Վերապատրաստող կազմակերպություն

ՀՀ ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ, ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ, ՄՇԱԿՈՒՅԹԻ և ՍՊՈՐՏԻ ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅՈՒՆ

ՇԻՐԱԿԻ Մ. ՆԱԼԲԱՆԴՅԱՆԻ ԱՆՎԱՆ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆՀԻՄՆԱԴՐԱՄ

ՀԵՏԱԶՈՏԱԿԱՆ ԱՇԽԱՏԱՆՔ

Թեմա՝ **«**ՄԻԱՑՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ:ՀԱՎԱՆԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՏԱՐՐԵՐԻ ՈՒՍՈՒՑՄԱՆ ԱՌԱՋՆԱՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ**»**

Դպրոց՝ Ախուրյան թիվ 1 հիմնական դպրոց

Դասընթացի մասնակից՝ Անահիտ Գրիգորյան

Ղեկավար՝ Ալլա Սարուխանյան

2022թ

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Մաթեմատիկայի ճյուղը, որը զբաղվում է իրական աշխարհի պատահական երևույթների մոդելների կառուցմամբ և դրանց հատկությունների ուսումնասիրմամբ, կոչվում է հավանականության տեսություն:
Հավանականություն հասկացության հիմքում ընկած է էմպիրիկական այն փաստը, որ պատահական բնույթ ունեցող նույնատիպ և անկախ փորձերի երկար հաջորդականություններում տվյալ արդյունքի (պատահույթի) երևան գալու հաճախականությունը մնում է մոտավորապես հաստատուն: Մեզ շրջապատող աշխարհում անակնկալ, անսպասելի և անկանխատեսելի իրադարձություններն այնքան շատ են, որ կարելի է ասել մենք ապրում ենք պատահույթների աշխարհում: Հավանականության տեսությունը մաթեմատիկայի բաժին է, որը ուսուցանում է պատահական երևույթների օրինաչափությունը՝ պատահական իրադարձություններ, պատահական մեծություններ, նրանց հատկությունները և նրանց վրա կատարվող գործընթացները:

Երկար ժամանակ հավանականության տեսությունը չուներ հստակ սահմանում, որը մշակվել է միայն 1929 թվականին: Հավանականության տեսության առաջացումը, որպես գիտություն, վերագրում են միջին դարերին և հենց այդ ժամանակահատվածում կատարված ազարտային խաղերի (օրլյանկա, զառ, պտուտախաղ) մաթեմատիկական վերլուծության առաջին փորձերին: XVII դարի ֆրանսիացի մաթեմատիկոսներ Բլեզ Պասկալը և Պյեր Ֆերման, ուսումնասիրելով ազարտային խաղերում շահումների կանխորոշումը, բացահայտեցին առաջին հավանական օրինաչափությունները, որոնք առաջանում են զառերը նետելու ժամանակ:

Հավանականության տեսությունը զբաղվում է իրադարձությունների ուսումնասիրմամբ, որոնց ելքը հաստատապես անհայտ է: Այն հնարավորություն է տալիս դատել մեկ իրադարձության ելքի հավանականության աստիճանը՝ մյուսի նկատմամբ:

Օրինակ՝ «գիր ու դուշ» խաղալիս միանշանակ չես կարող ասել, թե որ նշանը կհայտնվի: Նշաններից յուրաքանչյուրի ի հայտ գալու հավանականությունը 50% է:

Փորձությունը այս պարագայում մի շարք պայմանների իրականացում է, այս դեպքում մետաղադրամի նետումը: Փորձությունը կարող է տեղի ունենալ անսահմանափակ թվով: Բացի դրանից, սահմանված պայմանները իրենց մեջ ներառում են պատահական գործոններ:

Փորձության արդյունքը համարվում է իրադարձություն: Իրադարձությունը լինում է.

1.Հուսալի (փորձության արդյունքում միշտ տեղի է ունենում)

2.Անհնարին (երբեք տեղի չի ունենում)

3.Պատահական (իրադարձության ընթացքում կարող է տեղի ունենալ կամ չունենալ)

Օրինակ՝ մետաղադրամի նետման դեպքում անհնարին իրադարձություն է, երբ այն կանգնում է կողի վրա, պատահական իրադարձություն է «գիր կամ զուռ»-ի ընկնելը: Փորձության կոնկրետ արդյունքը կոչվում էտարրական իրադարձություն: Փորձության արդյունքում տեղի են ունենում միայն տարրական իրադարձություններ: Բոլոր հնարավոր, տարբեր, կոնկրետ ելքով փորձությունների համախմբում կոչվում է տարրական իրադարձությունների տարածություն:

