**ՎԵՐԱՊԱՏՐԱՍՏՈՂ ԿԱԶՄԱԿԵՐՊՈՒԹՅՈՒՆ**

**«ՇԻՐԱԿԻ Մ. ՆԱԼԲԱՆԴՅԱՆԻ ԱՆՎԱՆ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ»**

**ՀԻՄՆԱԴՐԱՄ**

**ՀԵՏԱԶՈՏԱԿԱՆ ԱՇԽԱՏԱՆՔ**

**Թեմա՝** **ԻՆՎԱՐԻԱՆՏԻ ԿԻՐԱՌՈՒՄԸ ԱՊԱՑՈՒՑՄԱՆ ԵՎ/ԿԱՄ ՀԵՐՔՄԱՆ**

 **ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ**

**Կատարող՝ Արդենիսի հիմնական դպրոցի ուսուցիչ Զորկին Իսպիրյան**

**Ղեկավար՝ Ալվարդ Սարուխանյան**

**ԵՐԵՎԱՆ 2022**

**ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ**

**ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ-------------------------------------------------------------------------------------3**

**ԻՆՎԱՐԻԱՆՏԻ ԿԻՐԱՌՈՒՄԸ ԱՊԱՑՈՒՑՄԱՆ ԵՎ/ԿԱՄ ՀԵՐՔՄԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ -----5**

**ԵԶՐԱԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆ --------------------------------------------------------------------------------16**

**ՕԳՏԱԳՈՐԾՎԱԾ ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՑԱՆԿ------------------------------------------------------17**

**ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ**

Անցնելով տասներկուամյա կրթական համակարգի՝ դպրոցական դասընթացում տարբեր առարկաների ծրագրերում կատարվեցին որոշակի փոփոխություններ. ավելացան նոր բաժիններ, կամ էլ եղած բաժիններում մատուցվող նյութը դարձավ առավել ընդգրկուն:

Մասնավորապես, 11-րդ դասարանի բնագիտամաթեմատիկական հոսքի հանրահաշվի դպրոցական դասընթացում «Տրամաբանության տարրեր» գլխում ավելացավ նոր պարագրաֆ` «Ապացուցում և հերքում»:

«**Ապացուցման և հերքման հիմնական մեթոդները**», որում խոսվում է ապացուցման տարբեր մեթոդների՝ համադրման, հակասող ենթադրության, Դիրիխլեի սկզբունքի, բացառման, հակաօրինակի մասին։

Կարծում ենք՝ ցանկալի կլիներ, որ նույն պարագրաֆում խոսվեր նաև ինվարիանտի մասին, քանզի մաթեմատիկայի և ֆիզիկայի դպրոցական դասընթացներում, ինչպես նաև դպրոցականների օլիմպիադաների տարբեր փուլերում հանդիպում են այնպիսի խնդիրներ, որոնց լուծման համար աշակերտներից պահանջվում է ոչ միայն տեսական նյութի իմացություն, այլև տարբեր մեթոդների և հնարքների տիրապետում:

Այդպիսի մեթոդներից մեկն էլ ինվարիանտի կիրառման մեթոդն է:

Վերջինս կարելի է համարել մեթոդ՝ ելնելով Պոյայի այն հայտնի դիտարկումից, որի համաձայն՝ ամեն մի հնարք, որը կիրառելի է մեկից ավել դեպքերում, կարելի է համարել մեթոդ:

Սույն աշխատանքը նպատակն է մաթեմատիկայի և ֆիզիկայի դպրոցական դասընթացներում տարբեր ոչ տիպային խնդիրների լուծման ժամանակ ինվարիանտի հնարավոր կիրառությունների վեր հանմանը:

Ըստ էության, աշխատանքի նորույթն այն է, որ փորձել ենք հստակ առանձնացնել ինվարիանտի երկու «տարատեսակ», այն է՝ առկա ինվարիանտ և փնտրվող ինվարիանտ, որոնք հանդիպում են մաթեմատիկայի և ֆիզիկայի տարբեր ոչ տիպային խնդիրներում, ինչպես նաև առաջարկել ենք մեթոդական ցուցումներ խնդիրներում հանդիպող ինվարիանտների տարբեր տիպերի և վերջիններիս կիրառման հնարավորությունների մասին։

Կարծում ենք՝ թեման բավական արդիական է, քանզի մաթեմատիկայի և ֆիզիկայի հանրապետական օլիմպիադաների արդյունքների վերլուծությունը վկայում է, որ սովորողների զգալի մասը դժվարանում է լուծել տարբեր ինվարիանտներին առնչվող խնդիրները:

Դա հիմնականում պայմանավորված է այն հանգամանքով, որ աշակերտները կա՛մ ամենևին ծանոթ չեն այս մեթոդին, կա՛մ էլ, առաջարկվող մեթոդին ֆորմալ առումով ծանոթ լինելով հանդերձ, չեն արժևորում վերջինիս կիրառման հնարավորությունն ու արդյունավետությունն և փորձում են խնդիրները լուծել առանց ինվարիանտի կիրառման։

**ԻՆՎԱՐԻԱՆՏԻ ԿԻՐԱՌՈՒՄԸ ԱՊԱՑՈՒՑՄԱՆ ԵՎ/ԿԱՄ ՀԵՐՔՄԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ**

Մաթեմատիկայի և ֆիզիկայի տարբեր խնդիրներում երբեմն հանդիպում են այնպիսի մեծություններ (կամ մեծությունների այնպիսի հատկություններ), որոնք տվյալ խնդրի պայմաններում մնում են անփոփոխ` ինվարիանտ, ընդ որում, այդ մեծությունների ինվարիանտ լինելը պայմանավորված է լինում ոչ թե պահպանման որևէ օրենքով կամ ինչ-որ թեորեմի ուժով, այլ հենց տվյալ խնդրի դրվածքով կամ ելակետային պայմաններով:

Առանձին դեպքերում հենց այդպիսի ինվարիանտների կիրառումն էլ դառնում է անհրաժեշտ և որոշիչ տվյալ խնդիրների լուծման ժամանակ:

Աշակերտի համար, որն առաջին անգամ է ծանոթանում այս մեթոդին, առաջին հայացքից կարող է խիստ զարմանալի թվալ, թե ինչպե՛ս կարող է ինվարիանտը դառնալ արդյունավետ և օգտակար «գործիք» տարաբնույթ բարդ խնդիրների լուծման ժամանակ։

Ինվարիանտություն ([լատ.](https://www.wikiwand.com/hy/%D4%BC%D5%A1%D5%BF%D5%AB%D5%B6%D5%A5%D6%80%D5%A5%D5%B6)՝ inva- rians (invariantis)- չփոփոխվող), որոշակի պայմանների փոփոխման և ձևափոխությունների ժամանակ մաթեմատիկական և [ֆիզիկական](https://www.wikiwand.com/hy/%D5%96%D5%AB%D5%A6%D5%AB%D5%AF%D5%A1%D5%AF%D5%A1%D5%B6_%D5%B4%D5%A5%D5%AE%D5%B8%D6%82%D5%A9%D5%B5%D5%B8%D6%82%D5%B6%D5%B6%D5%A5%D6%80) մեծությունների անփոփոխ մնալու հատկությունը։

Ինվարիանտության հետ է կապված բնության այս կամ այն [սիմետրիան](https://www.wikiwand.com/hy/%D5%8D%D5%AB%D5%B4%D5%A5%D5%BF%D6%80%D5%AB%D5%A1_%28%D6%86%D5%AB%D5%A6%D5%AB%D5%AF%D5%A1%29), իսկ դա, իր հերթին, հանգեցնում է ինվարիանտների, այսինքն՝ [պահպանման օրենքների](https://www.wikiwand.com/hy/%D5%8A%D5%A1%D5%B0%D5%BA%D5%A1%D5%B6%D5%B4%D5%A1%D5%B6_%D6%85%D6%80%D5%A5%D5%B6%D6%84%D5%B6%D5%A5%D6%80) գոյությանը ([Նյոթերի թեորեմ](https://www.wikiwand.com/hy/%D5%86%D5%B5%D5%B8%D5%A9%D5%A5%D6%80%D5%AB_%D5%A9%D5%A5%D5%B8%D6%80%D5%A5%D5%B4))։

Այսպես, զուգահեռ տեղափոխության (տրանսլյացիայի) նկատմամբ ֆիզիկական օրենքների ինվարիանտություն, որը կապված է եռաչափ տարածության համասեռության հետ, հանգեցնում է մեկուսացված համակարգի [շարժման քանակի պահպանման օրենքին](https://www.wikiwand.com/hy/%D4%BB%D5%B4%D5%BA%D5%B8%D6%82%D5%AC%D5%BD%D5%AB_%D5%BA%D5%A1%D5%B0%D5%BA%D5%A1%D5%B6%D5%B4%D5%A1%D5%B6_%D6%85%D6%80%D5%A5%D5%B6%D6%84)։

