագրքերում:

(1+x)n տեսքի բազմանդամը կոչվում է Նյուտոնի երկանդամ: Նյուտոնի երկանդամի վերլուծության գործակիցները նշանակենք 𝐵𝑛:Այդ դեպքում՝

𝑘

(1+x)n = 𝐵𝑛+ 𝐵𝑛x + … + 𝐵𝑛xn

0 1 𝑛

Հեշտ է ցույց տալ, որ 𝐵0 = 1, 𝐵1 = 1, 𝐵1 = 1, քանի որ (1+x)0 = 1 և (1+x)1 = 1 + x:

0 0 1

Դիտարկենք հետևյալ հավասարությունը.

(1+x)n+1 = (1+x)n (1+x) = (𝐵𝑛+ 𝐵𝑛x + … + 𝐵𝑛xn)(1+x) =

0 1 𝑛

= 𝐵𝑛+ (𝐵𝑛+ 𝐵𝑛) x + (𝐵𝑛+ 𝐵𝑛) x2 + … + (𝐵𝑛+ 𝐵𝑛 ) xn + 𝐵𝑛xn+1

0 1 0 2 1 𝑛 𝑛−1 𝑛

Մյուս կողմից՝

(1+x)n+1 = 𝐵𝑛+1+ 𝐵𝑛+1x+ … + 𝐵𝑛+1xn+1

0 1 𝑛+1

Այսպիսով, հավասարեցնելով գործակիցները x-ի համապատասխան աստիճանների դեպքում, կստանանք.

𝐵𝑛= 𝐵𝑛+1, 𝐵𝑛= 𝐵𝑛+1, 𝐵𝑛+ 𝐵𝑛 = 𝐵𝑛+1

0 0 𝑛 𝑛+1 𝑘 𝑘−1 𝑘

Հետևաբար 𝐵𝑛= 𝐹𝑘: Դա նշանակում է, որ 𝐵𝑛= 𝐶𝑘:

𝑘 𝑛 𝑘 𝑛

Անհրաժեշտ է նշել, որ այս փաստը կարելի է ապացուցել «Ածանցյալի կիրառում» թեման ուսումնասիրելու դեպքում:

Հաջորդ օրինակում մենք ցույց կտանք՝ ինչպես կարելի է ստանալ Նյուտոնի երկանդամի վերլուծությունը Պասկալի եռանկյան տարրերի օգնությամբ՝ չօգտվելով այն բանաձևից, որը նախատեսված է այդ վերլուծության գործակիցները գտնելու համար:

Օրինակ. Վերլուծել (a + b)8 արտահայտությունը Պասկալի եռանկյան օգնությամբ: Դրա համար կատարենք հետևյալ քայլերը.

1. դուրս գրենք Պասկալի եռանկյան ութերորդ տողը: Դրա տարրերը կլինեն երկանդամի վերլուծության համապատասխան գործակիցները.

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

1. մեզ հայտնի է, որ այս վերլուծության յուրաքանչյուր միանդամի աստիճանը հավասար է 8-ի, ընդ որում առաջին միանդամում a թիը գտնվում է ութերորդ աստիճանում, երկրորդ միանդամում a գտնվում է յոթերորդ աստիճանում և b-ն առաջին աստիճանում, երրորդ միանդամում a-ն գտնվում է վեցերորդ աստիճանում և b-ն վեցերորդ աստիճանում, և այսպես շարունակ: Այսինքն՝ a-ի ութերորդ աստիճանը, «անցնելով» միանդամներով, յուրաքանչյուր քայլափոխին

«հարթ վերածվում է b թվի» (նկատենք, որ այստեղ կարևոր է բազմանդամների հաջորդականության հենց այսպիսի կարգ),

1. կստանանք.