Տեսության հիմնական հասկացությունները Հավանականություն — Իրադարձության առաջացման հնարավորության աստիճանը: Երբ հիմքերը նրա համար են, որպեսզի ինչ-որ հնարավոր իրադարձություն տեղի ունենա գործնականում, գերակշռում են հակադիր հիմնավորումները, ուրեմն այդ իրադարձությունը կոչում են հավանական, իսկ հակառակ դեպքում՝ քիչ հավանական կամ անհավանական:

Պատահական մեծություն — Մեծություն է, որը փորձության արդյունքում կարող է ընդունել ցանկացած արժեք, ընդ որում՝ նախօրոք անհայտ: Օրինակ՝ հրշեջ կայանների ստացած ահազանգերը թիվը մեկ օրում, 10 կրակոցներից դիպուկների թիվը և այլն:

Պատահական մեծությունները կարելի է դասակարգել երկու կատեգորիաների.

1.Դիսկրետային պատահական մեծություն կոչվում է այն մեծությունը, որը փորձության արդյունքում կարող է ընդունել որոշ հավանական արժեքներ, որոնք վերաբերում են հաշվարկային բազմություններին (էլեմենտներ, որոնք կարող են համարակալվել): Այդ էլեմենտները կարող են լինել ինչպես դրական, այնպես էլ բացասական: Օրինակ՝ կրակոցների թիվը մինչև առաջին դիպուկ հարվածը համարվում է դիսկրետային պատահական մեծություն. այդ մեծությունը կարող է լինել նաև բացասական՝ չնայած հաշվարկային արժեքների թվաքանակին:

2.Անընդմեջ պատահական մեծություն կոչվում է այն մեծությունը, որը ընդունում է ցանկացած արժէքներ դրական և բացասական միջակայքերից: Պարզ է, որ անընդմեջ պատահական մեծության հնարավոր արժէքների թիվն անվերջ է:

Հավանականության տարածություն — հասկացություն, որը 20-րդ դարի 30-ական թվականներին գործածել է Ա. Ն. Կոլմագորովը՝ հավանականություն հասկացության ձևակերպման համար, սկիզբ դրեց հավանականության տեսության բուռն զարգացմանը, ինչպես խիստ մաթեմատիկական կարգապահություն:

ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ:ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ և ԿԻՐԱՌՈՒՄԸ

Բազմությունների տեսության հարցերը կարևոր դեր են խաղում ժամանակակից մաթեմատիկայում: Այդ տեսության հիմնադիրն է գերմանացի մաթեմատիկոս Գեորգ Կանտորը(1845-1818): <<Բազմություն>> հասկացությունը դասվում է նախնական հասկացությունների համակարգին: Առօրյա կյանքում խոսակցության մեջ հաճախ են օգտագործվում այնպիսի արտահայտություններ, ինչպիսիք են՝ <<ֆուտբոլի մարզադաշտում գտնվող մարդկանց բազմություն>>, <<համալսարանում սովորող ուսանողների բազմություն>>, <<աշակերտներին անհրաժեշտ գրենական պիտույքների բազմություն>> և այլն: Նույն կերպ մաթեմատիկայում հաճախ են գործածվում <<բնական թվերի բազմություն>>, <<զույգ թվերի բազմություն>>, <<տրված հավասարման արմատների բազմություն>>, <<12 թվի բաժանարարների բազմություն>>, և այլ արտահայտություններ: Բազմության հասկացությանը զուգահեռ կիրառենք նաև <<պատկանում է >> հասկացությունը:

Օրինակ 2-ը պատկանում է բնական թվերի բազմությանը, 7-ը չի ատկանում զույգ թվերի բազմությանը:Այն փաստը, որ a տարրը պատկանում է A բազմությանը, գրվում է այսպես $a\in A$, իսկ a-ն չի պատկանում A բազմությանը գրվում է $a\notin A$: Օրինակ $13\in N,\ -3\notin N$:

Սովորաբար բազմությունները նշանակվում են լատինական այբուբենի մեծատառերով, իսկ տարրերը փոքրատառերով A={a,b, c…}, դատարկ բազմությունը նշանակվում է ∅ սիմվոլով: Բազմությունները սովորաբար տրվում են երկու եղանակով.

