ՎԵՐԱՊԱՏՐԱՍՏՈՂ ԿԱԶՄԱԿԵՐՊՈՒԹՅՈՒՆ  
 «ՇԻՐԱԿԻ Մ. ՆԱԼԲԱՆԴՅԱՆԻ ԱՆՎԱՆ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ»  
 ՀԻՄՆԱԴՐԱՄ

ՀԵՏԱԶՈՏԱԿԱՆ ԱՇԽԱՏԱՆՔ  
  
Թեմա՝  
  
Դիրիխլեի մաթեմատիկական սկզբունքի ներկայացում,  
մեկնաբանում և վերլուծություն  
  
Կատարող՝  
Ալվարդ Ռաֆիկի Պետրոսյան  
Գյումրու թիվ 45 միջնակարգ դպրոց  
  
Ղեկավար՝   
Ալվարդ Սարուխանյան

ԳՅՈւՄՐԻ-2022

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ (2-3)

ԳԼՈՒԽ Ա

Դիրիխլեի մաթեմատիկական սկզբունքը (4)

§1.1 Դիրիխլեի մաթեմատիկական սկզբունքի ներկայացում, մեկնաբանում և վերլուծություն (4-8)

§1.2 Դիրիխլեի մաթեմատիկական սկզբունքի հնարավոր արդյունավետ կիրառությունների վեր հանում (9-12)

ԳԼՈՒԽ Բ

Գեղեցիկի ձևավորումը խնդիրների ուսուցման գործընթացում (13-15)

Եզրակացություն (16)

Օգտագործված գրականության ցանկ (17)

**Ներածություն**

Ժամանակակից կրթությունը էվոլուցիոն զարգացման արդյունքն է, նրա բարձրագույն աստիճանը։ 21-րդ դարը կրթությունից պահանջում է աճեցնել համակողմանի զարգացած, լայն մտահորիզոն ունեցող, դաստիարակված, բարոյապես զարգացած սերունդներ։ Այդ խնդիրները կարելի է լուծել միայն ու միայն բարեփոխված կրթության և ինքնակրթության՝ կայուն ու խորը գիտելիքներ ձեռք բերելու, տեսությունն ու պրակտիկան զուգակցելու, յուրացված գիտելիքները, կարողություններն ու հմտությունները կյանքում կիրառելու միջոցով։

Հայաստանում ուսուցման գործընթացում կարևորվում է ինտենսիվացումը, կիրառական ուղղվածության ուժեղացումը, տարբերակված ուսուցումը, իմացական գործունեության խթանումը[1]:  
 Կրթության էությունը նրա դինամիկան է ու զարգացումը նպատակներից դեպի արդյունքները, որոնք ոչ միայն կրթության, այլ նաև ուսուցման և դաստիարակության արդյունքներն են, քանզի կրթությունը նաև դաստիարակություն է և հակառակը։

Հայտնի է, որ մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացի դաստիարակչական նպատակներից հիմնականը սովորողների տրամաբանական մտածողության ձևավորումն ու զարգացումն է, որին հասնելու հնարավորությունների հարցում մաթեմատիկան շահեկանորեն տարբերվում է մնացած բոլոր հանրակրթական առարկաներից : ՀՀ-ում անցում կատարելով տասներկուամյա կրթական համակարգի, դպրոցական դասընթացում տարբեր առարկաների ծրագրերում կատարվեցին փոփոխություններ, այն է՝ ավելացան նոր բաժիններ կամ էլ եղած բաժիններում մատուցվող նյութը դարձավ առավել ընդգրկուն: Ավագ դպրոցի նոր դասագրքերի շնորհիվ որոշակիորեն բարելավվեց նաև «Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր» առարկայի ապացուցողական կառույցը, որում արդեն ներդրվա ծ հստակ տրամաբանական ապացուցողական ապարատի շնորհիվ «կշեռքի նժարը» երկրաչափության դասընթացից տեղափոխվեց նաև հանրահաշվի դասընթաց։

Մասնավորապես, 11-րդ դասարանի բնագիտամաթեմատիկական հոսքի հանրահաշվի դպրոցական դասընթացում «Տրամաբանության տարրեր» գլխում ավելացավ նոր պարագրաֆ` «Ապացուցում և հերքում: Ապացուցման և հերքման հիմնական մեթոդները» [2]: Սույն պարագրաֆում, ի թիվս ապացուցման այլ մեթոդների, հակիրճ կերպով խոսվում է նաև Դիրիխլեի մաթեմատիկական սկզբունքի մասին, առաջարկվում են նաև մի քանի տիպային խնդիրներ այս սկզբունքին վերաբերող:

Վստահորեն կարելի է պնդել, որ դասագրքում նյութի առկա ծավալը հնարավորություն չի ընձեռում աշակերտներին հավուր պատշաճի ընկալելու թե Դիրիխլեի սկզբունքի էությունը և թե վերջինիս կիրառելիության սահմանները։

Հարկ է հատուկ ընդգծել, որ անգամ ֆորմալ առումով ծանոթ լինելը Դիրիխլեի մաթեմատիկական սկզբունքի մեթոդին,բավարար չէ, որպեսզի աշակերտը կարողանա վերջիններս ըստ անհրաժեշտության հմտորեն կիրառի ապացուցման և/կամ հերքման խնդիրներ լուծելիս։

Սույն աշխատանքում դիտարկված է Դիրիխլեի մաթեմատիկական սկզբունքի մեթոդը: Հետազոտական աշխատանքի նպատակն է հիմնարար առարկայական սկզբունքների ու մեթոդների, մասնավորապես Դիրիխլեի մաթեմատիկական սկզբունքի անմիջական կիրառմամբ մաթեմատիկական առաջադրանքների վերլուծությունը, լուծման ուղիների ուսումնասիրումն ու ներկայացումը:  
Աշխատանքի նպատակի իրականացման համար դրված են եղել հետևյալ հիմնական խնդիրները.