ժամանակի հաշվարկման սկզբնապահի փոփոխության նկատմամբ ինվարիանտություն, որը կապված է ժամանակի համասեռության հետ, հանգեցնում է մեկուսացված համակարգի [էներգիայի պահպանման օրենքին](https://www.wikiwand.com/hy/%D4%B7%D5%B6%D5%A5%D6%80%D5%A3%D5%AB%D5%A1%D5%B5%D5%AB_%D5%BA%D5%A1%D5%B0%D5%BA%D5%A1%D5%B6%D5%B4%D5%A1%D5%B6_%D6%85%D6%80%D5%A5%D5%B6%D6%84)։

Ճիշտ նույն ձևով եռաչափ տարածության [իզոտրոպությունը](https://www.wikiwand.com/hy/%D4%BB%D5%A6%D5%B8%D5%BF%D6%80%D5%B8%D5%BA%D5%B8%D6%82%D5%A9%D5%B5%D5%B8%D6%82%D5%B6) (ինվարիանտության պտույտի նկատմամբ) կապված է [շարժման քանակի մոմենտի պահպանման օրենքի](https://www.wikiwand.com/hy/%D4%BB%D5%B4%D5%BA%D5%B8%D6%82%D5%AC%D5%BD%D5%AB_%D5%B4%D5%B8%D5%B4%D5%A5%D5%B6%D5%BF%D5%AB_%D5%BA%D5%A1%D5%B0%D5%BA%D5%A1%D5%B6%D5%B4%D5%A1%D5%B6_%D6%85%D6%80%D5%A5%D5%B6%D6%84) հետ։

Ֆիզիկական օրենքներն ինվարիանտ են [Լորենցի ձևափոխությունների](https://www.wikiwand.com/hy/%D4%BC%D5%B8%D6%80%D5%A5%D5%B6%D6%81%D5%AB_%D5%B1%D6%87%D5%A1%D6%83%D5%B8%D5%AD%D5%B8%D6%82%D5%A9%D5%B5%D5%B8%D6%82%D5%B6%D5%B6%D5%A5%D6%80) նկատմամբ։ Ինվարիանտության հասկացության մեջ կարևոր դեր է կատարում ձևափոխությունների խումբը։

Տարբերում են անընդհատ (տրանսլյացիայի ձևափոխություններ) և ընդհատ ([կոորդինատների համակարգի](https://www.wikiwand.com/hy/%D4%BF%D5%B8%D5%B8%D6%80%D5%A4%D5%AB%D5%B6%D5%A1%D5%BF%D5%B6%D5%A5%D6%80%D5%AB_%D5%B0%D5%A1%D5%B4%D5%A1%D5%AF%D5%A1%D6%80%D5%A3) հայելային անդրադարձում) խմբեր ու դրանց համապատասխան սիմետրիաներ։

20-րդ դարի կեսերին [տարրական մասնիկների ֆիզիկայում](https://www.wikiwand.com/hy/%D5%8F%D5%A1%D6%80%D6%80%D5%A1%D5%AF%D5%A1%D5%B6_%D5%B4%D5%A1%D5%BD%D5%B6%D5%AB%D5%AF%D5%B6%D5%A5%D6%80%D5%AB_%D6%86%D5%AB%D5%A6%D5%AB%D5%AF%D5%A1) հայտնաբերվել է սիմետրիայի ընդհատ ձևափոխությունների հետ կապված պահպանման օրենքների խախտում (տարածական և կոմբինացված [զույգության](https://www.wikiwand.com/hy/%D4%B6%D5%B8%D6%82%D5%B5%D5%A3%D5%B8%D6%82%D5%A9%D5%B5%D5%B8%D6%82%D5%B6_%28%D6%86%D5%AB%D5%A6%D5%AB%D5%AF%D5%A1%29) խախտումը [թույլ փոխազդե-ցությունում](https://www.wikiwand.com/hy/%D4%B9%D5%B8%D6%82%D5%B5%D5%AC_%D6%83%D5%B8%D5%AD%D5%A1%D5%A6%D5%A4%D5%A5%D6%81%D5%B8%D6%82%D5%A9%D5%B5%D5%B8%D6%82%D5%B6))։

Ինվարիանտ շատ մեծությունների պահպանումը և դրանց համապատասխանող սիմետրիաները մոտավոր բնույթ ունեն (օրինակ, իզոտոպ սպինը և համապատասխան իզոտոպ ինվարիանտությունը, մի շարք այլ սիմետրիաներ, որոնք կապված են տարրական մասնիկների ներքին հատկությունների հետ)։

 Այդ «խախտված» սիմետրիաների բնույթը հասկանալը տարրական մասնիկների ֆիզիկայի համար կարևոր խնդիր է։

