«ՇԻՐԱԿԻ Մ. ՆԱԼԲԱՆԴՅԱՆԻ ԱՆՎԱՆ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ»

ՀԻՄՆԱԴՐԱՄ

Ավարտական հետազոտական աշխատանք

Թեմա՝ Ներառարկայական և միջառարկայական կապերը ստատիկայի ուսուցման գործընթացում

Կատարող՝ <u>Նարիմա Մարկոսյան</u>

Սիզավետի միջնակարգ դպրոցի ֆիզիկայի ուսուցչուհի

Ղեկավար՝ Վարդան Մանուկյան

Ֆիզմաթ. գիտ. թեկնածու, դոցենտ

Գյումրի-2022

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Ներածություն

Արդի գիտական հետազոտությունների իրականացումը գործնականում անհնար է առանց տարբեր գիտությունների փոխներգործուն միավորման: Այս պատճառով շատ կարևոր է, որ ապագա հետազոտողը արդեն դպրոցական և բուհական ուսումնառության ընթացքից ծանոթանա բնագիտական առարկաների հետազոտական եղանակների ընդհանրություններին և գիտակցի միջառարկայական կապերի կարևորությունը: Միջառարկայական կապերի վեր հանումը դասընթացը դարձնում է առավել ամբողջական, արդյունավետ և նպատակաուղղված: Անցնելով 12-ամյա կրթակարգի դպրոցական դասընթացի՝ տարբեր առարկաների ծրագրերում ավելացան նոր բաժիններ, որն իր հերթին միջառարկայական կապերի նորանոր դրսևորումների հնարավորություն է ստեղծում: Հաշվի առնելով այս ամենը, կարևոր ենք համարում մշակել այնպիսի խնդրատեսակներ և ֆիզիկայի խնդիրների լուծման մոտեցումներ, որոնք ի ցույց կդնեն ինչպես ֆիզիկայի և մաթեմատիկայի երկկողմանի կապերը, այնպես էլ ֆիզիկայի և մյուս բնագիտական առարկաների միջև եղած սերտ կապերը: Ֆիզիկայի դասընթացում ոչ պակաս կարևորություն ունի նաև ներառարկայական կապերի վերհանումն ու զարգացումը՝ որպես ուսուցման գործընթացի արդյունավետության բարձրացման միջոց: Ներառարկայական կապերի որոնման և արտահայտման ***ակտուալությունը*** պայմանավորված է աշակերտների իմացության, հմտությունների և կարողությունների ձևավորման վրա նրա ունեցած մեծ ազդեցությամբ [1]: Սույն թեզում քննարկել ենք մեխանիկայի «Ստատիկա» բաժնի ներառարկայական և միջառարկայական կապերը:

Ստատիկան մեխանիկայի այն բաժինն է, որն ուսումնասիրում է մարմինների հավասարակշռության մեջ գտնվելու պայմանները: Այն կարելի է համարել դինամիկայի մասնավոր դեպք, քանի որ հավասարակշռության պայմաններն արտահայտող հավասարումները հանդիսանում են դինամիկայի հավասարումների մասնավոր դեպքը՝ երբ բացակայում են արագացումները: Այս պատճառով ֆիզիկայի ընդհանուր դասընթացի շրջանակում ստատիկային հիմնականում չի հատկացվում առանձին բաժին: Սակայն կան մի քանի հիմնական պատճառներ ստատիկան մեխանիկայի առանձին բաժին համարելու և դպրոցում այն առանձին ուսումնասիրելու համար: Նախ նկատենք, որ ընդհանուր առմամբ ստատիկան հանդիսանում է պինդ մարմնի դինամիկայի մասնավոր դեպք, մինչդեռ վերջինս դպրոցական դասընթացում չի ուսումնասիրվում: Մյուս կողմից հարկ է նշել, որ պատմականորեն ստատիկան առաջացել է դինամիկայից շուրջ երկու հազարամյակ ավելի վաղ՝ պայմանավորված շինարարական տեխնիկայի պահանջներով: Այդ ընթացքում ստատիկայում մշակվել են բավականին ընդհանուր մոտեցումներ և խնդիրների ուրույն դասեր, ինչը թույլ է տալիս այն համարել մեխանիկայի առանձին բաժին: Պատահական չէ, որ «Կիրառական մեխանիկա», «Տեսական մեխանիկա» և այլ ճարտարագիտական դասընթացներում «Ստատիկա» բաժինը ուսուցանվում է բավականին մեծ ծավալով՝ հիմնականում նախքան «Դինամիկա» բաժինը [**2, 3**]:

Ֆիզիկայի դպրոցական դասընթացի «Ստատիկա» բաժնի որոշ կարևոր հարցերի և խնդիրների քննարկումը միջառարկայական և ներառարկայական կապերի վերհանման և ցուցադրման հրաշալի հնարավորություն է ընձեռում: Բավական է նշել մեխանիկական համակարգի հավասարակշռության և պոտենցիալ էներգիայի մինիմումի կապը, հնարավոր տեղափոխությունների սկզբունքը, կամ օրինակ «ստատիկայի մեթոդներով» ինչպես որոշ հանրահաշվական արտահայտությունների, այնպես էլ հայտնի երկրաչափական թեորեմների «ֆիզիկական» մեկնաբանությունը: Սույն թեզը նվիրված է վերը նշված կապերը լուսաբանող որոշ հարցերի և խնդիրների քննարկմանը:

Աշխատանքի ***նպատակն է*** ստատիկայի դասավանդման գործընթացում ստատիկայի և մաթեմատիկայի, ինչպես նաև ստատիկայի և մեխանիկայի մյուս բաժինների հնարավոր տարբեր ներառարկայական և միջառարկայական կապերի վերհանումն ու ներկայացումը:

Աշխատանքի խնդիրներն են.