ա) Պարզապես թվարկելով նրա տարրերը, օրինակ A={գնդակ, գրիչ, ծաղիկ}

B={1,2,3,4,6,12} , C={2,3,5,7}

Այց եղանակով կարելի է տալ միայն այն բազմությունները, որոնք կազմված են վերջավոր թվով էլեմենտներից:

բ) Նշելով այն հատկությունը, որով օժտված են բազմությանը պատկանող բոլոր տարրերը A={ x; p(x) } (կարդացվում է ՝ A-ն այն էլեմենտների բազմությունն է , որոնք օժտված են p(x) հատկությունով)

Օրինակ1 A-ն զույգ թվերի բազմությունն է՝ A={ a, a=2k, k∈ N}

2. A-ն 8-ից փոքր բնական թվերի բազմությունն է՝ A={a, a<8, a∈ N }

Դիցուք A-ն դպրոցի x դասարանում սովորող աշկերտների բազմությունն է, իսկ B-ն դպրոցի աշակերտների բազմությունը: Պարզ է ,որ այդ դասարանի յուրաքանչյուր աշակերտ համապատասխանում է նաև այդ դպրոցի աշակերտներին: A բազմության յուրաքանչյուր աշակերտ պատկանում է նաև B բազմությանը:

Սահմանում: A բազմությունը հանդիսանում է B բազմության ենթաբազմություն, եթե A բազմության ամեն մի տարր հանդիսանում է տարր նաև B բազմության համար: Գրվում է հետևյալ կերպ՝ $A⊂B$:

Սահմանում ; A և B բազմությունները կոչվում են հավասար՝ A=B, եթե A բազմության յուրաքանչյուր տարր հանդիսանում է տարր B բզզմության համար, իսկ B բազմության յուրաքանչյուր տարր հանդիսանում է տարր A բազմության համար: A=B նշանակում է $A⊂B$ և $B⊂A$

Օրինակ A-ն 2-ի բաժանվող բնական թվերի բազմությունն է, իսկ B-ն ՝6-ի :Եթե թիվը բաժանվում է և 2-ի և 3-ի, ապա այն կբաժանվի նաև 6-ի, ապա A-ի ցանակցած տարր պարկանում է նաև B-ին:Սակայն եթե թիվը բաժանվում է 6-ի, այն բաժանվում է և 2-ի, և 3-ի, ուստի B բազմությանը պատկանող յուրաքանչյուր թիվ պարկանում է նաև A բազմությանը, հետևաբար A=B:

Ավելի տեսանելի դարձնելու համար բազմությունը կարելի է պատկերացնել որևէ փակ կորով և ենթադրել, որ այդ բազմության տարրերը հանդիսանում են գծված փակ կորով սահմանափակված տիրույթին պատկանող կետեր:

ԳՈՐԾՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԵՏ

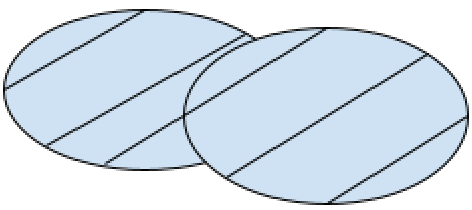
Բազմությունների գումարում(միավորում)

Սահմանում: A և B բազմությունների միավորում կանվանենք այն բազմությունը, որին պատկանում են այն և միայն այն տարրերը, որոնք պատկանում են տրված A և B բազմություններից գոնե մեկին:

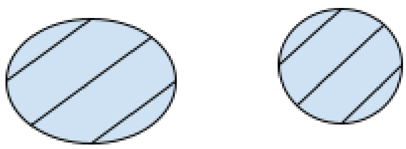
$A\cup B = \{x,\ x\in A$ կամ $x\in B\}$

Օրինակ A- ն մաթեմատիկայի խմբին մասնակցող աշակերտների բազմությունն է, B -ն ՝ ֆիզիկայի : C= A∪ B - կլինի այն բոլոր աշակերտների բազմությունը, որոնք մասնակցում են ֆիզիկայի կամ մաթեմատիկայի խմբակներից գոնե մեկին:

$A\cup B$



$A\cup B$



Հատկություններ՝

1) $A\cup\varnothing = A$ 2) $A\cup A = A$ 3) $A\cup B = B\cup A$
4) $A\subset B,\ A\cup B = B$

5) $A\cup(B\cup C) = (A\cup B)\cup C$

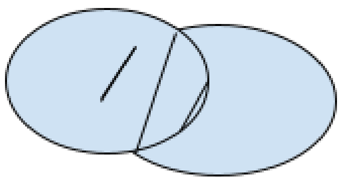
Բազմությունների հատում(արտադրյալ)

Դիտարկենք A={1,7,16,2,101} և B={7,2,9,1,3}:Կազմենք այնպիսի Cբազմություն , որի տարրերը լինեն և A բազմության և B բազմության տարր՝ C={1,7,2}: C-ն կոչվում է Aև B բամությունների հատում:

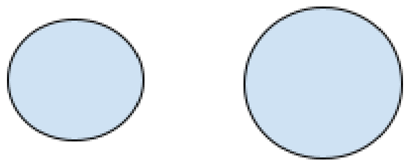
Սահմանում: A և B բազմությունների հատում, որը կազմած է բոլոր այն և միայն այն տարրերից , որոնք պատկանում են և A բազմությանը, և B բազմությանը: $A \cap B = \{ a,\ a \in A$ և $a \in B\}$

Օրինակ՝ A-ն բոլոր ուղղանկյունների բազմությունն է, B-ն ՝ շեղանկյունների: C=A∩B բազմությունը կլինի բոլոր քառակուսիների բամությունը:

$A \cap B$



$A \cap B = \emptyset$



Հատկություններ՝

1) $A \cap \emptyset = \emptyset$ 2)$A \cap A = A$ 3) $A \cap B = B \cap A$
2) 4) $A \subset B$, $A \cap B = A$

5) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Բազմությունների միավորման համար ճիշտ են նաև հետևյալ օրենքները

ա) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

բ) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Բազմությունների տարբերություն

Սահմանում: A և B բազմությունների տարբերությունը A -ի այն բոլոր տարրերն են, որոնք չեն պատկանում B բազմությանը՝ $A \setminus B = \{ x, x \in A, x \notin B\}$

Օրինակ՝ $A=\{1,3,5,8,23\}$, $B=\{5,10,13,23\}$ $A \setminus B = \{1,3,8\}$

Հատկություններ

1) $A/\varnothing=A$ 2) $A/B= A/(A \cap B)$

3) $A/A=\varnothing$ 4) եթե $A/ B=\varnothing$, ապա $A \subset B$

5) եթե $A/ B= A$, ապա $A \cap B=\varnothing$

ՄԻԱՑՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

Հաճախ են հանդիպում այնպիսի խնդիրներ, երբ տրված բազմության տարրերից պետք է այս կամ այն միցություններ (կոմբինացիա) կազմել:

Օրինակ դպրոցի ուսմասվարը տվյալ դասարանի տվյալ օրվա դասացուցակը կարող է կազմել տարբեր եղանակներով: Հերթապահության գրաֆիկ կազմողը տեղամասում տվյալ օրվա հերթապահող մարդկանց ընտրությունը կարող է կատարել տարբեր ձևերով:

Մաթեմատիկայի այն ճյուղը, որտեղ ուսումնասիրվում է թե տրված բազմության տարրեից այս կամ այն պայմաններինբավարարող քանի տարբեր միացություններ կարելի է կազմել, կոչվում է միացությունների տեսություն: $a_1, a_2 \ldots a_n$ տարրերց կազմված հավաքածուն նշանակենք$(a_1, a_2 \ldots a_n)$ n-ը հավաքածուի երկարությունը , որտեղ a1-ը առաջին տեղում է, a2-ը երկրորդ տեղում ......

Բազմության համար տարրերի դասավորությունը նշանակություն չունի ,իսկ հավաքածուի համար այն կարևոր է : Օրինակ՝ $\{a_1, a_2\}=\{a_2,a_1\}$, բայց $(a_1,a_2)\neq(a2, a1)$: $(a_1,a_2,\ldots,a_n)=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ միայն այն դեպքում , երբ $a_1=b_1$, $a_2=b_2$, $a_n=b_n$: Հավաքածույում տարրերը կարող են լինել մի քանի անգամ կրկնվող, իսկ բազմությունում՝ ոչ: Օրինակ <<գրատախտակ>> բառում, որը գրատախտակի հավաքածու է <<ա>> տառը կրկնվում է 3 անգամ, իսկ <<տ>> տառը ՝2 անգամ: Բազմության տարրերի թիվը կարող է լինել անվերջ, իսկ հավաքածուն կազմված է վերջավոր թվով տարրերից: Օրինակ1՝ 2 տարրերից a1 a2 3 երկարության հավաքածուները կլինեն (a_1,a_1,a_2), (a_1,a_2,a_2), (a_2,a_1,a_2), (a_2,a_2,a_1), (a_1,a_2,a_1), (a_2,a_1,a_1), (a_2,a_2,a_2), (a_1,a_1,a_1):

Օրինակ2՝ Գտնել, թե քանի 4 տառանոց <<բառ>> կարելի է կազմել {Ա,Բ,Գ,Դ,Ե,Զ} 6 տառանոց այբուբենից ՝ 6*6*6*6=1296