Մաթեմատիկայում ինվարիանտ կոչվում են [թվերը](https://www.wikiwand.com/hy/%D4%B9%D5%BE%D5%A5%D6%80), խմբերը և այն [մաթեմատիկական](https://www.wikiwand.com/hy/%D5%84%D5%A1%D5%A9%D5%A5%D5%B4%D5%A1%D5%BF%D5%AB%D5%AF%D5%A1) մեծություններն ու օբյեկտները, որոնք չեն փոխվում, երբ որոշակի (հակադարձելի) ձևափոխությունների է ենթարկվում կամ օբյեկտն ինքը, կամ այն կոորդինատային համակարգը, որում նկարագրվում է օբյեկտը։

**Օրինակ**

 քառակուսի մատրիցի հետքը (այսինքն նրա գլխավոր անկյունագծի տարբերի գումարը) չի փոխվում, եթե  A-ն ենթարկվում է   ձևափոխության. որտեղ X-ը նույն [կարգի](https://www.wikiwand.com/hy/%D4%BF%D5%A1%D6%80%D5%A3) հակադարձելի մատրից է։

Հետևաբար [մատրիցի](https://www.wikiwand.com/hy/%D5%84%D5%A1%D5%BF%D6%80%D5%AB%D6%81) հետքը նրա ինվարիանտն է նշված ձևափոխությունների նկատմամբ։

Ինվարիանտի գաղափարը, որ սաղմնավորվել է դեռևս [Կ. Գաուսի](https://www.wikiwand.com/hy/%D4%BF%D5%A1%D5%BC%D5%AC_%D4%B3%D5%A1%D5%B8%D6%82%D5%BD) աշխատանքներում (1801 թ.), կիրառել է գերմանացի մաթեմատիկոս Օ. Հեսսեն (1844 թ.), սակայն ինվարիանտների տեսությունը կանոնավոր կերպով զարգացրել է անգլիացի մաթեմատիկոս Ջ. Սիլվեստրը (1851-1852 թթ.), որը և առաջարկել է «ինվարիանտ» տերմինը։

Հետագա զարգացումը XIX դ. կեսերին հանգեցրեց ինվարիանտի տեսության հիմնական խնդրի ձևավորմանը, ապացուցել, որ գծային ձևերի վերջավոր համակարգի համար բոլոր այն ինվարիանտները, որոնք ձևերի գործակիցների ռացիոնալ ֆունկցիաներ են, ունեն վերջավոր բազիս, որի տարրերի միջոցով յուրաքանչյուր ռացիոնալ ինվարիանտ արտահայտվում է ռացիոնալ ֆունկցիայի տեսքով։

Այս [խնդրի](https://www.wikiwand.com/hy/%D5%80%D5%AB%D5%AC%D5%A2%D5%A5%D6%80%D5%BF%D5%AB_%D5%AD%D5%B6%D5%A4%D5%AB%D6%80%D5%B6%D5%A5%D6%80) պրոյեկտիվ տարբերակը լուծել է [Դ. Հիլբերտը](https://www.wikiwand.com/hy/%D4%B4%D5%A1%D5%BE%D5%AB%D5%A9_%D5%80%D5%AB%D5%AC%D5%A2%D5%A5%D6%80%D5%BF) (1890-1893 թթ.), որից հետո ինվարիանտի տեսությունը մեծ պրոբլեմներ չունենալու պատճառով անկում է ապրել։

Ինվարիանտների տեսության նոր վերելքը XX դ. հիմնականում պայմանավորված է Հ. Վեյլի, Է. Կարտանի, Է. Մամֆորդի աշխատանքներով։

Բոլոր ձևափոխությունները, որոնց նկատմամբ ինվարիանտները մնում են այդպիսին (պահպանում են իրենց հատկությունը), կազմում են խումբ։

Ըստ էության, հիմնական դժվարությունն այն է, որ յուրաքանչյուր կոնկրետ խնդրում ի սկզբանե ամենևին պարզ չէ, նրանում կիրառելի՞ է արդյոք այս մեթոդը, թե ոչ, և բացի այդ, այս մեթոդի կիրառման ցանկության դեպքում անգամ, խնդրի տեսքից ու դրվածքից ելնելով, այնքան էլ հեշտ չէ կռահել, թե նրանում ի՞նչն է հանդես գալիս ինվարիանտի դերում։

Դրա համար, ֆորմալ առումով այս մեթոդին ծանոթանալուց զատ, անհրաժեշտ է տրամաբանական խնդիրների լուծման որոշակի հմտություն, կարողություն և փորձառություն։Ինչպես վերը նշեցինք, շատ խնդիրներում հանդիպում են այնպիսի մեծություններ կամ տարբեր մեծությունների այնպիսի հատկություններ, որոնք, ելնելով տվյալ խնդրի դրվածքից կամ ելակետային պայմաններից, մնում են անփոփոխ՝ ինվարիանտ։

Ըստ այդմ, առանձնացնենք ինվարիանտի երկու «տարատեսակ», այն է՝ առկա և փնտրվող։

Պայմանավորվենք.