1.ծանոթանալ և ուսումնասիրել Դիրիխլեի մաթեմատիկական սկզբունքը

2.մշակել վերջինիս կիրառման համար անհրաժեշտ մոտեցումներ և մեթոդական   
 ցուցումներ, մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացի տարբեր բաժիններից   
 ընտրել և մշակել այնպիսի առաջադրանքներ, որոնք արդյունավետ է լուծել   
 Դիրիխլեի մաթեմատիկական սկզբունքի մեթոդի անմիջական կիրառմամբ

3.վերոգրյալ սկզբունքի և մեթոդի կիրառմամբ վերլուծել մաթեմատիկական   
 խնդիրների ոչ տիպային լուծումներ, որոնք կնպաստեն սովորողների մոտ   
 ստեղծագործական մտածողության ձևավորմանը և «գեղեցիկի» ընկալմանը:

Աշխատանքը բաղկացած է ներածությունից, երկու գլուխներից, եզրակացությունից և օգտագործված գրականության ցանկից: Առաջին գլուխը բաղկացած է երկու պարագրաֆներից իսկ երկրորդ գլուխը նվիրված է խնդիրների ուսուցման գործընթացում գեղեցիկի ներկայացմանն ու վեր հանմանը

**Գլուխ Ա**

**Դիրիխլեի մաթեմատիկական սկզբունքը**

**§1.1 Դիրիխլեի մաթեմատիկական սկզբունքի ներկայացում, մեկնաբանում և վերլուծություն**

Սովորաբար մաթեմատիկական գրականությունում գերմանացի հայտի մաթեմատիկոս Պետեր Գուստավ Լեժեն Դիրիխլեի (1805-1859) սկզբունքը տրվում է ճագարների և վանդակների օրինակով [3-5], այն է. եթե ***n*** հատ վանդակներում գտնվում են ***N*** թվով ճագարներ, ընդ որում ***N > n*** , ապա կգտնվի այնպիսի վանդակ, որում կլինեն մեկից ավել ճագարներ:

Այս սկզբունքի ճշմարտացիության մեջ հեշտությամբ կարելի է համոզվել, անմիջականորեն կիրառելով հակասող ենթադրության մեթոդը:

Ավելորդ չէ նշել, որ Դիրիխլեի սկզբունքի համաձայն ոչ թե որոշում ենք այն վանդակը, որում կան մեկից ավել ճագարներ (և ոչ էլ որոշում ենք այն մեկից ավել ճագարներին, որոնք գտնվում են միևնույն վանդակում), այլ միայն հիմնավորում ենք այդպիսի վանդակի գոյությունը։