Կարգավորություններ չկրկնվող տարրերով

Օրինակ 1,3,5,7,9 թվանշաններից կազմենք երկնիշ թվեր, որտեղ թվանշանները չեն կրկնվում: 13,15,17,19,31,35,37,39,51,53,57,59,71,73,75,79,91,93,95,97: կամ 5*4=20

Դիտարկենք տրված n տարրերից $a_1,a_2….a_n$ kական հավաքածուներ որտեղ տարրերը չեն կրկնվում: Այդ դեպքում հավաքածուները իրարից տարբերվում են էլեմենտներով կամ էլեմենտների դասավորությամբ:

Սահմանում: n տարր պարունակող բազմության k տարբեր տարրերից կազմված հավաքածուները կոչվում են կարգավորություն n տարրերց k ական: n տարրերից k ական կարգավորությունների քանակը նշանակում են A_n^k

A_n^k =n(n-1)(n-2).......[n-(k-1)]

A_n^0 =1 $0\leq k\leq n$

Ներկայացնենք աղյուսակի տեսքով՝

1	2	3	4		k
n	n-1	n-2	n-3		n-(k-1)

Տեղափոխություններ **n** տարրերից

n էլեմենտներից kական կազմված կարգավորությունների թվի բանաձևով ընդունենք n=k: Այդ դեպքում A_n={a1,a2...an} բազմության տարրերից կազմված n երկարության յուրաքանչյուր հավաքածու կպարունակի A_n բազմության բոլոր տարրերը, ուստի և մի հավաքածուն մյուսից կտարբերվի միայն էլեմենտների դասավորությամբ: Համան հավաքածուները կոչվում են տեղափոխություններ n տարրերից : Նրանց քանակը նշանակվում է P_n-ով : $P_n=A_n^n$=n(n-1)(n-2).....2*1 կամ P_n=n!

Ընդունված է 0!=1

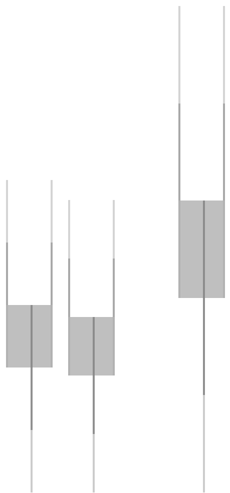
Օրինակ A_3={a1,a2,a3} բազմության տարրերից կազմված տեղափոխությունների թիվը կլինի P_3 =3!=3*2*1=6 Իրոք 3 որկարություն ունեցող և նշված պայմաններին բավարարող հավաքածուները 6 հատ են՝ (a1,a2,a3), (a1,a3,a2), (a2,a1,a3), (a2,a3,a1), (a3,a1,a2), (a3,a2,a1):

Տեղափխություններ կրկնվող տարրերով

Դիցուք տրված են n տարրերը, որտեղ տարբեր տեսակի տարրերի թիվը k է : Եթե առաջին տեսակի տարրերի թիվը նշանակենք n1 , երկրորդ տեսակի տարրերի թիվը n2 և վերջապես k-րդ տարրերի թիվը՝ nk-ով, ապա կարող ենք գրել ՝ n= n1+ n2+ ….+ nk:

Պահանջվում է պարզել , թե քանի հավաքածու կարելի է կազմել n տարրերից : Ակնհայտ է , որ եթե բոլոր n տարրերը լինեն տարբեր, ապա հավաքածուների թիվը կլինի n!, բայց քանի որ որոշ տարրե կրկնվում են, կազմված հավաքածուների թիվը պակաս կլինի: Իրոք, նախ գրելով առաջին տեսակի n1 տարրերը, ապա երկրորդ տեսակի n2 տարրերը և վերջապես k-րդ տեսակի nk տարրերը կստանանք՝

aaa…..aa bb…..b……..zzz….z (1)



n1 n2 nk

Պարզ է , որ մեզ հետաքրքրող հավաքածուները ստացվում են (1)-ի բոլոր հնարավոր տեղափոխությունների միջոցով, սակայն ոչ բոլոր տեղափոխություններն են փոխում (1) հավաքածուն: Քանի որ առաջին, երկրորդ...... k-րդ տեսակի տարրերից կազմված տեղափոխությունները կարելի է կատարել միմյանցից անկախ, ուստի (1)-ը չի փոխվի n1!*n2!*....nk! Տեղափոխությունների ժամանակ: Հետևաբար , եթե նշված n տարրերից կազմված հավաքածուների թիվը նշանակենք P(n1,n2,....nk)-ով , ապա կարող ենք գրել՝ P(n1,n2,....nk)*n1!*n2!*.....*nk!=n!