• **եթե խնդրի ելակետային պայմաններում բացահայտ կամ ոչ բացահայտ նշվում է ինչ-որ մեծության (կամ վերջինիս ինչ-որ հատկության) անփոփոխ լինելու մասին, ապա տվյալ մեծությանը համարենք առկա ինվարիանտ դիտարկվող խնդրի պայմաններում,**

**• եթե խնդրի ելակետային պայմաններում ի սկզբանե բացակայում է որևէ անփոփոխ մեծություն, սակայն որոշակի ձևափոխություններից կամ տրամաբանական դատողություններից հետո հնարավոր է գտնել այդպիսին, ապա տվյալ մեծությանը համարենք փնտրվող ինվարիանտ դիտարկվող խնդրի պայմաններում։**

**Մեթոդական ցուցումներ և խնդրաշարք։** Կարծում ենք՝ առաջին անգամ ինվարիանտի էությանը ծանոթացող աշակերտների հետ ցանկալի է նախապես քննարկել այնպիսի խնդիրներ, որոնցում ի սկզբանե առկա է որոշակի անփոփոխ մեծություն, որից հետո միայն քննարկել խնդիրներ, որոնցում կարիք կա ինվարիանտի փնտրման։

Ընդ որում, ավելորդ չէ նշել, որ եթե խնդրում հաջողվում է գտնել ինվարիանտ (առկա կամ փնտրվող), ապա պետք է փորձել այն անմիջականորեն կիրառել տվյալ խնդրի լուծման ընթացքում։

Այս համատեքստում քննարկենք մի քանի ոչ տիպային խնդիրներ, որոնց լուծման ժամանակ կօգտվենք կա՛մ առկա, կա՛մ փնտրվող ինվարիանտի գոյության փաստից և վերջինիս անմիջական կիրառումից։

**Խնդիր 1:** Ճկուն հաղորդալարից պատրաստված է a = 0,1մ կողմով քառակուսաձև կոնտուր, որի դիմադրությունը 5 R = 10 Օմ է:

Կոնտուրը տեղադրված է B = 5Տլ ինդուկցիայով համասեռ մագնիսական դաշտում այնպես, որ կոնտուրի հարթությունն ուղղահայաց է մագնիսական ինդուկցիայի վեկտորին: Ի՞նչ Δq լիցք կհոսի կոնտուրով, եթե վերջինիս տանք հավասարակողմ եռանկյան տեսք՝ թողնելով նույն հարթության մեջ:

**Լուծում:** Հեշտ է նկատել, որ տվյալ խնդրում գործ ունենք առկա (խնդրի ելակետային տվյալներից բխող) ինվարիանտի հետ. ակնհայտ է, որ ճկուն հաղորդալարին ինչ տեսք էլ որ տանք, վերջինիս երկարությունը կմնա հաստատուն։

Հետևաբար, կոնտուրի ձևը փոխելուց հետո ստացված b կողմով կանոնավոր եռանկյան և տրված a կողմով քառակուսու պարագծերի հավասարությունից կստանանք՝b=3 /4 a , որտեղից էլ կոնտուր թափանցող մագնիսական դաշտի հոսքի սկզբնական և վերջնական արժեքների համար կստանանք՝ 

Մյուս կողմից, համաձայն Ֆարադեյի և Օհմի օրենքների, կոնտուրում մակածված ԷԼՇՈՒ-ն`



որտեղից որոնելի Δq լիցքի համար կստանանք`



Նկատենք, որ խնդիրը կարելի է ընդհանրացնել և դիտարկել կամայական կանոնավոր բազմանկյան կամ շրջանագծի տեսք ունեցող կոնտուրներ։

**Խնդիր 2։** Դասարանում բացակաների քանակը կազմում է ներկաների քանակի 1/6-րդ մասը։ Այն բանից հետո, երբ դասասենյակից մեկ աշակերտ դուրս եկավ, բացակաների քանակը կազմեց ներկաների քանակի 1/5-րդ մասը։ Պարզել, թե քանի՝ աշակերտ է սովորում տվյալ դասարանում։

**Լուծում:** Պարզ է, որ այս խնդիրը հեշտությամբ կարելի է լուծել փոփոխական ներմուծելով և վերջինիս նկատմամբ համապատասխան հավասարում կազմելով։ Սակայն ստորև կվարվենք այլ կերպ։