1. Ծանոթանալ թեմային առնչվող հիմնական գիտամեթոդական գրականությանը և ուսումնասիրել այն:

2. Վերլուծել և ներկայացնել ստատիկա, աշխատանք, մեխանիկական էներգիա ներառարկայական կապերը:
3. Օգտվելով ստատիկայի զինանոցից լուծել որոշ հանրահաշվական և երկրաչափական խնդիրներ:

Աշխատանք բաղկացած է ներածությունից, երկու գլուխներից, եզրակացությունից և օգտագործված գրականության ցանկից: Առաջին գլուխը բաղկացած է երկու պարագրաֆներից, որոնցում քննարկված են մարմինների հավասարակշռության հարցերի դիտարկումը աշխատանքի և էներգիայի միջոցով և Դիրիխլեի ֆիզիկական սկզբունքը: Երկրորդ գլխի առաջին պարագրաֆում զանգվածների կենտրոնի գաղափարի կիրառմամբ հաշված է հանրահաշվական մի քանի վերջավոր գումարներ, իսկ երկրորդ պարագրաֆում լուծված են մի քանի հետաքրքիր երկրաչափական խնդիրներ: Վերջում բերված են աշխատանքի կատարման արդյունքներից բխող հիմնական եզրահանգումներն ու օգտագործված գրականության ցանկը:

Գլուխ Ա

Ներառարկայական կապերը ստատիկայի ուսուցման գործընթացում:

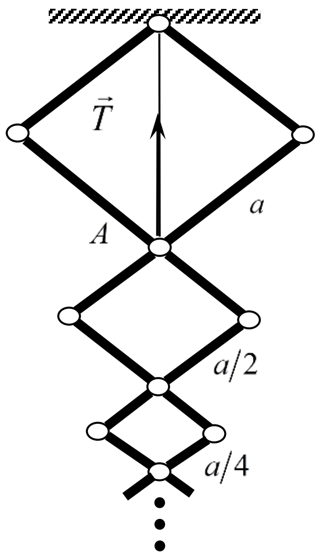
1.1. Հավասարակշռություն, աշխատանք և էներգիա

Երբեմն ստատիկայի խնդիրը կարելի է լուծել բոլորովին չանեռվելով հավասարակշռության ուժային պայմանների վրա և դիտարկելով մարմինների հնարավոր անվերջ փոքր տեղափոխություններ՝ լուծումը տանել ուժերի կատարած աշխատանքների որոշման և էներգիական մոտեցումների ճանապարհով [**4**]: Ստորև կքննարկենք նման մի խնդիր, որը 2015 թ.-ին առաջադրվել է ԳՊՄԻ ֆիզիկայի առարկայական օլիմպիադային:

Խնդիր 1: Գտեք բավականին մեծ քանակով շեղանկյուններից բաղկացած հոդակապային կախիչի վերին շեղանկյան հոդակապերի առանցքները միացնող թելի լարվածության ուժը: Կախիչի զանգվածը m է: Շփման ուժերն անտեսել (նկ. 1):

Լուծում: Դժվար չէ նկատել, որ եթե կախիչի երկարությունը l է, ապա դրա զանգվածի կենտրոնը գտնվում է կախման կետից $l/2$ հեռավորության վրա: Եթե թելը քանդենք և A կետից (նկ. 1) ազդելով նույն T ուժով այդ կետը բարձրացնենք անվեջ փոքր Δh չափով, ապա կկատարենք $\Delta A = T\Delta h$ աշխատանք: Այդ ընթացքում կախիչը կկարճանա $\Delta l = \Delta h + \frac{\Delta h}{2} + \frac{\Delta h}{4} + ... = \Delta h\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ...\right) = \frac{\Delta h}{1 - 1/2} = 2\Delta h$ չափով, իսկ դրա զանգվածի կենտրոնը կբարձրանա $\Delta l/2 = \Delta h$ - ով: Քանի որ կատարված աշխատանքը հավասար է համակարգի պոտենցիալ էներգիայի աճին՝ $T\Delta h = mg\Delta h$, ուստի $T = mg$:

Հարկ ենք համարում նշել, որ քննարկված խնդիրը հայտնի գրքերում դիտարկված նմանօրինակ խնդիրների վարիացիաներից մեկն է: Նշենք նաև, որ վերևում նկարագրված եղանակի կիրառման «սաղմերն» արդեն դրված են միջին դպրոցում՝ երբ լծակի կանոնը մեկնաբանվում է որպես մեխանիկայի «ոսկի կանոնի» հետևանք: Պարզ է, որ նմանօրինակ լուծման մեթոդի անսպասելիությունն ու անկանխատեսելիությունը սովորողների մոտ առաջացնում է զարմանք և պատճառում գեղագիտական հաճույք: Խնդիրների նման լուծումները շատ կարևոր են նաև ներառարկայական կապերի վերհանման տեսակետից:



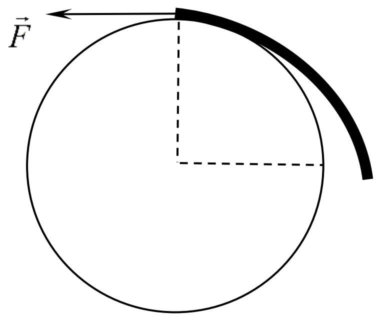
նկ. 1 Բարակ համասեռ ձողերի հոդակապային միացումներով պատրաստված կախիչ:

Ինչպես գիտենք, խնդիրները մեծ նշանակություն և կարևորություն ունեն ցանկացած առարկայի, մասնավորապես ֆիզիկայի դասավանդման պրոցեսում: Ուսուցման գործընթացում լուծվող յուրաքանչյուր խնդիր ունի ուսուցանող բնույթ, այն է՝ լուծվող ցանկացած խնդիր ձևավորում է տարբեր պրոբլեմային իրավիճակներում կողմնորոշվելու կարողություն, հարստացնում է աշակերտների գիտելիքներն ու փորձը, զարգացնում նրանց տրամաբանական մտածողությունը: Առանձին դեպքերում մեկ խնդրի լուծման ընթացքում կիրառվող մոտեցումը կամ լուծման արդյունքը բավական արդյունավետ «գործիք» է հանդիսանում բոլորովին այլ դրվածք ունեցող մեկ այլ խնդրի լուծման համար:

Որպես ասվածի վառ օրինակ, քննարկենք ֆիզիկայի հանրապետական օլիմպիադայում առաջադրված մեկ հետաքրքիր խնդիր [**5**], որի լուծման համար կառաջարկենք երկու եղանակ և, ըստ էության, այս խնդրի լուծման արդյունքը, ինչպես նաև առաջարկվող եղանակներից մեկի ընթացքում կիրառվող մոտեցումը հնարավորություն կտան ընդհանուր դրվածքով քննարկել և լուծել մեկ այլ ֆիզիկական խնդիր:

Այժմ անցնենք այդ խնդրի քննարկմանը:

Խնդիր 2: Հորիզոնական ուղղությամբ ի՞նչ F ուժ պետք է կիրառել պարանը



Նկ. 2

Նկ. 2-ում պատկերված ձևով գլանի վրա հավասարակշռության մեջ պահելու համար: Ընդունել, որ գլանն ամրակցված է, պարանի զանգվածը m է, իսկ երկարությունը հավասար է գլանի շրջագծի երկարության $1/4$ -ին: Շփումն անտեսել:

Լուծում 1: Կիրառելով տարրական ինտեգրում, նախ խնդիրը լուծենք մոմենտների կանոնի օգնությամբ: Մտովի պարանը բաժանենք անվերջ փոքր մասերի: Պարզ է, որ այդ մասերից յուրաքանչյուրի վրա ազդող հակազդեցության ուժերը համուղղված կլինեն համապատասխան շառավիղ-վեկտորներին և, հետևաբար, գլանի համաչափության առանցքի նկատմամբ դրանց մոմենտները հավասար կլինեն զրոյի: Թելի dl երկարությամբ և dm զանգվածով մասի վրա ազդող ծանրության ուժի մոմենտը նույն առանցքի նկատմամբ հավասար կլինի՝

$$dM = dmgR\sin\varphi: \qquad (1)$$

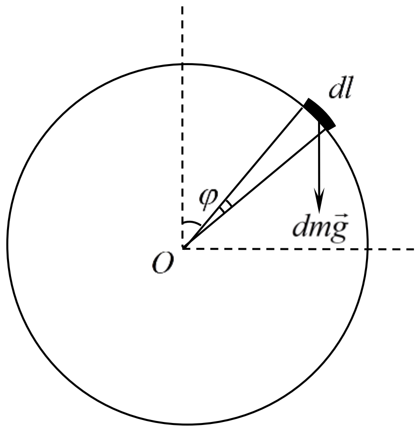
Քանի որ պարանը համասեռ է, ապա պարզ է, որ $\dfrac{dm}{m} = \dfrac{dl}{\pi R/2}$, հետևաբար

$$dm = \frac{2mdl}{\pi R} : \qquad (2)$$

(2)-ը տեղադրելով (1)-ի մեջ կստանանք.

$$dM = \frac{2mdl}{\pi} g \sin\varphi = \frac{2mgR}{\pi} \sin\varphi d\varphi : \qquad (3)$$