Տարբեր խնդիրներում կիրառվում է նաև Դիրիխլեի ընդհանրացված սկզբունքը [3-5], համաձայն որի, եթե ***n*** հատ վանդակներում գտնվում են ***N*** թվով ճագարներ, ընդ որում ***N > kn*** , ապա կգտնվի այնպիսի վանդակ, որում կլինեն առնվազն ***k + 1*** ճագարներ:  
Այս պարագայում ևս մենք որոշում ենք այն վանդակը, որտեղ կլինեն առնվազն k+1 ճագարներ, ոչ էլ որոշում ենք այն առնվազն k+1 ճագարներին, որոնք գտնվում են 1 վանդակում, այլ միայն հիմնավորում ենք այդպիսի վանդակի առկայությունը:  
Ըստ էության, Դիրիխլեի սկզբունքի անմիջական կիրառմամբ համեմատաբար պարզ խնդիրներ լուծելիս պետք է առաջնորդվել հետևյալ երկու մոտեցումներից որևէ մեկով՝  
1. կամ, ելնելով տրված խնդրի դրվածքից և ելակետային պայմաններից, ընտրում ենք կոնկրետ «ճագարներ» ու «վանդակներ», ինչպես նաև այն «մեխանիզմը» համաձայն որի ճագարներին» պետք է տեղադրենք «վանդակներում» և Դիրիխլեի սկզբունքի համաձայն ապացուցում ենք այն, ինչ պահանջվում է:  
2. կամ էլ կատարում ենք խնդրի ելակետային պնդմանը հակասող ենթադրություն և Դիրիխլեի սկզբունքի կիրառմամբ, դարձյալ ընտրելով «ճագարներ»,«վանդակներ» և «ճագարներին» «վանդակներում» տեղադրելու «մեխանիզմ», հանգում ենք հակասության, ինչն էլ, բնականաբար, կապացուցի ելակետային պնդման ճշմարտացիությունը։ Որպես ասվածի հիմնավորում, դիտարկենք մի քանի խնդիրներ։  
 Նախապես քննարկենք երկու խնդիրներ, որոնք կլուծենք Դիրիխլեի սկզբունքի անմիջական կիրառման միջոցով:  
Խնդիր 1։ Ապացուցել, որ տրված *ABC* եռանկյան հարթությանը պատկանող և այդ եռանկյան որևէ գագաթով չանցնող ցանկացած *d* ուղիղ չի կարող հատել *ABC* եռանկյան բոլոր երեք կողմերը։ [4]  
Լուծում։ Նկատենք, որ խնդրի պնդումն ապացուցելու համար բավական է ցույց տալ, որ տրված *ABC* եռանկյան որևէ գագաթով չանցնող ցանկացած *d* ուղիղ չի հատում *ABC* եռանկյան կողմերից որևէ մեկը։  
Ինչպես հայտնի է երկրաչափության դպրոցական դասընթացից, հարթությանը պատկանող ցանկացած ուղիղ այդ հարթությունը բաժանում է երկու կիսահարթությունների։ Ըստ այդմ, ABC եռանկյան հարթությանը պատկանող և այդ եռանկյան որևէ գագաթով չանցնող ցանկացած d ուղիղ ABC եռանկյան հարթությունը բաժանում է d եզրով երկու բաց կիսահարթությունների, որոնք կնշանակենք, hամապատասխանաբար,1 և 2:   
Վերջիններս համարենք որպես «վանդակներ», իսկ ABC եռանկյան գագաթները, որոնք, ըստ խնդրի պայմանի, չեն պատկանում d ուղղին, որպես «ճագարներ»։ Պայմանավորվենք յուրաքանչյուր «ճագար»-կետ տեղադրել այն «վանդակում»-կիսահարթությունում, որին վերջինս պատկանում է։ Արդյունքում կունենանք N=3 հատ <<ճագարներ>> (A,B,C կետերը), որոնք պետք է տեղադրենք n=2 հատ <<վանդակներում>> (1 և 2բաց կիսահարթություններում): Ակնհայտ է , որ 3=N>n=2, հետևաբար, Դիրիխլեի սկզբունքի համաձայն, կգտնվի այնպիսի «վանդակ», որում կլինեն առնվազն երկու «Ճագարներ», այսինքն տրված A,B և C կետերից առնվազն 2-ը (դիցուք A և B ) պատկանում են d ուղղով բաժանվող 1 և 2բաց կիսահարթություններից որևէ մեկին (այսիինքն գտնվում են d ուղղի միևնույն կողմում): Կնշանակի d ուղիղը չի հատում ABC եռանկյան AB կողմը, հետևաբար խնդրի պնդումն ապացուցված է:  
Խնդիր 2։ Ապացուցել, որ կամայական 11 հատ բնական թվերի մեջ միշտ կգտնվեն այնպիսի երկուսը, որոնց տարբերությունը բաժանվում է 10 -ի։

Լուծում։ Ինչպես գիտենք, յուրաքանչյուր բնական թիվ բաժանվում է 10 -ի այն և միայն այն դեպքում, երբ վերջանում է 0 թվանշանով։ Ըստ այդմ, որպեսզի երկու բնական թվերի տարբերությունը բաժանվի 10 -ի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այդ թվերը վերջանան միևնույն թվանշանով։

Մյուս կողմից, ցանկացած բնական թվի վերջին թվանշանը կարող է լինել

0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8 կամ 9 ։ Այս հնարավոր 10 տարբերակները դիտարկենք որպես «վանդակներ», իսկ տրված 11 հատ բնական թվերը՝ որպես «Ճագարներ»։ Պայմանավորվենք յուրաքանչյուր «ճագար»-տրված բնական թիվ, տեղադրել այն համարի «վանդակում», որին թվապես հավասար է տրված թվի վերջին թվանշանը։

Արդյունքում կունենանք N=11 «Ճագարներ», որոնք պետք է տեղադրենք n=10 հատ «վանդակներում»։ Ակնհայտ է, որ 11= N>n=10 հետևաբար, Դիրիխլեի սկզբունքի համաձայն, կգտնվի այնպիսի «վանդակ», որում կլինեն առնվազն երկու

«Ճագարներ», այսինքն տրված բնական թվերի մեջ կգտնվեն առնվազն երկուսը, որոնց վերջին թվանշանները համընկնում են և ուրեմն, հենց այդ երկու թվերի տարբերությունն էլ կբաժանվի 10 -ի։ Խնդրի պնդումն ապացուցված է։

Խնդիր 2-ի օրինակով կրկին անգամ փաստենք, որ մենք ոչ թե գտնում ենք այն երկու բնական թվերը, որոնց տարբերությունը բաժանվում է 10 -ի, այլ հիմնավորում ենք տրված կամայական 11 հատ բնական թվերի մեջ այդպիսի երկու բնական թվերի գոյությունը (առկայությունը):  
Այժմ դիտարկենք խնդիրներ, որոնք կլուծենք հակասող ենթադրության և Դիրիխլեի սկզբունքի անմիջական կիրառման միջոցով։  
Խնդիր 3։  
 Ապացուցել,որ 7x7 չափերի քառակուսային աղյուսակի

վանդակներում հնարավոր չէ տեղադրել -1;0 և 1 թվերն այնպես, որ բոլոր տողերի,սյուների և անկյունագծերի վրա դասավորված թվերի գումարները լինեն միմյանցից տարբեր: [5]  
Լուծում։ Կատարենք խնդրում ապացուցման ենթակա պնդմանը հակասող