 Չնայած խնդրում բացահայտ չի նշվում որևէ մեծության անփոփոխ լինելու մասին, սակայն հեշտ է նկատել, որ ելնելով խնդրի դրվածքից, գործ ունենք առկա (ոչ բացահայտ) ինվարիանտի հետ, այն է՝ տվյալ դասարանի աշակերտների ընդհանուր քանակը։

Փորձենք թե՛ սկզբում և թե՛ վերջում ներկաների և բացակաների քանակները գնահատել ըստ այս առկա ինվարիանտի։

Քանի որ սկզբում բացակաների քանակը 6 անգամ փոքր էր ներկաների քանակից, կնշանակի բացակաները կազմում էին դասարանի բոլոր աշակերտների քանակի 1/7- րդ մասը։

Նույն կերպ, դասասենյակից մեկ աշակերտի դուրս գալու արդյունքում բացակաները կկազմեն դասարանի բոլոր աշակերտների քանակի 1/6-րդ մասը, կնշանակի մեկ աշակերտը կազմում է դասարանի ընդհանուր աշակերտների քանակի 1/6-1/7= 1/42 րդ մասը, և ուրեմն, դասարանում սովորում է 42 աշակերտ։

Այժմ քննարկենք խնդիրներ, որոնցում ի սկզբանե չկա խնդրի ելակետային տվյալներից բխող որևէ ինվարիանտ, սակայն խնդրի վերլուծության և տրամաբանական դատողություններով հնարավոր է «փնտրել» ու գտնել այդպիսի մեծություն և վերջինիս կիրառմամբ էլ լուծել առաջադրված խնդիրը։

**Խնդիր 3:** h = 3 մ բարձրությամբ հերմետիկ փակված ամանն ամբողջությամբ լցված է ջրով այնպես, որ նրա հատակին կա օդի երկու միանման պղպջակ: Ամանի հատակին ճնշումը P0 = 0,15 ՄՊա է:

 Ինչքա՞ն կդառնա ճնշումը հատակին, եթե պղպջակներից մեկը բարձրանա վերև, իսկ մյուսը մնա ամանի հատակին։

**Լուծում:** Պղպջակների սկզբնական ծավալները նշանակենք V0 -ով, պրոցեսից հետո վեր բարձրացած պղպջակի ծավալը նշանակենք V1 -ով, իսկ ներքևում մնացածինը՝ V2 -ով:

Պարզ է, որ ամանի ջուրը կարելի է պղպջակների համար համարել թերմոստատ: Ըստ այդմ և՛ պրոցեսի սկզբում և՛ վերջում պղպջակներում եղած օդի ջերմաստիճանը նույնն է և հավասար է ջրի ջերմաստիճանին:

Համաձայն խնդրի պայմանի՝ ամանը հերմետիկորեն փակված է, հետևաբար կարող ենք եզրակացնել, որ համակարգի ծավալն անփոփոխ է:

Քանի որ ջուրն անսեղմելի է, ապա պետք է հաստատուն մնա նաև պղպջակների ծավալների գումարը՝

****

Փաստորեն որոնելի փնտրվող ինվարիանտը պրոցեսի վերջում պղպջակների գումարային ծավալն է։

Եթե պրոցեսի վերջում ամանի հատակում հաստատված ճնշումը նշանակենք P -ով, ապա Բոյլ-Մարիոտտի օրենքի համաձայն կունենանք`



Այս հավասարումներից արտաքսելով V1 -ն ու V2 -ը և ի նկատի ունենալով վերջիններիս գումարի ինվարիանտ լինելը՝ ի վերջո որոնելի P ճնշման համար կստանանք՝ P = 1,7 ՄՊա:

**Խնդիր 4**: F հորիզոնական ազդող ուժը շարժման մեջ է դնում A սեպն ու B ձողը: Սեպի թեքման անկյունը α է, սեպի և ձողի զանգվածները` m (տե՛ս նկ.1): Գտնել սեպի արագացումը և սեպի ու ձողի փոխազդեցության ուժը, եթե շփումը բացակայում է:



**Լուծում:** Հեշտ է նկատել, որ սեպի և ձողի շարժումները փոխկապակցված են. ցանկացած t ժամանակում, եթե սեպը տեղաշարժվի x չափով, ապա ձողը կբարձրանա

y = xtgα չափով և ուրեմն y /x=-tg const = = α հարաբերությունը սեպի և ձողի շարժման ողջ ընթացքում ինվարիանտ է:

Հետևաբար կարող ենք պնդել, որ ձողի և սեպի տեղափոխությունների հարաբերությունը ևս ժամանակի ցանկացած պահին հաստատուն մեծություն է և հավասար է α անկյան տանգենսին:

Պարզ է, որ նման կապ գոյություն ունի նաև ժամանակի ցանկացած պահին այդ մարմինների ակնթարթային արագությունների ու արագացումների միջև, այսինքն`

:

Ձողը դեպի վեր շարժվում է aB արագացմամբ, որը պայմանավորված է սեպի կողմից նրա վրա ազդող  հակազդեցության ուժի ուղղաձիգ բաղադրիչի և ծանրության ուժի մոդուլի տարբերությամբ`



Սեպին հորիզոնական արագացում հաղորդում են  ուժն ու նրա վրա ազդող -ուժի հորիզոնական բաղադրիչը`



Լուծելով ստացված հավասարումների համակարգը, կստանանք՝ 

**Խնդիր 5**: Տրված AB ուղղի վրա կամայական ձևով նշված են թվով 45 տարբեր կետեր, որոնք չեն պատկանում [ AB] հատվածին:

Ապացուցել, որ այդ բոլոր կետերի A կետից ունեցած հեռավորությունների գումարը չի կարող հավասար լինել նրանց` B կետից ունեցած հեռավորությունների գումարին:

**Լուծում:** AB հատվածի երկարությունը նշանակենք a :

Նկատենք, որ [ AB] հատվածին չպատկանող, բայց AB ուղղին պատկանող կամայական M կետի համար



և ուրեմն այս խնդրի պայմաններում MA MB − մեծությունն ինվարիանտ է, հետևաբար տրված 45 տարբեր կետերն ինչպիսին էլ լինեն, նրանց A կետից ունեցած հեռավորությունների գումարի և B կետից ունեցած հեռավորությունների գումարի տարբերությունն իրենից կներկայացնի թվով 45 գումարելիներից կազմված այսպիսի գումար`

 

որը, բնականաբար, տարբեր է զրոյից և ուրեմն, նշված գումարները միմյանց հավասար չեն:

Նկատենք, որ խնդիրը կարելի է ընդհանրացնել և դիտարկել ուզած քանակի կենտ թվով կետեր և միևնույն երկարությամբ, ուզած քանակի կենտ թվով հատվածներ։

**Խնդիր 6:** Հնարավո՞ր է արդյոք 3x3x1 չափսերի 77 հատ աղյուսները դասավորել 7x9x11 չափսերի արկղում:

**Լուծում:** Ենթադրենք հնարավոր է: Այդ դեպքում դիտարկենք արկղի 7x11 նիստին առընթեր 1 հաստությամբ շերտը:

Պարզ է, որ տրված աղյուսներից մի քանիսը կամ ամբողջությամբ կգտնվեն այդ շերտում, այսինքն՝ այդ շերտում կզբաղեցնեն թվով ինը 1x1x1 չափսերի միավոր խորանարդիկներ, կամ էլ այդ շերտից կզբաղեցնեն թվով երեք 1x1x1 չափսերի միավոր խորանարդիկներ և ուրեմն, ցանկացած դասավորության դեպքում նշված շերտում կլինեն 3-ին բազմապատիկ թվով 1x1x1 չափսերի միավոր խորանարդիկներ, ինչը հնարավոր չէ, քանի որ 7 x11 =77 /3 ⋅ = Μ/ , հետևաբար թվով 77 հատ 3x3x1 չափսերի աղյուսներով հնարավոր չէ ամբողջությամբ լրացնել 7x9x11 չափերի արկղը:

Հավելենք, որ հանդիպում են նաև այնպիսի խնդիրներ, որոնցում ինվարիանտ է մնում ոչ թե կոնկրետ մեծությունը կամ մեծության որևէ հատկությունը, այլ ինվարիանտ է մնում փոփոխվող մեծության փոխման դինամիկան, այսինքն՝ փոփոխվող մեծությունն իր փոփոխման ընթացքում կա՛մ միշտ աճում է, կա՛մ միշտ նվազում, ասել է թե՝ փոփոխվող մեծությունը փոփոխվում է մոնոտոն ձևով։

Որպես ասվածի վառ օրինակ՝ դիտարկենք հետևյալ խնդիրը, որն առաջադրվել է 1986թ-ի դպրոցականների մաթեմատիկայի միջազգային օլիմպիադայում։

**Խնդիր 7:** Կանոնավոր հնգանկյան յուրաքանչյուր գագաթում գրված է ինչ-որ ամբողջ թիվ այնպես, որ նրանցից գոնե մեկը բացասական է, սակայն բոլորի գումարը դրական է։