(a + b)8 = a8 + 8a7b +28a6b2 + 56a5b3+70a4b4 + 56a3b5 + 28a2b6 + 8ab7 + b8

Եթե առաջադրանքը լիներ գտնել (a - b)8, ապա առաջին երկու քայլերը նույնը կլինեին, իսկ վերջին քայլում, դուրս գրելով վերլուծությունը, պետք է հաշվի առնեինք այն փաստը, որ առաջին միանդամի գործակիցը կլինի + նշանով, երկրորդ միանդամի գործակիցը՝ - նշանով, իսկ հետո գալիս է նշանների հերթափոխություն: Արդյունքում կստանանք հետևյալ բանաձևը.

(a + b)8 = a8 - 8a7b +28a6b2 - 56a5b3+70a4b4 - 56a3b5 + 28a2b6 - 8ab7 + b8

* 1. Պասկալի եռանկյունը և պարզ թվերը

Բերենք Պասկալի եռանկյան եզակի հատկություն, որը բացահայտվել է Գ. Վ. Մաննի և Դ. Շենկսի կողմից 1972թ.-ին և կոչվել է «եռանկյուն մաղ»:

Օր.՝ դուրս գրենք Պասկալի եռանկյան տողերը մինչև 11-րդ տողը և այդ տողերը դասավորենք վերևից ներքև ըստ հետևյալ օրենքի.

1. ամենավերևում դասավորված կլինեն եռանկյան զրոյական տողի տարրերը, դրանից ներքև դասավորված կլինեն թվաբանակական եռանկյան առաջին տողի տարրերը, ավելի ներքև՝ թվաբանակական եռանկյան երկրորդ տողի տարրերը և այսպես շարունակ,
2. յուրաքանչյուր աստիճանի վրա կլինեն տողի առաջին երկու թվերը, իսկ մնացած թվերը կլինեն «օդում»՝ իրար հաջորդ աստիճանների տարրերի վրա,
3. ձևավորված «ուղղահայաց» շարքերը համարակալենք և յուրաքանչյուր տողում ընդգծենք այն տարրերը, որոնք բաժանվում են իրենց տողի համարի վրա,
4. եթե մենք ընդգծենք ուղղահայաց սյունակների համարները, որոնց բոլոր տարրերն ընդգծված են, ապա կբացահայտենք, որ այդ համարները պարզ թվեր են:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | 1 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 |  | ~~1~~ | ~~1~~ | | | | | | | | | | | | | | | | | | |  | ~~8~~ |
| 2 |  |  |  | 1 | ~~2~~ | 1 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 3 |  |  |  |  |  | 1 | ~~3~~ | ~~3~~ | 1 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 4 |  |  |  |  |  |  |  | 1 | ~~4~~ | 6 | ~~4~~ | 1 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 5 |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 1 | ~~5~~ | ~~10~~ | ~~10~~ | ~~5~~ | 1 |  |  |  |  |  |  |  |
| 6 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 1 | ~~6~~ | 15 | 20 | 15 | ~~6~~ | 1 |  |  |  |  |
| 7 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 1 | 7 | ~~21~~ | ~~35~~ | ~~35~~ | ~~21~~ | 7 | 1 |  |
| 8 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 1 | ~~8~~ | 28 | ~~56~~ | 70 | ~~56~~ | 28 |
| 9 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 1 | ~~9~~ | ~~36~~ | 84 | ~~126~~ | ~~126~~ |
| 10 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 1 | ~~10~~ | 45 | ~~120~~ |
| 11 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 1 | ~~11~~ |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | ~~11~~ | 12 | ~~13~~ | 14 | 15 | 16 | ~~17~~ | 18 | ~~19~~ | 20 | 21 | 22 | ~~23~~ |