(3)-ի անմիջական ինտեգրումով ստանում ենք պարանի վրա ազդող ծանրության



Նկ. 3

ուժի մոմենտը.

$$M = \frac{2mgR}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin\varphi d\varphi = \frac{2mgR}{\pi} : \qquad (4)$$

F ուժի մոմենտը O կետով անցնող առանցքի նկատմամբ հավասար կլինի՝ $M_F = FR$: Համաձայն մոմենտների կանոնի $M_F = M$, որտեղից էլ ուժի համար ստանում ենք՝ $F = 2mg/\pi$:

Քննարկված խնդիրը կարելի է լուծել նաև էներգիական եղանակով, շրջանցելով ինտեգրալի կիրառությունը: Ստորև ներկայացվող այդ մոտեցումը աչքի է ընկնում հակիրճությամբ և նրբագեղությամբ:

Լուծում 2: Եթե F ուժը հավասարակշռության արժեքից մի փոքր մեծ լինի, ապա պարանը Δl - ով տեղափոխվելիս այն կկատարի

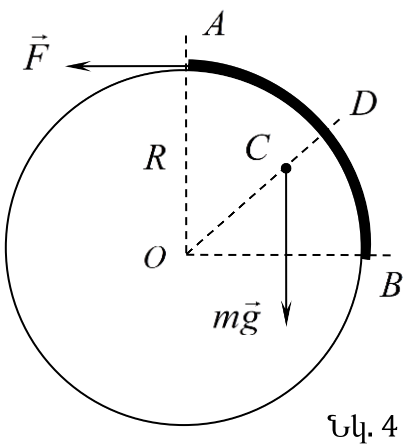
$$\Delta A = F\Delta l \qquad (5)$$

աշխատանք, որի հետևանքով պարանի պոտենցիալ էներգիան կաճի

$$\Delta E_P = \frac{m\Delta l}{l} gR \text{ - ով} \qquad (6)$$

(պարանի Δl երկարությամբ մի կտոր մի ծայրից տեղափոխվում է մյուսը): Համաձայն էներգիայի պահպանման օրենքի, հավասարեցնելով (5) և (6) մեծությունները և հաշվի առնելով, որ $l = \frac{\pi R}{2}$, կստանանք՝ $F = \frac{2mg}{\pi}$:

Նշենք, որ խնդրի տարբեր եղանակներով լուծելու կարողությունների ձևավորումը նպաստում է նյութի առավել խորն ու բազմակողմանի յուրացմանը: Ավելին, օգտվելով խնդրի լուծման արդյունքից կարելի է լուծել նաև նոր խնդիր՝ որոշել քառորդ օղակի զանգվածի կենտրոնը:



Նկ. 4

Այդ նպատակով նորից անդրադառնանք մոմենտների կանոնի կիրառմանը: Այս դեպքում սակայն թելը մտովի չենք բաժանի մասերի և կքննարկենք ամբողջ թելի վրա ազդող ծանրության ուժը: Պարզ է, որ վերջինս կիրառված է թելի C ծանրության կենտրոնում: Սիմետրիայի նկատառումներից ելնելով դժվար չէ կռահել, որ C - ն գտնվում է AOB ուղիղ անկյան OD կիսորդի վրա: Ծանրության C կենտրոնի հեռավորությունը թելի կորության O կենտրոնից նշանակենք x_C - ով: Գրենք մոմենտների հավասարումը O կետով անցնող առանցքի նկատմամբ (նկ. 4).

$$FR = mgx_C \cos 45^0 : \qquad (7)$$

Քանի որ $F = \frac{2mg}{\pi}$, ապա (7) - ից ստանում ենք

$$x_C = R\frac{2\sqrt{2}}{\pi} :$$

Այսպիսով, մի խնդրի լուծման արդյունքը անսպասելիորեն հնարավորություն է տալիս լուծել նոր խնդիր:

Այժմ վերը շարադրված եղանակով որոշենք նաև ցանկացած կենտրոնական անկյունով շրջանագծային աղեղի ծանրության կենտրոնի դիրքը:

Խնդիր 3: Որոշել φ կենտրոնական սուր անկյունով և R շառավղով համասեռ շրջանաձև աղեղի զանգվածի կենտրոնը:

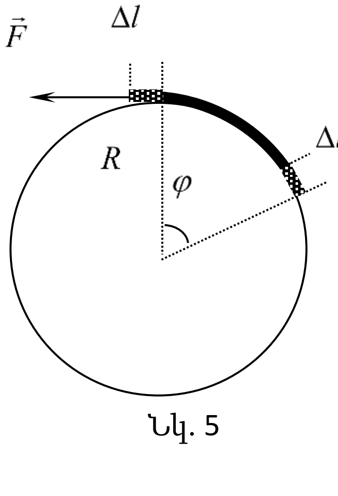
Լուծում: Դիտարկենք աղեղի չափերն ու ձևն ունեցող m զանգվածով բարակ համասեռ պարան, որը Նկ. 5 - ում պատկերված ձևով $\vec{F}$ ուժի ազդեցության շնորհիվ պահվում է R շառավղով անշարժ ողորկ գլանի վրա: Եթե $\vec{F}$ ուժի մոդուլը հավասարակշռության արժեքից մի փոքր մեծ լինի, ապա պարանը Δl - ով տեղափոխվելիս այն կկատարի