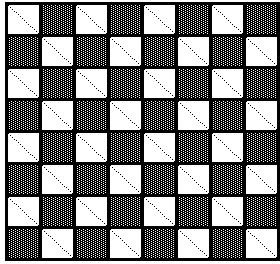
ենթադրություն. Դիցուք 7x7 չափերի քառակուսային աղյուսակի վանդակներում

հնարավոր է տեղադրել -1;0;1 թվերն այնպես, որ բոլոր տողերի, սյուների և

անկյունագծերի վրա դասավորված թվերի գումարները լինեն միմյանցից տարբեր:  
Ունենք 7 տող, 7 սյուն և 2 անկյունագիծ և, ուրեմն, հնարավոր գումարների քանակը 16 է։ Այս հնարավոր գումարները դիտարկենք որպես «Ճագարներ»։ Ըստ խնդրի պայմանի, յուրաքանչյուր տողում, սյունում կամ անկյունագծի վրա պետք է դասավորված լինեն յոթ թվեր, որոնցից յուրաքանչյուրը կարող է լինել -1; 0 կամ 1 հետևաբար որևէ տողում, սյունում կամ անկյունագծի վրա դասավորված թվերի գումարը կարող է լինել -7;-6;-5;-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4;5;6 կամ 7: Ըստ այդմ, յուրաքանչյուր տողի, սյան կամ անկյունագծի վրա դասավորված թվերի գումարի այս հնարավոր տարբերակներն էլ դիտարկենք որպես «վանդակներ»։ Պայմանավորվենք յուրաքանչյուր «ճագար»-գումար տեղադրել թվապես իրեն հավասար «վանդակում»։  
Ունենք n=15 «վանդակներ» և N=16 «Ճագարներ», հետևաբար, Դիրիխլեի

սկզբունքի համաձայն, կգտնվի այնպիսի «վանդակ», որում կլինեն առնվազն երկու

«Ճագարներ», այսինքն առնվազն երկու գումար միմյանց հավասար են։ Կնշանակի մեր ենթադրությունը կեղծ է, հետևաբար խնդրի պնդումն ապացուցված է։  
Նկատենք, որ խնդիր 3-ում նշված պնդումն իրավացի է ուզած kxk չափերի քառակուսային աղյուսակի համար։ Իրոք, համանման դատողությունների արդյունքում կունենանք n=2k+1 «վանդակներ» և N=2k+2 հատ «Ճագարներ», հետևաբար, Դիրիխլեի սկզբունքի համաձայն, կգտնվի այնպիսի «վանդակ», որում կլինեն առնվազն երկու «Ճագարներ», այսինքն-1;0 և 1թվերի ցանկացած դասավորության դեպքում առնվազն երկու գումար (դասավորված տողերի, սյուների կամ անկյունագծերի վրա) միմյանց հավասար են։  
  
Խնդիր 4։ Ապացուցել, որ հնարավոր չէ շախմատային տախտակի սպիտակ վանդակների վրա տեղադրել թվով 8 սպիտակ փղեր այնպես, որ ոչ մի երկուսը

միմյանց չհարվածեն։ [5]  
Լուծում։ Կատարենք խնդրում ապացուցման ենթակա պնդմանը հակասող ենթադրություն. դիցուք հնարավոր է շախմատային տախտակի սպիտակ վանդակների վրա տեղադրել թվով 8 սպիտակ փղեր այնպես, որ ոչ մի երկուսը միմյանց չհարվածեն։  
Շախմատային տախտակի թվով 7 խումբ անկյունագծային սպիտակ վանդակների շարքերը, ինչպես ցույց է տրված նկար 1-ում, դիտարկենք որպես «վանդակներ», իսկ տրված 8 փղերը՝ որպես «Ճագարներ»։ Պայմանավորվենք յուրաքանչյուր «ճագար»-փիղ տեղադրել այն «վանդակ»-խմբում-շարքում, որի անկյունագծային սպիտակ որևէ վանդակում որ գտնվում է այդ փիղը։  
  
  
  
  
  
  
   
 նկ.1

Ունենք n=7 <<վանդակներ>> և N=8 <<Ճագարներ>>, այսինքն առնվազն երկու փիղ գտնվում են նկար 1-ում պատկերված որևէ անկյունագծային սպիտակ վանդակների միևնույն շարքի վրա և, բնականաբար, հարվածում են միմյանց։ Կնշանակի մեր ենթադրությունը կեղծ է, հետևաբար խնդրի պնդումն ապացուցված է։

§1.2 Դիրիխլեի մաթեմատիկական սկզբունքի հնարավոր   
 արդյունավետ կիրառությունների վեր հանում  
  