$$P(n1,n2,....nk)=\frac{n!}{n1!n2!....nk!}$$

Որը հանդիսանում է կրկնվող տարրերից կազմված տեղափոխությունների թվի բանաձևը:

Օրինակ քանի տեղափոխություն կարելի է կատարել <<լոնդոն>> բառի տառերից: Նշված բառում <<լ>> մասնակցում է 1 անգամ, <<ո>> տառը՝ 2 անգամ, <<ն>> տառը 2 անգամ և <<դ>> տառը ՝ 1անգամ:

$$P(1,2,2,1)=\frac{6!}{1!2!2!1!}=\frac{1*2*3*4*5*6}{1*1*2*1*2*1}=180$$

Նույնքան տառից է բաղկացած նաև <<Սեդրակ>> բառը, սակայն քանի որ այտեղ կրկնվող տառեր չկան , ապա կազմված տեղափոխությունների քանակը կլինի՝ $P_6 = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 = 720$

Զուգորդություններ կրկնվող տարրերով

Դիտարկենք հետևյալ խնդիրը՝ գրախանութից պետք է գնել 4 տեսակի գրենական պիտույքներ՝ տետր, մատիտ, քանոն, ռետին, բոլորը միասին 7 հատ։ Քանի եղանակով կարելի է գնել այդ 7 առարկաները։ Հասկանալի է, որ այստեղ գնման հերթականությունը նշանակություն չունի, ուստի գնման ամեն մի եղանակ նշված առարկաների խումբ է, որը պարունակում է 7 առարկա՝ նշված 4 տեսակի առարկաներից։ Գնման յուրաքանչյուր հնարավոր դեպք փիքսենք մեկերով և զրոներով։ Օրինակ , եթե գնել են 3 տետր 2 մատիտ մի քանոն և մի ռետին , ապա գնված յուրաքանչյուր տեսակի առարկաները նշանակենք մեկերով, իսկ մինտեսակի առարկաները մյուսից բաժանելու համար նշանակենք զրո, կստանանք՝ 1110110101

Տարբեր գնումների քանակը հավասար է 10 տարրերից կազմված տեղափոխությունների թվին, երբ 7 տարր միատեսակ են և 3 տարր միատեսակ՝

$$P(7,3)=\frac{10!}{7!3!}=120$$

Այս օրինակում տրված էին 4 տեսակի առարկաներ։ Հաշվենք այն բոլոր խմբերի քանակը, որ կարելի է կազմել այդ 4 տեսակի առարկաներից, երբ պետք է յուրաքանչյուր անգամ մի խմբում մասնակցեր 7 առարկա և մի խումբը մյուսից տարբերվեր գոնե մեկ առարկայով։ Խնդիրը վերաբերվում էր կրկնվող տարրերով զուգուրդություններին։ Ընդհանուր դեպքում դիցուք ունենք n տեսակի առարկաներ և պահանջվում է կազմել խմբեր, այնպես որ յուրաքանչյուր խումբ պարունակի k հատ առարկա, ընդ որում տվյալ առարկան միևնույն խմբում կարող է կրկնվել 1-ից մինչև k անգամ կամ ոչ մի անգամ չպարունակվեր։ Կստանանք k հատ մեկերով և n-1 հատ զրոներով կազմված խմբեր՝

$$P(k, n-1)=\frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}$$

$$C_n^k = \frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}$$

Օրինակ գտնել չորս տարրերց 3ական կազմված կրկնվող տարրերով զուգորդությունների թիվը՝

$$C_4^3 = \frac{(4+3-1!)}{3!3!}=\frac{6!}{3!3!}=20$$

Չկրկնվող տարրերով զուգորդությունների թվի բանաձևը

n տարրերով k ական կազմված զուգորդությունները այն խմբերն են, որոնք պարունակում են տրված n տարրերից k-ն և միմյանցից տարբերվում են գոնե մեկ տարրով։ Օրինակ՝ $A_4 = \{a1, a2, a3, a4\}$ երեքական զուգորդությունները կլինեն ՝ $a_1a_2a_3$, $a_1a_2a_4$, $a_1a_3a_4$, $a_2a_3a_4$,

$C_4^3 = 4$

Եթե n տարրերից k ական կազմված զուգորդությունների յուրաքանչյուր խմբում կատարենք բոլոր հնարավոր տեղափոխությունները , ապա ստացված խմբերը կլինեն n տարրերից k ական կազմված կարգավորությունները։ Պարզ է ,որ այդ դեպքում n տարրերց k ական կազմված զուգորդությունների ամեն մի խմբից կստացվի k! Խմբեր։

Կարող ենք գրել՝ $C_n^k k! = A_n^k$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