Խնդիրներ

1. Ապացուցեք, որ n-րդ տողի թվերի գումարը հավասար է 2n, որտեղ n-ը բնական թիվ է:
2. Ապացուցեք, որ այն թվերը, որոնք հավասարաչափ հեռացվել են ցանկացած տողի ծայրերից, իրար հավասար են:
3. Ապացուցեք, որ եթե Պասկալի եռանկյան n-րդ տողի բոլոր անդամները(բացի ծայրամասային անդամներից), սկսած երկրորդ անդամից, բաժանվում են k-ի, ապա n-ը բաժանվում է k-ի:
4. Ապացուցեք, որ եթե Պասկալի եռանկյանs-րդ տողի բոլոր անդամները(բացի ծայրամասային անդամներից), սկսած երկրորդ անդամից, բաժանվում են m-ի, ապա rs համարով տողի ոչ ծայրամասային անդամները բաժանվում են m-ի այն և միայն այն ժամանակ, երբ m-ը բաժանվում է r-ի:
5. Պասկալի եռանկյան m-րդ տողի ոչ ծայրամասային անդամները բաժանվում են m- ի: Այդ դեպքում n-րդ տողի ոչ ծայրամասային տարրերը բաժանվում են m-ի այն և միայն այն դեպքում, եթե n-ը m-ի աստիճան է, այսինքն՝ n = mk:
6. Ապացուցեք, որ եթե m-և բաղադրյալ թիվ է, ապա ոչ մի «տող» m-ի չի բաժանվում:
7. Պասկալի եռանկյան տողի n համարով յուրաքանչյուր ոչ ծայրամասային տարր բաժանվում է p-ի այն և միայն այն դեպքում, երբ p-ն պարզ թիվ է, իսկ n-ը՝ այդ պարզ թվի աստիճանը:
8. Ունենք ճանապարհների ցանց: A կետից դուրս է գալիս 21000 մարդ: Նրանց մի կեսը գնում է l ուղղությամբ, իսկ մյուս կեսը՝ t ուղղությամբ: Հասնելով առաջին խաչմերուկին՝ յուրաքանչյուր խումբ բաժանվում է. կեսը գնում է l ուղղությամբ, իսկ մյուս կեսը՝ t ուղղությամբ: Այսպիսի բաժանում տեղի է ունենում յուրաքանչյուր խաչմերուկում: Քա՞նի մարդ կգա հազարերորդ շարքի յուրաքանչյուր խաչմերուկ:

Դիտարկում. 11-13-րդ առաջադրանքները ձևակերպված են Պասկալի եռանկյան համար, որը թեքված է 45°-ով.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |  |
| 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 | 28 | 36 |  |  |
| 1 | 4 | 10 | 20 | 35 | 56 | 84 |  |  |  |
| 1 | 5 | 15 | 35 | 70 | 126 |  |  |  |  |
| 1 | 6 | 21 | 56 | 126 |  | | | | |
| 1 | 7 | 28 | 84 |  |
| 1 | 8 | 36 |  |  |
| 1 | 9 |  |  |  |
| 1 |  |  |  |  |