Աշակերտի համար, ով առաջին անգամ է ծանոթանում Դիրիխլեի մաթեմատիկական սկզբունքին, առաջին հայացքից կարող է խիստ զարմանալի թվալ, թե ինչպե՞ս կարող է այս պարզ ու ակներև պնդումը դառնալ արդյունավետ և հուսալի «գործիք» տարաբնույթ բարդ խնդիրների լուծման ժամանակ։ Ըստ էության, հիմնական դժվարությունը կայանում է նրանում, որ յուրաքանչյուր կոնկրետ խնդրում ի սկզբանե ամենևին պարզ չէ, նրանում կիրառելի՞ է արդյոք Դիրիխլեի սկզբունքը, թե ոչ և բացի այդ, այս սկզբունքի կիրառման ցանկության դեպքում անգամ, խնդրի տեսքից ու դրվածքից ելնելով, այնքան էլ հեշտ չէ կռահել, թե նրանում ինչն է հանդես գալիս «ճագարի» դերում և ինչը «վանդակի» դերում։ Դրա համար ֆորմալ առումով Դիրիխլեի սկզբունքին ծանոթանալուց զատ անհրաժեշտ է տրամաբանական խնդիրների լուծման որոշակի հմտություն, կարողություն և փորձառություն։  
 Ստորև կմատնանշենք կոնկրետ մեթոդական ցուցումներ, ինչպես նաև կձևակերպենք և կապացուցենք Դիրիխլեի սկզբունքից բխող կամ վերջինիս համանման տարբեր ակներև ու պարզ պնդումներ, որոնք հնարավորություն կտան Դիրիխլեի սկզբունքի կամ նրանից բխող առանձին պնդումների կիրառմամբ լուծել տարբեր բարդության տիպային և ոչ տիպային խնդիրներ։  
 Նախապես դիտարկենք մի քանի ոչ տիպային խնդիրներ, որոնց լուծման ընթացքում կօգտվենք միայն Դիրիխլեի սկզբունքից (և/կամ Դիրիխլեի ընդհանրացված սկզբունքից), սակայն մինչ բուն սկզբունքի կիրառումը («ճագարների», «վանդակների» և «ճագարները» «վանդակներում» տեղադրելու սկզբունքի ընտրությունը), ելնելով խնդրի ելակետային տվյալներից, կկատարենք որոշակի տրամաբանական դատողություններ և ձևափոխություններ։  
 Խնդիր 5։ Ապացուցել, որ կամայական 110 հատ բնական թվերի մեջ միշտ կգտնվեն այնպիսի երկուսը, որոնցում կհամընկնեն առնվազն երկու կարգային թվանշաններ։ [6]  
 Լուծում։ Քանի որ միանիշ բնական թվերը ինն են, ուստի կամայական 110 բնական թվերից առնվազն 101 հատը ոչ միանիշ թվեր են։ Այդ 101 ոչ միանիշ բնական

թվերը համարենք որպես «Ճագարներ»։ Նկատենք, որ յուրաքանչյուր ոչ միանիշ թվի վերջին երկու թվանշաններով կազմված թվազույգը կարող է ընդունել 100 հնարավոր տարբեր արժեքներ՝ «00», «01», …, «09», «10», «11», …, «19», , «90», «91», …, «99»: Թվով 100 այս թվազույգերն էլ դիտարկենք որպես «վանդակներ»։ Պայմանավորվենք յուրաքանչյուր «ճագար»-ոչ միանիշ բնական թիվ տեղադրել իր վերջին երկու թվանշաններից կազմված թվազույգին համապատասխանող «վանդակում»։ Այսպիսով, ունենք n=100 <<վանդակներ>>և N=101<<ճագարներ>>: Ակնհայտ է, որ 101=N>n=100, հետևաբար, Դիրիխլեի սկզբունքի համաձայն, կգտնվի այնպիսի «վանդակ», որում կլինեն առնվազն երկու «Ճագարներ», այսինքն երկու ոչ միանիշ բնական թվեր, որոնց վերջին երկու թվանշաններով կազմված թվազույգերը, կամ որ նույնն է, այդ ոչ միանիշ բնական թվերի վերջին երկու կարգային թվանշանները, համընկնում են։ Հետևաբար խնդրի պնդումն ապացուցված է։  
  
 Խնդիր 6։ Անվերջ քառակուսային ցանցի հանգույցներից (գագաթներից) ընտրված են կամայական 5-ը։ Ապացուցել, որ այս գագաթները միմյանց միացնող հատվածներից առնվազն մեկն անցնում է ցանցի մեկ այլ գագաթով։ [7]  
 Լուծում։ Տրված անվերջ քառակուսային ցանցն ընդգրկող հարթության վրա ներմուծենք ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատային համակարգ։ Ցանցի գագաթներից որևէ մեկն ընտրենք որպես կոորդինատների սկզբնակետ։ Կոորդինատային առանցքներն ուղղենք ցանցի գծերի երկայնքով, իսկ միավոր հատվածը վերցնենք հավասար ցանցի քառակուսու կողմին։ Ակնհայտ է, որ այդպիսի կոորդինատային համակարգում ամբողջ թվերի ցանկացած կարգավորված թվազույգին (որպես ինչ-որ կետի կոորդինատ) կհամապատասխանի ցանցի որևէ գագաթ, իսկ ցանցի բոլոր գագաթների կոորդինատները կլինեն ամբողջ թվեր, որոնց զույգության համար հնարավոր են հետևյալ տարբերակները՝ (զույգ, զույգ), (կենտ, կենտ), (զույգ, կենտ) կամ (կենտ, զույգ)։ Այս չորս հնարավոր տարբերակները դիտարկենք որպես «վանդակներ», իսկ ցանցի ընտրված կամայական 5 գագաթները դիտարկենք որպես «Ճագարներ»։ Պայմանավորվենք յուրաքանչյուր «ճագար»-գագաթ տեղադրել այն «վանդակում», որը համընկնում է տվյալ գագաթի կոորդինատների զույգությանը։ Այսպիսով, ունենք n=4 «վանդակներ» և N=5 «Ճագարներ»: Ակնհայտ է,որ 5=N>n=4, հետևաբար, Դիրիխլեի սկզբունքի համաձայն, կգտնվի այնպիսի «վանդակ», որում կլինեն առնվազն երկու «Ճագարներ», այսինքն առնվազն երկու գագաթների համապատասխան կոորդինատներն ունեն միևնույն զույգությունը։ Հեշտ է նկատել, որ այս պարագայում այդ երկու գագաթները միացնող հատվածի միջնակետը ևս կունենա ամբողջ կոորդինատներ (քանի որ հատվածի միջնակետի յուրաքանչյուր կոորդինատ հավասար է հատվածի ծայրակետերի համապատասխան կոորդինատների կիսագումարին և եթե հատվածի ծայրակետերի համապատասխան կոորդինատներն ունեն միևնույն զույգությունը, ապա վերջիններիս կիսագումարը կլինի ամբողջ թիվ) և ուրեմն կհանդիսանա ցանցի գագաթ, հետևաբար խնդրի պնդումն ապացուցված է։  
  