K-ի փոխարեն տեղադրելով n-k կստանք

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \qquad C_n^k = C_n^{n-k}$$

Օրինակ ուսանողների 30 մարդկանցից բաղկացած մի խումբ ընտրում է կոնֆերանսի 3 պատգամավորներ։ Քանի եղանակով կարող են կատարել այդ ընտրությունը՝

$$C_{30}^3 = \frac{30!}{3!(30-3)!} = 4060$$

ԻՐԱԴԱՐՁՈՒԹՅԱՆ ՀԱՎԱՆԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

Փորձի կամ հետազոտության արդյունքը(ելքը) անվանում են իրադարձություն: Դիցուք կատարվում է փորձ , որի արդյունքում ինչ քր իրադարձություն կարող է տեղի ունենալ կամ տեղի չունենալ: Այդպիսի արադարձություններին անվանում են պատահական կամ ինարավոր իրադարձություն: 1.Իրադարձությունն անվանում են հավաստի, եթե այդ փորձում այն անպայման տեղի կունենա

2. իրադարձությունն անվանում են անհնար, եթե այդ փորձում այն չի կարող տեղի ունենալ

3. երկու իրադարձություններ անվանում են անհամաըեղելի , եթե այդ փորձում դրանք միաժամանակ հանդես գալ չեն կարող

4. իրադարձություններն անվանում են անհամատեղելի, եթե այդ փորձում դրանցից ցանկացած զույգ անհամատեղելի է:

5.իրադարձությունները անվանում են հավասարահնարավոր, եթե այդ փորձում ոչ մի հիմք չկա դրանցից մեկը մյուսից գերադասելու

Իրադարձությունները նշանակում են լատինական այբուբենի մեծատառերով ՝ A,B, C, D,.....

Օրինակ տուփում կա 30 համարակալած գնդակներ:Պարզել որ իրադարձություններն են անհնար, հավաստի, հակադիր՝

<<հանել ենք համարակալած գնդակ>> (A)

<<հանել ենք զույգ համարով>> (B)

<<հանել ենք կենտ համարով>> (C)

<<հանել ենք առանց համարի>> (D)

A-ն հավաստի է, B և C -ն հակադիր, D-ն անհնար:

A իրադարձության հավանականություն սահմանվում է նպաստավոր ելքերի (m) հարաբերությունը բոլոր հնարավոր ելքեին (n) և նշանակենք P(A) $P(N)=\frac{m}{n}$

Անհնար իրադրության հավանականությունը հավասար է 0: $P(\varnothing)=0$ Հաավաստի պատահույթի հավանականությունը հավասար է 1՝$P(\Omega) = 1$ Օրինակ լոտոյի 1000 տոմսերից շահող է 200-ը :Ինչի է հավասար հավանականությունը, որ պատահական ընտրված տոմսը շահող է : Նպաստավոր ելքեր-200, բոլոր ելքեր -1000

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{200}{1000}=\frac{1}{5}:$$

Իրադարձությունների հավանականությունների հատկություններ

1.A և B իրադարձությունների գումար անվանում են հետևյալ իրադրությունը. տեղի է ունենում A և B իրադարությունններից առնվազ՝ P(A+B)=P(A)+P(B)

2. A և B իրադարձությունների արտադրյալ անվանում են հետևյալ իրադարձությունը. տեղի ուն ունենում A և B իրադարձությունները՝ P(A*B)=P(A)*P(B)

Օրինակ ունենք 100 լոտոյի տոմս : Հայտնի է , որ 5 տոմս շահում է 20000 դրամ (A), 10 տոմս -15000 դրամ (B), 15 տոմս 10000 դրամ (C) , 25 տոմս 2000 դրամ (D), մնացածը ոչինչ չեն շահում: Գտնել հավանականությունը այն բանի, որ գնված տոմսի շահումը 10000 դրամից քիչ է:

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)=\frac{5}{100}+\frac{10}{100}+\frac{15}{100}=0,3$$

Օրինակ՝ Մի տուփում կա 6 սև և 4 սպիտակ գնդակներ, մյուսում՝ 5 սև և 7 սպիտակ:Ամեն տուփից հանում են մեկական գնդակ: Ինչքան է հավանականությունը ,որ երկու գնդակն էլ կլինի սպիտակ:

$$P(A1)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5},\quad P(A2)=\frac{7}{12},\quad P(A1A2)=\frac{2}{5}\frac{7}{12}=\frac{7}{30}$$