1. Ապացուցեք, որ յուրաքանչյուր A թիվ հավասար է նախորդող հորիզոնական շարքի թվերի գումարին` սկսած շարքի ձախ հատվածի ծայրում գտնվող թվից մինչև A թվից վերև գտնվող թիվը:
2. Ապացուցեք, որ յուրաքանչյուր A թիվ հավասար է նախորդող ուղղահայաց շարքի թվերի գումարին` սկսած շարքի ամենավերևում գտնվող թվից մինչև A թվից անմիջապես ձախ գտնվող թիվը:
3. Ապացուցեք, որ եթե յուրաքանչյուր A թիվ նվազեցնենք 1-ով, ապա ստացված թիվը հավասար կլինի այն բոլոր թվերի գումարին, որոնք լրացնում են ուղղանկյունը, որը սահմանափակված է այն ուղղահայաց և հորիզոնական շարքերով, որոնց հատման կետում գտնվում է A թիվը, ընդ որում այդ շարքերը չեն դիտարկվում:
4. Գրենք Պասկալի եռանկյունին և առանձնացված անկյունագծերն անվանենք վերընթաց անկյունագծեր: Ապացուցեք, որ n-րդ անկյունագծի թվերի գումարը հավասար է un Ֆիբոնաչչիի n-րդ թվին(Ֆիբոնաչչիի շարքն ունի հետևյալ տեսքը. 1, 1, 2, 3, 5, …, այսինքն՝ հաջորդականություն, որը տրված նախնական պայմաններով և ռեկուրսիվ հարաբերակցությամբ. u1 = 1, u2 = 1, un+1 = un + un-1):
5. Ապացուցեք, որ Պասկալի եռանկյան բոլոր թվերի գումարը, որոնք ընկած են n-րդ անկյունագծի վրա և դրանից վերև, հավասար է un+2 – 1: Եռանկյունային թվերն այն թվերն են, որոնք բնութագրում են գնդակների նվազագույն քանակությունը, որոնք կարելի է շարել եռանկյան մեջ. Համանմանորեն որոշվում են բրգաձև կամ քառանկյունային թվեր:
6. Ապացուցեք, որ.

## 𝑇0 𝑇1 + ⋯ + 𝑇𝑘𝑇1−𝑘 + ⋯ + 𝑇1 𝑇0 = 𝑇1

𝑚 𝑛

𝑚 𝑛

𝑚 𝑛

𝑚+𝑛

15. Ապացուցեք, որ (𝑇0)2 + (𝑇1)2 + … + (𝑇𝑛)2 = 𝑇𝑛 :

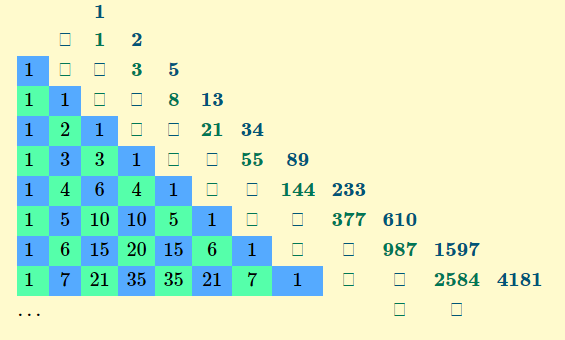
𝑛 𝑛 𝑛 2𝑛

16. Հասարակ դռան կոդավորված կողպեքն ունի 10 կոճակ, որոնցից պետք է միաժամանակ սեղմել 3-ը: Այդ կողպեքի կոդավորման համակցությունների քա՞նի տարբերակ է հնարավոր:

* 1. Պասկալի եռանկյունը և Ֆիբոնաչիի թվերը: Պասկալի և Սերպինսկու

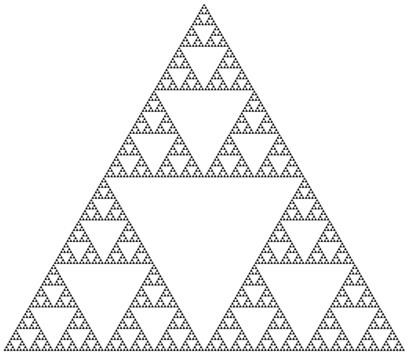
եռանկյունները:

Եթե ձախից հավասարեցնենք Պասկալի եռանկյան տողերը, ապա անկյունագծերի վրա ձախից աջ և ներքևից վերև դասավորված թվերի գումարը հավասար կլինի Ֆիբոնաչիի թվերին. 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, … (այս հաջորդականության յուրաքանչյուր թիվ հավասար է նախորդող երկու թվերի գումարին, իսկ հաջորդականությունը սկսվում է երկու մեկերով).



Պասկալի և Սերպինսկու եռանկյունները: Եթե Պասկալի եռանկյան մեջ բոլոր կենտ թվերը ներկենք մի գույնով, իսկ զույգ թվերը՝ մեկ այլ գույնով, ապա կստացվի

«Պասկալի-Սերպինսկու եռանկյունը».