**Դիրիխլեի սկզբունքին համանման պնդումներ պակասորդով։**Նշենք, որ Դիրիխլեի սկզբունքը (կամ Դիրիխլեի ընդհանրացված սկզբունքը) պնդում է հավելորդով, երբ ճագարներն ավելին են, քան վանդակները (կամ երբ ճագարներն ավելին են վանդակների թվով որոշվող ինչ-որ թվից):

Ընդհանրացնելով, համանման պնդումներ կարելի է ձևակերպել նաև պակասորդով, երբ ճագարների քանակը պակաս է վանդակների քանակից կամ վանդակների թվով որոշվող տրված որոշակի թվից։  
Ստորև կձևակերկենք Դիրիխլեի սկզբունքին (կամ սկզբունքի տրամաբանությանը) համանման մի քանի պնդումներ, որոնք հետո անմիջականորեն կկիրառենք տարբեր խնդիրներ լուծելիս։  
 Պնդում 1։ Եթե n հատ վանդակներում գտնվում են N թվով ճագարներ, ընդ որում , N<n , ապա կգտնվի այնպիսի վանդակ, որում ճագարներ չեն լինի:  
 Պնդում 2։ Եթե n հատ վանդակներում գտնվում են N թվով ճագարներ, ընդ  
 որում N<kn, ապա կգտնվի այնպիսի վանդակ, որում կլինեն առավելագույնը k-1  
ճագարներ:  
 Պնդում 3։ Եթե n հատ վանդակներում գտնվում են N թվով ճագարներ, ընդ որում , ապա կգտնվեն այնպիսի երկու վանդակներ, որոնցում կլինեն միևնույն թվով ճագարներ:  
  
Խնդիր 7։ 8x8 չափսերի շախմատային տախտակի վրա տեղադրված են 31 հատ «զինվորներ»։ Ապացուցել, որ կգտնվի նկար 2-ում պատկերված «Г»-աձև տիրույթ, որում «զինվորներ» չեն լինի։ [7]  
   
 նկ.2

Լուծում։ Տեղադրված 31 հատ «զինվորները» դիտարկենք որպես «Ճագարներ»։ Տրված 8x8 չափսերի շախմատային տախտակը բաժանենք 16 հատ 2x2 չափսերի քառակուսային տիրույթների և վերջիններս համարենք որպես «վանդակներ»։  
Այսպիսով, ունենք n=16 «վանդակներ», որոնցում գտնվում են N=31<2\*16 (k=2) «Ճագարներ», հետևաբար, պնդում 2-ի համաձայն, կգտնվի այնպիսի «վանդակ» -2\*2

չափսերի քառակուսային տիրույթ, որում կլինի առավելագույնը k-1=2-1=1

«ճագար» - «զինվոր»։ Եվ, ուրեմն, հենց այդ «վանդակում» էլ գոյություն կունենա նկար 2-ում պատկերված «Г»-աձև տիրույթ, որում «զինվորներ» չեն լինի։ Խնդրի պնդումն ապացուցված է։  
 Խնդիր 8։ 10x10 չափսերի քառակուսային ցանցի վանդակների մի մասը, 50-ից պակաս քանակով, ներկել են։ Ապացուցել, որ քառակուսային ցանցի վրա կգտնվեն երկու հարևան վանդակներ (ընդհանուր կողմ ունեցող), որոնք ներկված չեն։ [4]  
 Լուծում։ Պարզ է, որ 10x10 չափսերի քառակուսային ցանցն ունի 10 սյուներ` յուրաքանչյուրը կազմված 10-ական վանդակներից։ Այս 10 սյուները դիտարկենք որպես «վանդակներ», իսկ ցանցի ներկված (50-ից պակաս քանակով) վանդակները՝«ճագարներ»։  
 Այսպիսով, ունենք n=10 «վանդակներ», որոնցում գտնվում են N≤49<5\*10 (k=5) «Ճագարներ», հետևաբար, պնդում 2-ի համաձայն, կգտնվի այնպիսի «վանդակ»-քառակուսային ցանցի սյուն, որում կլինի առավելագույնը k-1=5-1=4 «ճագար»-ներկված վանդակ։ Փաստորեն հիմնավորեցինք, որ ելակետային 10x10 չափսերի քառակուսային ցանցում գոյություն ունի այնպիսի սյուն (1x10 չափսերի), որի մեջ ներկված են առավելագույնը 4 վանդակ։  
  