Թույլատրվում է կատարել հետևյալ փոփոխությունը․ եթե որևէ երեք հարևան գագաթներում գրված են համապատասխանաբար x y; և z թվերը, ընդ որում ապա այդ թվերը կարելի է փոխարինել համապատասխանաբար  թվերով, ընդ որում փոփոխությունը կատարվում է այնքան ժամանակ, քանի դեռ հնգանկյան որևէ գագաթում առկա է բացասական ամբողջ թիվ։

Պարզել՝ այս պրոցեսը վերջավոր քայլերից հետո կարո՞ղ է ավարտվել, թե այն հնարավոր է անվերջ շարունակել։

**Լուծում։** Դիցուք սկզբում հնգանկյան գագաթներում հաջորդաբար գրված են համապատասխանաբար x y z t ; ; ; և u ամբողջ թվերը,ընդ որումՀամաձայն խնդրի պայմանի՝ ամբողջ թվերի x y z t u հնգյակը պետք է փոխարինենք  հնգյակով:

Նկատենք, որ խնդրում ունենք առկա ինվարիանտ, այն է՝ հնգանկյան գագաթներում գրված թվերի գումարը. իրոք,



Ներմուծենք հնգանկյան գագաթներում եղած թվերով որոշվող հետևյալ փոփոխականը՝



Ապացուցենք, որ յուրաքանչյուր ընթացիկ քայլում x y z t u հնգյակը

հնգյակով փոխարինելիս ստանում ենք նոր



փոփոխական այնպիսին, որ 

Իրոք, հեշտ է նկատել, որ



Այսպիսով, ունենք F փոփոխական, որը հնգյակների փոփոխման ժամանակ միշտ ընդունում է դրական ամբողջ արժեքներ և պրոցեսի ողջ ընթացքում մոնոտոն նվազում է, հետևաբար կարող ենք եզրակացնել, որ վերը նկարագրված պրոցեսը վերջավոր քայլերից հետո, բնականաբար, կավարտվի։

**ԵԶՐԱԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆ**

Ցանկացած առարկայի ուսուցիչ պետք է լիարժեք տիրապետի այն բոլոր "հրաշքներին" (ծրագրերին, կայքերին, դրանցում առկա ֆորումներին, տեսանյութերին և մասնագիտական ցանցերին), որոնցով հնարավոր է ուսումնական գործընթացը դարձնել հետաքրքիր, ժամանակակից և որակյալ:

Ամփոփելով կարող ենք ասել, որ ինվարիանտն իր օգտակար և արդյունավետ կիրառությունն ունի այնպիսի խնդիրներում, որոնցում

* գործ ունենք առկա կամ փնտրվող ինվարիանտ կոնկրետ մեծության հետ (ինչպես, օրինակ, խնդիր 1-ում շրջանակի երկարությունը կամ խնդիր 2-ում դասարանի աշակերտների ընդհանուր քանակը),
* ինվարիանտ է մնում ոչ թե առանձին կոնկրետ մեծություն, այլ փոփոխական մեծությունների ինչ-որ կոմբինացիա՝ գումար, տարբերություն, քանորդ և այլն (ինչպես, օրինակ՝ խնդիր 3-ում պղպջակների ծավալների գումարը, խնդիր 4-ում չորսուի և սեպի արագացումների մոդուլների հարաբերությունը կամ խնդիր 5-ում MA - MB երկարությունների տարբերությունների մոդուլը),
* ինվարիանտ է մնում փոփոխական մեծության որևէ հատկություն՝ զույգություն, պատիկություն և այլն (ինչպես, օրինակ՝ խնդիր 6-ում միավոր չափսերի խորանարդիկների քանակի 3-ին բազմապատիկ լինելը)
* ինվարիանտ է մնում փոփոխական մեծության փոփոխման դինամիկան․ երբ խնդրում նկարագրվող պրոցեսի ողջ ընթացքում փոփոխվող որևէ մեծություն կամ միայն աճում է, կամ միայն նվազում (ինչպես, օրինակ՝ խնդիր 7-ում F փոփոխականի նվազման փաստը)։

**ՕԳՏԱԳՈՐԾՎԱԾ ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՑԱՆԿ**

1. Пойа Д. Математическое открытие. Москва. Издательство «Наука». 1970. 546 с.
2. Энциклопедический словарь юного математика/Сост. А.П. Савин.-М.: Педагогика. 1989. 352 с.
3. Бабинская И.Л. Задачи математических олимпиад. М.: «Наука». 1975. 111 с.
4. Горбачев Н.В. Сборник олимпиадных задач по математике. Москва. Издательство МЦНМО. 2004. 560 с