Երկու միակ հնարավորություններ անվանում են հակադիր եթե

$P(A)+P(\overline{A})=1$

Օրինակ Խաղոսկր նետելիս A իրադարձություն (զույգ միավեր բացվելը) և B իրադարձությունը (կենտ միավոր) բացվելը հակադիր իրադարձություններ են :

Խնդիր՝ Հավանականությունն այն բանի, որ օրը պայծառ կլինի P=0,85: Գտնել ամպամած լինելու Q հավանականությունը: Քանի որ <արևոտ օրը> և <ամպամած օրը> հակադիր են ուստի ՝

q+p=1, q=1-0.85=0.15:

Խնդիր 1՝ Մի տուփից ,որը պարունակում է 20 էլեկտրական լամպ, որոնցից 4- ը փչացած են,պատահական կերպով վերցնում ենք երկու լամպ :Գտնել վերցրած լամպերի փչացած լինելու հավանականությունը: Այս փորձի ելքերի թիվը հավասար է այն եղանակների թվին, որոնցով կարելի է 20 լամպերից ընտրել 2 լամպ՝ C_{20}^{2}: Այդ ելքերց մեզ հետաքրքրող A պատահույթի համար նպաստավոր կլինի այն ելքերը, որոնց դեպքում ընտրված 2 լամպն էլ փչացած են՝ C_{16}^{2}:

$$P(A)=\frac{C_{16}^{2}}{C_{20}^{2}}=\frac{16*15}{20*19}=\frac{12}{19}$$

Խնդիր2 ՝ Երկու զառեր նետելիս որոշել բցվող կետերի թվի ՝ 4-ին չգերազանցելու հավանականությունը:Առաջին զառի վրա բացվող կետերի թիվը նշանակենք x-ով , երկրորդինը՝ y-ով: Պահանջվում է որոշել $x+y\leq4$ հավանականությունը: Նպաստավոր ելքերը (1,1) x+y=2 (1,2); (2,1) x+y=3 և (1,3);(3,1), (2,2) x+y=4

$$P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

ԵԶՐԱԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆ

Այսպիսով ուսումնասիրելով հավանականությունների տեսությունը , զարգացման պատմությունը, նրա հիմնադրույթները և հնարավորությունները կարելի է փաստել, որ այս տեսության ի հայտ գալը պատահական չէր ,այլ պայմանավորված էր տեխնոլագիական առաջընթացով և կիբերնետիկայի ճարունակական զարգացումով.գոյություն ունեցող ծրագրերը հնարավորություն չէին տալիս ստեղծել այնպիսի կիբերնետիկ մեքենաներ, որոնք մարդու նման կմտածեին ինքնուրույն և հենց հավանականությունների տեսությունը կարող է նպաստել արհեստական մտքի ստեղծմանը: Հավանականությունների տեսության հիմնական խնդիրն է բացահայտել պատահական երևույթների ի հայտ գալու օրինաչափությունները :Հավանականությունների տեսությունը թույլ է տալիս հստակ հաճվարկել պահանջարկի , առաջարկի, գների և այլ տնտեսական ցուցանիճների տատանումները: Հավանականությունների տեսությունը լայն կիրառություն ունի նաև վիճակագրության մեջ :Հավանականությունների տեսությունը արդյունավետ գործիք է հանդիսանում տնտեսագիտության, տեխնիկայի, գիտության տարբեր ճյուղերի միջև թաքնված և ոչ միանճանակ կապերի բացահայտման և վերլուծության համար :

ՕԳՏԱԳՈՐԾՎԱԾ ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՑԱՆԿ

1.Беляев Ю.К. и Носко В.П. «Основные понятия и задачи математической статистики.» - М.: Изд-во МГУ, ЧеРо, 2006.

2.В.Е. Гмурман «Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Высшая школа, 1997.

3.Корн Г.,Корн Т. «Справочник по математике для научных работников и инженеров. - СПБ:Издательство Лань 2003.

4.Пехелецкий И. Д. «Математика учебник для студентов.» - М. Академия, 2003.

5.Суходольский В.Г. «Лекции по высшей математике для гуманитариев.» - СПБ Издательство Санкт - Петербургского государственного университета. 2003;

6.Андронов А.М., Копытов Е.А., Гринглаз Л.Я. Теория вероятностей и математическая статистика. 2004 год. 460 стр.

7.И.И. Баврин. Теория вероятностей математическая статистика. 2005 год. 161 стр.

8.Գ. Գևորգյան , Ա. Սահակյան Հանրահաշիվ և մաթանալիզի տարրեր 10-րդ դասարան 2001թ

9.Ս.Մ.Նիկոլսկի, Մ.Կ. Պոտապով Հանրահաշիվ և մաթանալիզի տարրեր 2011թ.