  
  
 **Գլուխ Բ  
Գեղեցիկի ձևավորումը խնդիրների ուսուցման գործընթացում** Խնդիրը և նրա լուծումը մարդու նպատակների իրականացման կարևոր փուլերից են: Յուրաքանչյուր մարդ, իր կենսագործունեության ընթացքում առնչվելով կենցաղային, մասնագիտական, ինտելեկտուալ ամենատարբեր խնդիրների, պետք է լուծի դրանք, ըմբռնի դրանց էությունը, պատկերացնի առկա միջոցները և մտքի լարման միջոցով հանգի որոշակի պատասխանի: Նման գործընթացը մաթեմատիկական գործունեության բնորոշ առանձնահատկություններից մեկն է: Ավելին, մաթեմատիկան սովորեցնում է լուծել խնդիրը: Մաթեմատիկական խնդիրը աչքի է ընկնում իր հստակությամբ, իսկ նրա լուծումը՝ հուսալիությամբ: Մաթեմատիկան կոչված է նաև մոդելավորել կյանքում և գիտության այլ բնագավառներում առաջացած զանազան խնդիրներ, այսինքն՝ մաթեմատիկայի լեզվով գրել կիրառական խնդիրը և, բնականաբար, նրա լուծումը ստանալ մաթեմատիկական մեթոդներով: Սա էլ մաթեմատիկայի օգնությունն է այլ բնագավառներում ծագած խնդիրները լուծելիս:  
 Յուրաքանչյուր խնդիր իր պարզության կամ բարդության, լուծման հեշտության կամ դժվարության և այլ հատկանիշների հետ միասին ունի նաև իր գեղեցկությունը: Ըստ այդմ կարող է բնական հարց առաջանալ՝ իսկ ո՞րն է մաթեմատիկական խնդրի գեղեցկությունը, նրա գեղագիտական գրավչությունը: Հայտնի մանկավարժ- գիտնական Մ. Ս. Յակիրը, որպես մաթեմատիկական խնդրի գեղեցկության բնութագրման հայտանիշներ, առաջարկում է անկանխատեսելիությունը, անսպասելիությունը, պարզությունը և հեղափոխական քայլի առկայությունը:  
 Անկանխատեսելիությունը հանդես է գալիս, երբ մարդ ի զորու չէ ի սկզբանե կռահելու խնդրի եզրակացությունը, իսկ անսպասելիությունը՝ երբ խնդրի պայմանները չեն թելադրում նրա եզրակացությունը: Նման դեպքերում երբեմն դժվար է լինում հավատալ խնդրում առաջադրված պահանջի ճշմարտացիությանը:  
 Կարծում ենք թե Դիրիխլեի սկզբունքի և թե ինվարիանտի կիրառման մեթոդի կիրառմամբ լուծվող շատ ու շատ խնդիրներ կարող են հանդիսանալ անսպասելիության և անկանխատեսելիության լավագույն օրինակ։ Ինչպես նախորդ

գլուխներում արդեն համոզվեցինք, դիտարկված այս երկու մեթոդներն իրենց անկանխատեսելի, անսպասելի, օգտակար և արդյունավետ (առանձին դեպքերում նաև անխուսափելի) կիրառությունն ունեն ապացուցման և հերքման զանազան խնդիրներում։ Մեթոդների հիմքում հենց անկանխատեսելիությունն ու անսպասելիությունն է, երբ թվում է, թե ոչինչ չի «հուշում» խնդրի պնդման ճշմարտացիությունը հիմնավորելու համար, մինչդեռ բավական է «հարմար» ձևով ընտրել «ճագարներ» ու «վանդակներ» և/կամ համապատասխան ինվարիանտ և տրամաբանական դատողությունների միջոցով անմիջականորեն հանգում ենք խնդրի պնդման ապացույցին։  
 Խնդրի պարզությունը վերաբերում է ինչպես նրա բովանդակությանը, այնպես էլ շարադրանքին և լուծման ընթքում կիրառվող եղանակին: Հաճախ խնդիրը անհասկանալի է դառնում նրա ձևակերպման լեզվական անհարթությունների պատճառով, իսկ երբեմն էլ երկար-բարակ ձևակերպված պայմանների ետևում կռահելու բան չի մնում: Հասկանալի է, որ ավելորդ է խոսել նման խնդիրների գեղագիտական գրավչության մասին: Որպես «կանոն» ապացուցման և/կամ հերքման խնդիրներն շարադրվում են կոռեկտ, հստակ և լակոնիկ։ Ավելորդ չէ նշել, որ և Դիրիխլեի սկզբունքը և ինվարիանտի կիրառման մեթոդն ինչպես բովանդակությամբ, այնպես էլ շարադրանքով ավելի քան պարզ և հստակ են ձևակերպված։  
 Հեղափոխական քայլի առկայությունը առավելապես վերաբերում է խնդրի