Նման պատկեր հնարավոր է ստանալ հետևյալ կերպ. ներկված եռանկյան մեջ այլ գույնով ներկենք կենտրոնում տեղակայված եռանկյունին: Մեծ եռանկյան անկյուններում գտնվող երեք փոքր եռանկյունիները թողնենք նույնը: Յուրաքանչյուր անկյունային եռանկյան մեջ ներկենք կենտրոնում գտնվող եռանկյունները: Եթե այս գործողությունն անընդհատ կրկնենք, ապա սկզբնական եռանկյան փոխարեն կմնա երկգույն պատկեր: Եռանկյան այն հատվածը, որը ներկված չէ, կոչվում է Սերպինսկու եռանկյունի:

Սերպինսկու եռանկյան կարևոր հատկանիշներից է ինքնապատկերումը (ինքնանմանությունը): Դա բացատրվում է նրանով, որ Սերպինսկու եռանկյունը կազմված է իր՝ 2 անգամ փոքրացված երեք օրինակներից (դրանք Սերպինսկու եռանկյան մասերն են, որոնք պարունակում են անկյուններում գտնվող փոքր եռանկյուններ): Ինքնապատկերումը նաև ֆրակտալների բնութագրող հատկանիշներից է:

## ԵԶՐԱԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆ

Պասկալի եռանկյունը շատ պարզ կառուցվածք ունի: Միևնույն ժամանակ այն իր մեջ թաքցնում է անսպառ գանձեր և միմյանց է կապում մաթեմատիկայի տարբեր բնագավառներ, որոնք առաջին հայացքից ոչ մի ընդհանուր բան չունեն: Պասկալի եռանկյան այդչափ անսովոր հատկությունները թույլ են տալիս այն համարել ամենահետաքրքիր սխեմաներից մեկը ողջ մաթեմատիկայում:

Սակայն, Պասկալի եռանկյունը, բացի այն, որ մեծ սկզբունքային հետաքրքրություն է ներկայացնում, նաև շատ օգտակար է տարբեր մաթեմատիկական խնդիրների, մասնավորապես, միացությունների տեսության խնդիրների լուծման հարցում:

Մաթեմատիկական և մեթոդական գրականության վերլուծությունը թույլ տվեց լուծել առաջադրված բոլոր խնդիրները: Նշենք հետազոտության հիմնական արդյունքները.

1. Աշխատանքի կարևոր փուլում ուսումնասիրվել և վերլուծվել են թեմային վերաբերող մաթեմատիկական կարևորագույն արժեք ունեցող գրականությունը, ինչպես նաև խորությամբ ուսումնասիրվել են տվյալ թեմային վերաբերող մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացի ծրագրում առկա նյութերը:
2. Աշխատանքում բացահայտվել են Պասկալի եռանկյան թվերի հատկությունները, նրանց կապը զուգորդությունների թվի, ֆակտորիալների, Նյուտոնի երկանդամի հետ։
3. Բացահայտվել է Պասկալի եռանկյան թվերի կապը պարզ թվերի (Գ. Վ. Մաննի և Դ. Շենկսի կողմից 1972թ.-ին հայտնաբերված «եռանկյուն մաղը»), Ֆիբոնաչիի թվերի հետ:
4. Աշխատանքում ներկայացվում են Պասկալի եռանկյան թվերի հատկությունների կիրառությունները մաթեմատիկական խնդիրների լուծման մեջ, մի քանի բանաձևերի արտածման մեջ, ինչպես նաև դիտարկվում են մի քանի խնդիրներ, որոնց լուծումը ընթանում է Պասկալի եռանկյան միջոցով՝ դրանով բացահայտելով

Պասկալի եռանկյան թվերի հատկությունների կիրառման հնարավորությունները մաթեմատիկական տարբեր խնդիրների լուծման մեջ:

Վերևում հիշատակվածը հիմք է տալիս համարել, որ հետազոտության առաջադրված խնդիրները լուծված են:

## ՕԳՏԱԳՈՐԾՎԱԾ ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՑԱՆԿ

1. 1.Գևորգյան Գ., Սահակյան Ա., Ավագ դպրոցի 12-րդ դասարանի դասագիրք, բնագիտամաթեմատիկական հոսքի համար, Երևան, Տիգրան Մեծ, 2011, 208էջ:
2. Виленкин Н.Я. Алгебра и математический анализ 10кл.,11кл.-М.: Мнемозина, 2005;
3. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи. — М.: Наука, 1969. — 112 стр.
4. Дорофеев Г. В. и др. "Алгебра и начала анализа. 10 кл., Ч. I."- M.: Дрофа, 2003;
5. Модель Д.Л. Треугольник Паскаля и элементы комбинаторики в школьном курсе математики. Математика в школе, 2008, №4. - с. 43-48.
6. Мордкович А.Г., Смирнова И.М Математика 10 кл.,11кл.-М.:Мнемозина,2006;
7. Mуравин Г.К. Алгебра и начала анализа 10кл.,-М.: Дрофа.2006;
8. Никольский С.М. и др. Алгебра и начала анализа. 10 кл.,11кл.-М.: Просвещение,2007;
9. Паскаля треугольник // Энциклопедический словарь юного математика / Сост. А. П. Савин. — М.: [Педагогика](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%B5%D0%B4%D0%B0%D0%B3%D0%BE%D0%B3%D0%B8%D0%BA%D0%B0_(%D0%B8%D0%B7%D0%B4%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BB%D1%8C%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%BE)), 1985. — С. 230-232. — 352 с.
10. Попов Г.Н. Треугольник Паскаля и N-я степень числа. Математика в школе, 2008,

№4. - с. 48-50.

1. Тюрина Ю.Н.,Макарова А.А., Высоцкий И.Р., Ященко И.В. Теория вероятностей и статистика.-МНМЦ: АО <<Мoсковские учебники>>, 2004;
2. Успенский В. А. [Треугольник Паскаля](http://ilib.mccme.ru/plm/ann/a43.htm). — М.: Наука, 1979. — 48 стр.
3. Фукс Д., Фукс М. [Арифметика биномиальных коэффициентов](http://kvant.mccme.ru/1970/06/arifmetika_binomialnyh_koeffic.htm) // [Квант](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D1%82_(%D0%B6%D1%83%D1%80%D0%BD%D0%B0%D0%BB)). — 1970. —

№ 6. — С. 17-25.

1. Юркин Ал. Симметричный треугольник Паскаля и арифметический параллелепипед. [LAP Lambert Academic Publishing](https://www.ozon.ru/publisher/lap-lambert-academic-publishing-4910595/), 2015. - 68 стр.

Էլեկտրոնային աղբյուրներ 1.[https://ru.wikipedia.org/wiki/Треугольник\_Паскаля](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D1%80%D0%B5%D1%83%D0%B3%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B8%D0%BA_%D0%9F%D0%B0%D1%81%D0%BA%D0%B0%D0%BB%D1%8F) 2.[https://books.google.am/books?id=xxlgKP5thL8C&pg=PA13#v=onepage&q&f=false](https://books.google.am/books?id=xxlgKP5thL8C&pg=PA13%23v%3Donepage&q&f=false)

1. <https://www.youtube.com/watch?v=0bhpfZgZIAk>

## 

1. m > 1000 դեպքումꙍ𝑚- ը որոշվածչէ: [↑](#footnote-ref-1)
2. Բնականէհամարել, որարտահայտություննիմաստունիև k>n դեպքումհավասարէ 0-ի, քանիորայդդեպքում kտարրայինմասերչկան: [↑](#footnote-ref-2)