լուծմանը: Թե Դիրիխլեի սկզբունքի և թե ինվարիանտի կիրառման մեթոդի պարագայում, երբ արդեն վերջիններս տեղայնացնում և կիրառում ենք տվյալ խնդրում, այդ պահից սկսած ապահովված է հեղափոխական քայլի առկայությունը, քանզի այդ պահից սկսած ապահովված է թե անկանխատեսելիությունը, թե անսպասելիությունը և թե բարեհաջող ելքի գրավականը։  
 Եվ որովհետև մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացը հագեցված է խնդիրների լուծմամբ, այն նաև մեծապես նպաստում է սովորողի մոտ կյանքի նկատմամբ լավատեսական կողմնորոշման ձևավորմանը: Մաթեմատիկական խնդրի լուծումը պահանջում է համառ ու հետևողական աշխատանք: Այդ պատճառով այն ձևավորում է աշխատասիրություն, ինչը, անշուշտ, պարունակում է նաև գեղագիտական հատկանիշներ:  
Ուսուցումը մաթեմատիկական խնդրի կարևորագույն գործառույթներից մեկն է: Չինական ժողովրդական առածն ասում է՝ «Ես լսում եմ և մոռանում եմ, ես տեսնում եմ և հիշում եմ, ես անում եմ և հասկանում եմ»: Ըստ այդմ մաթեմատիկական խնդիրը նպատակաուղղված է այդ հասկանալու գործընթացի ձևավորմանը:  
 Դիրիխլեի սկզբունքին և ինվարիանտի կիրառման մեթոդին տիրապետելն ու կիրառելն ապահովում են վերոգրյալ առածի «անելու և հասկանալու» գործընթացը։  
 Ակնհայտ է, որ խնդրի լուծման միջոցով ձևավորված գիտելիքները, կարողություններն ու հմտությունները արտահայտում են իմացության այն մակարդակը, երբ սովորողը կարողանում է կիրառել իր ունակությունները, գնահատել դրանք, դրսևորել ինքնավստահություն: Սա ստեղծում է մաթեմատիկայի ուսուցման ընդհանուր գեղագիտական դրական միջավայր, իսկ խնդրի լուծման գործընթացի առանձին տարրերի իրականացման դրական ընթացքն ուղեկցվում է համապատասխան դրական հուզական ապրումներով: Օրինակ, խնդրի պնդման ապացույցի ճշմարտացիության հիմնավորման ստացմանը հաջորդում է ոգևորվածության այնպիսի հուզական վիճակ, որը սովորողին մղում է հետագա գործունեության: Սովորողին հետաքրքրում են նոր խնդիրներ, նա ձգտում է դրանց լուծմանը և լուծման համար անհրաժեշտ գիտելիքների իմացության: Ուսուցման ողջ գործընթացը նրան դուր է գալիս, նա սիրում է սովորել: Իսկ իրեն սիրել ստիպում, պարտադրում է գեղեցիկը:  
 Եվ ուրեմն, խնդրի հաջող լուծումը նպաստում է, գեղեցիկ է դարձնում ուսուցման ողջ գործընթացը, իսկ Դիրիխլեի սկզբունքն ու ինվարիանտի կիրառման մեթոդը այն արդյունավետ «գործիքներն» են, որոնք ապահովում են ապացուցման և/կամ հերքման շատ ու շատ խնդիրների բարեհաջող լուծումը։  
  
  
  
  
  
  
  
 **Եզրակացություն**  
Հետազոտական աշխատանքի կատարման ընթացքն ու քննարկված խնդիրների վերլուծությունը թույլ է տալիս գալ հետևյալ հիմնական եզրահանգումներին.  
  
.թե Դիրիխլեի սկզբունքը և թե այդ սկզբունքից բխող և/կամ վերջինիս համանման (ձևակերպված և ապացուցված) տարբեր պնդումներ իրենց արդյունավետ, օգտակար և ինչու չէ, նաև անխուսափելի կիրառությունն ունեն մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում, իսկ աստիճանական բարդացման սկզբունքով ընտրված խնդիրները ասվածի լավագույն դրսևորումն են,  
  
. Դիրիխլեի սկզբունքը իր շարադրման պարզությամբ, անկանխատեսելի և անսպասելի վերջնարդյունքով գեղեցիկ է դարձնում ուսուցման գործընթացը, ունի գեղագիտական գրավչություն և սովորողների մոտ հետաքրքրության արթնացման մեծ ներուժ։  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
 **Գրականություն**  
  
1.Սարգսյան Ռ., Դասախոսություններ մաթեմատիկայի ուսուցման մեթոդիկայից։ Ընդհանուր մեթոդիկա։ Եր.: Զանգակ, 2012.- 184 էջ։  
2.Գևորգյան Գ.Գ., Սահակյան Ա.Ա., Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր: Ավագ դպրոցի 11-րդ դասարանի դասագիրք (բնագիտա- մաթեմատիկական հոսքի համար). – Եր.: ՏիգրանՄեծ, 2010.-208էջ  
3.Савин А.П., Энциклопедический словарь юного математика.-М.: Педагогика, 1989.-352с.  
4.Мерзляков А.С., Принцип Дирихле. Факультативный курс. Ижевск. Научно- производственный центр «Бизнес старт», 1992.-87с.  
5.Летчиков А.В., Принцип Дирихле. Задачи с указаниями и решениями, Учебное пособие, Ижевск, Изд-во Удм. Ун-та, 1992.-108с.  
6.Медников Л.Э., Шаповалов А.В., Турнир городов: мир математики в задачах. М.: МЦНМО, 2017.-412с.

7.Горбачев Н.В., Сборник олимпиадных задач по математике.-М., МЦНМО, 2004.- 560с.