$$\Delta A = F\Delta l$$

աշխատանք, որի հետևանքով պարանի պոտենցիալ էներգիան կաճի

$$\Delta E_P = \frac{m\Delta l}{l} gR(1-\cos\varphi)$$

չափով (մտովի պատկերացնենք, որ պարանի Δl երկարությամբ մի կտոր մի ծայրից տեղափոխվում է մյուսը՝ տես Նկ. 5): Պարանը բարձրացնող ուժի արժեքը այն դադարի վիճակում պահելու համար անհրաժեշտ արժեքի ձգտեցնելու



Նկ. 5

հետևանքով պարանի կինետիկ էներգիայի փոփոխությունը ձգտում է զրոյի: Հաշվի առնելով նաև շփման ուժերի բացակայությունը, լրիվ մեխանիկական էներգիայի փոփոխության թեորեմից [6] ստանում ենք, որ $\vec{F}$ ուժի կատարած աշխատանքը հավասար է պարանի պոտենցիալ էներգիայի փոփոխությանը՝

$$A = \Delta E_P,$$

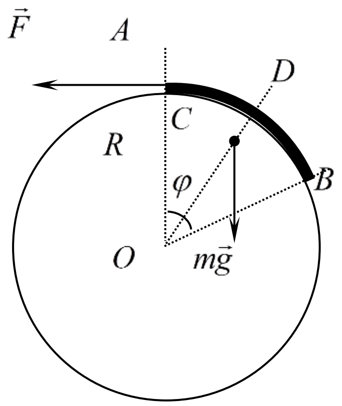
որտեղից էլ ուժի մոդուլի համար ստանում ենք հետևյալ տեսքը.

$$F = \lambda g R(1-\cos\varphi),$$

որտեղ $\lambda = \dfrac{m}{l}$ - ը պարանի գծային խտությունն է:

Նշենք, որ մասնավոր դեպքում քառորդ շրջանագծի տեսք ունեցող պարանը գլանի վրա պահող ուժը այս մոտեցմամբ որոշված է ֆիզիկայի հանրապետական օլիմպիադաների [5] խնդրագրքում:

Այժմ, երբ արդեն որոշված է ուժի մոդուլը, պարանի հավասարակշռության համար կիրառենք մոմենտների կանոնը: Պարանի տարբեր մասերի վրա ազդող հակազդեցության բոլոր ուժերի ազդման գծերը անցնում են գլանի O համաչափության առանցքով և վերջինիս նկատմամբ մոմենտ չեն առաջացնում: Փաստորեն O առանցքի նկատմամբ $\vec{F}$ ուժի մոմենտը համակշռված է $m\vec{g}$



Նկ. 6

ծանրության ուժի մոմենտով: Վերջինս կիրառված է պարանի ծանրության C կենտրոնի վրա, որը գտնվում է պարանի համաչափության առանցքի, այսինքն AOB անկյան OD կիսորդի վրա: Զանգվածի C կենտրոնի հեռավորությունը O - ից նշանակենք x_C - ով: Նկ. 6 - ից պարզ է, որ O առանցքի նկատմամբ $\vec{F}$ ուժի բազուկը R է, իսկ $m\vec{g}$ ծանրության ուժինը՝ $x_C \sin\dfrac{\varphi}{2}$: Հետևաբար, համաձայն մոմենտների կանոնի՝

$$FR = mgx_C \sin\frac{\varphi}{2},$$

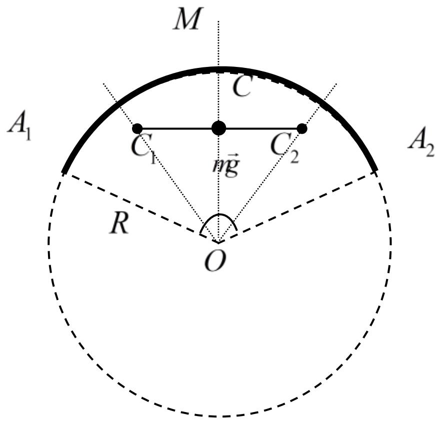
որտեղից, հաշվի առնելով ուժի համար ստացված $F=\lambda gR(1-\cos\varphi)$ տեսքը, պարանի զանգվածի կենտրոնի հեռավորության համար ստանում ենք հետևյալ արտահայտությունը (Նկ. 6)՝

$$x_C=\frac{2R}{\varphi}\sin\frac{\varphi}{2},$$

որտեղ φ անկյունը արտահայտված է ռադիաններով:

Պարզ է, որ զանգվածի կենտրոնի դիրքի որոշման նկարագրված եղանակը իմաստ ունի երբ $\varphi\le\pi/2$: Երբ աղեղի կենտրոնական անկյունը մեծ է $\pi/2$ -ից՝ կարելի է դիտարկել պարանի հավասարակշռության ուրիշ իրավիճակներ և նորից նույն մոտեցմամբ որոշել նրա զանգվածի կենտրոնը: Սակայն նման դեպքերում ավելի հեշտ է աղեղը բաժանել սուր կենտրոնական անկյունով աղեղների և օգտվել դրանց համար վերևում ստացված բանաձևից:

Այսպես, դիցուք $\pi/2<\varphi<\pi$: Աղեղը OM կիսորդով բաժանենք երկու սուր $\varphi/2$ կենտրոնական անկյուններով հավասարամեծ մասերի, որոնց զանգվածների C_1 և C_2 կենտրոնները, համաձայն վերևում ստացվածի, աղեղի կենտրոնից կունենան



Նկ. 7

$x_{C_1}=x_{C_2}=\frac{4R}{\varphi}\sin\frac{\varphi}{4}$ հեռավորություն: Նկար 7 - ից ակնհայտ է, որ

$$x_C=x_{C_1}\cos\frac{\varphi}{4}=\frac{4R}{\varphi}\sin\frac{\varphi}{4}\cos\frac{\varphi}{4}=\frac{2R}{\varphi}\sin\frac{\varphi}{2}:$$

Այսպիսով, ստացանք, որ բութ և փռված անկյունների դեպքում էլ աղեղի զանգվածի կենտրոնի դիրքը որոշվում է նույն բանաձևով:

Պարանի՝ երկու կեսերի բաժանման վերը նկարագրված եղանակով դժվար չէ ցույց տալ, որ ստացված բանաձևով կարելի է հաշվել նաև $\pi \le \varphi \le 2\pi$ անկյունով աղեղի զանգվածի կենտրոնի հեռավորությունը շրջանագծի կենտրոնից:

Սովորաբար նմանօրինակ խնդիրներ քննարկում և լուծում են բարձրագույն մաթեմատիկայի դասընթացի շրջանակում (ինտեգրալի կիրառմամբ): Կարծում ենք, որ դպրոցական դասընթացում ոչ ստանդարտ հնարքների կիրառմամբ նման խնդիրների քննարկումը ունի ուրույն հետաքրքրություն: Որպես հավելում նշենք, որ շրջանային լարի զանգվածի կենտրոնի որոշման հետաքրքիր մեթոդ է առաջարկված նաև [**7**] - ում:

1.2. Դիրիխլեի ֆիզիկական սկզբունքը

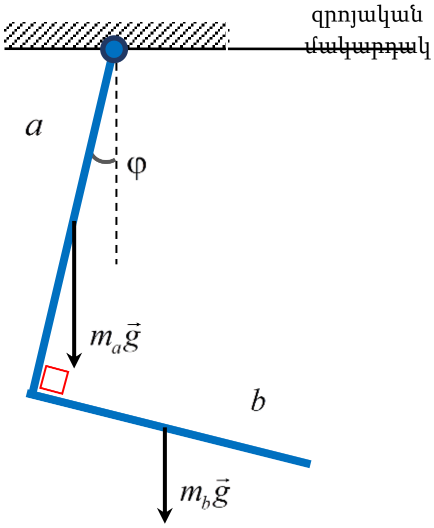
Ֆիզիկայի դասընթացից հայտնի է, որ եթե մեխանիկական համակարգում գործում են միայն կոնսերվատիվ ուժեր, ապա նրա պոտենցիալ էներգիայի մինիմումի վիճակը հանդիսանում է կայուն հավասարակշռության վիճակ: Այլ կերպ ասած, մեխանիկական համակարգը ձգտում է նվազագույն պոտենցիալ էներգիայով վիճակի: Ասվածն արտահայտում է պոտենցիալ էներգիայի մինիմումի, կամ որ նույնն է՝ Դիրիխլեի ֆիզիկական սկզբունքը [**8**]: Պարզվում է, որ վերջինս կարելի է կիրառել ստատիկայի որոշ խնդիրների լուծման համար: Դիրիխլեի սկզբունքի իրավացիության մեջ կարելի է հեշտորեն համոզվել՝ կատարելով հակասող ենթադրություն: Իրոք, ենթադրենք, թե համակարգը, որում գործում են միայն կոնսերվատիվ ուժեր, կարող է պոտենցիալ էներգիայի մինիմումով վիճակից ինքնակամ շարժվել և հետևաբար ձեռք բերել կինետիկ էներգիա: Արդյունքում կմեծանան մեխանիկական համակարգի և՛ կինետիկ և՛ պոտենցիալ էներգիաները, ուրեմն կաճի նաև լրիվ մեխանիկական էներգիան: Վերջինս հնարավոր չէ, քանի որ միայն պոտենցիալային ուժերով փոխազդող մարմինների համակարգի լրիվ մեխանիկական էներգիան պահպանվում է: Ստացված հակասությունը վկայում է այն մասին, որ մեր սկզբնական ենթադրությունը սխալ էր, և համակարգը ինքնակամ չի կարող դուրս գալ պոտենցիալ էներգիայի մինիմումի վիճակից: Այսպիսով, վերջինս կայուն հավասարակշռության վիճակ է:

Այժմ դիտարկենք ֆիզիկայի դպրոցական դասընթացում հանդիպող մի քանի ոչ տիպային խնդիրներ, որոնց լուծման ժամանակ կկիրառենք առաջարկվող Դիրիխլեի ֆիզիկական սկզբունքը:

Ստորև քննարկենք մի խնդիր, որը Օ. Յա. Սավչենկոյի խմբագրած հայտնի խնդրագրքի **2.8.23** խնդրի ընդհանրացումն է [**9**]:

Խնդիր 1: Ծանր ձողը ծռում են 90^0 անկյան տակ և ազատ կախում են մի ծայրից (Նկ.1.1): Ձողի վերին և ստորին մասերի երկարությունները համապատասխանաբար a և b են: Ուղղաձիգի հետ ի՞նչ φ անկյուն կկազմի ձողի վերին մասը:

Լուծում: Եթե ձողի միավոր երկարության զանգվածը (գծային խտությունը) նշանակենք λ - ով, իսկ պոտենցիալ էներգիայի զրոյական մակարդակն ընտրենք կախման կետով անցնող հորիզոնականը (նկ. 1.1), ապա ձողի ծանրության ուժով պայմանավորված պոտենցիալ էներգիան կորոշվի հետևյալ բանաձևով.



Նկ. 1.1

$$W=-\lambda ag\frac{a}{2}\cos\varphi-\lambda bg\left(a\cos\varphi+\frac{b}{2}\sin\varphi\right):$$

Համաձայն պոտենցիալ էներգիայի մինիմումի կամ Դիրիխլեի սկզբունքի՝ ձողի կայուն հավասարակշռության վիճակում նրա պոտենցիալ էներգիան պետք է ընդունի նվազագույն արժեք: Արդյունքում խնդիրը բերվում է φ անկյան այն արժեքի որոշմանը, որի դեպքում

$$f(\varphi)=-a(a+2b)\cos\varphi-b^2\sin\varphi$$

ֆունկցիան ընդունում է նվազագույն արժեք: Օժանդակ անկյան ներմուծմամբ $f(\varphi)$ եռանկյունաչափական ֆունկցիայի նվազագույն արժեքի որոշումը հանրահաշվի դպրոցական դասընթացից հայտնի ստանդարտ գործընթաց է [10], որի արդյունքում որոնելի φ անկյան համար ստացվում է հետևյալ արտահայտությունը՝

$$tg\varphi=\frac{b^2}{a(a+2b)}\ \Rightarrow\ \varphi=arctg\frac{b^2}{a(a+2b)}:$$

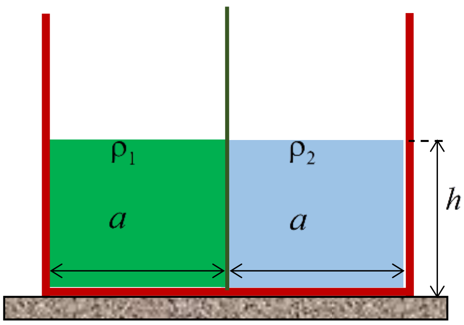
Պատ.՝ $\varphi=arctg\dfrac{b^2}{a(a+2b)}$:

Անշուշտ, այս խնդիրը կարելի է լուծել նաև ստատիկայի ավանդական մեթոդներով: Օրինակ կարելի է, հաշվի առնելով ձողի մասերի վրա ազդող ծանրության ուժերը, գրել մոմենտների կանոնը կախման կետով անցնող և գծագրի հարթությանն ուղղահայաց առանցքի նկատմամբ՝

$$m_a g \frac{a}{2}\sin\varphi = m_b g\left(\frac{b}{2}\cos\varphi - a\sin\varphi\right),$$

որտեղ m_a - ն և m_b - ն համապատասխանաբար ձողի a և b մասերի զանգվածներն են (նկ. 1.1): Այնուհետև, հաշվի առնելով, որ $m_a = a\lambda$; $m_b = b\lambda$, և կատարելով տարրական մաթեմատիկական ձևափոխություններ, որոնելի անկյան համար կարելի է ստանալ նույն արտահայտությունը:

Խնդիր 2: $2a$ երկարությամբ անոթը շարժական միջնորմի օգնությամբ բաժանված է երկու հավասար մասերի: Սկզբում միջնորմն ամրացնում են և անոթի



Նկ. 1.2

երկու մասերը լցնում են h հավասար բարձրությամբ ρ_1 և ρ_2 $(\rho_2 > \rho_1)$ խտություններով հեղուկներ (նկ. 1.2): Ինչ x չափով կտեղափոխվի միջնորմը այն բաց թողնելուց հետո: Շփումն անտեսել: Համարել, որ պրոցեսի ընթացքում հեղուկները անոթից չեն թափվում և միջնորմը չի թեքվում:

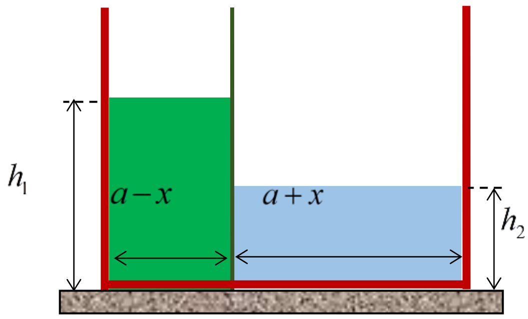
Լուծում: Համաձայն Դիրիխլեի սկզբունքի հավասարակշռության վիճակում միջնորմը կզբաղեցնի այնպիսի դիրք, որ հեղուկների համակարգի պոտենցիալ էներգիան ընդունի նվազագույն արժեք: Զրոյական մակարդակն ընտրելով անոթի հատակով անցնող հորիզոնականը, հեղուկների գումարային պոտենցիալ էներգիան կլինի՝

$$W=\frac{m_1gh_1}{2}+\frac{m_2gh_2}{2},$$

որտեղ m_1 -ը և m_2 -ը, համապատասխանաբար, ρ_1 և ρ_2 խտություններով հեղուկների զանգվածներն են, իսկ h_1 - ն ու h_2 - ը՝ դրանց բարձրությունները (նկ. 1.3): Հաշվի առնելով, որ

$$h_1(a-x)=ha,$$
$$h_2(a+x)=ha,$$

պոտենցիալ էներգիայի համար ստանում ենք.



Նկ.1.3

$$W=\frac{g}{2}h^2a^2l\left(\frac{\rho_1}{a-x}+\frac{\rho_2}{a+x}\right),$$

որտեղ l - ը անոթի լայնությունն է:

Համակարգի պոտենցիալ էներգիան x - ից կախված ֆունկցիա է և նվազագույն արժեքի դեպքում նրա ածանցիալը ըստ x -ի պետք է հավասար լինի զրոյի՝

$$\left(\frac{\rho_1}{a-x}+\frac{\rho_2}{a+x}\right)'=0:$$

Վերը գրվածից միջնորմի որոնելի տեղափոխության համար ստանում ենք. $x=\frac{a\left(\sqrt{\rho_2}-\sqrt{\rho_1}\right)}{\sqrt{\rho_2}+\sqrt{\rho_1}}:$

Պատ.՝ $x=\frac{a\left(\sqrt{\rho_2}-\sqrt{\rho_1}\right)}{\sqrt{\rho_2}+\sqrt{\rho_1}}:$

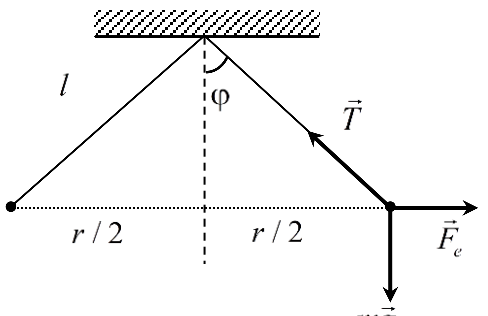
Այս և նմանատիպ խնդիրները սովորաբար լուծում են «ուժային» եղանակով՝ մխոցի հավասարակշռության դիրքում պահանջելով հեղուկների գործադրած ճնշման ուժերի հավասարությունը: Այս դեպքում վերջինս գրվում է հետևյալ պարզ տեսքով՝

$$\frac{\rho_1 g h_1}{2} l h_1 = \frac{\rho_2 g h_2}{2} l h_2 :$$

Այնուհետև, հաշվի առնելով $h_1(a-x)=ha,\ h_2(a+x)=ha,$ պայմանները ու կատարելով ոչ բարդ մաթեմատիկական ձևափոխություններ, կարելի է որոշել մխոցի x տեղաշարժը:

Դասավանդման փորձը վկայում է այն մասին, որ չնայած այս դեպքում լուծման ավանդական եղանակի ռացիոնալությանը, սովորողներից շատերը նման մոտեցման դեպքում կատարում են կոպիտ սխալ և ճնշման ուժերի հավասարության փոխարեն դիտարկում են ճնշումների հավասարությունը:

Խնդիր 3: Երկու միատեսակ գնդիկներ օդում կախված են $l=0.2$ մ երկարությամբ միատեսակ բարակ թելերից, որոնք ամրացված են մեկ կետում: Գնդիկներից յուրաքանչյուրին $q=4\cdot 10^{-6}$ Կլ լիցք հաղորդելուց հետո նրանք իրարից



Նկ. 1.4

հեռացան: Որոշել յուրաքանչյուր գնդիկի զանգվածը, եթե հավասարակշռության վիճակում թելերը կազմում են $2\varphi = 60^0$ անկյուն [11]:

Լուծում: Եթե պոտենցիալ էներգիայի զրոյական մակարդակն ընտրենք թելերի կախման կետով անցնող հորիզոնականը, ապա գնդիկների համակարգի ծանրության ուժով պայմանավորված պոտենցիալ էներգիան կորոշվի $W_g = -2mgl\cos\varphi$ բանաձևով (նկ. 1.4): Լիցքավորված գնդիկների էլեկտրաստատիկ փոխազդեցությամբ պայմանավորված պոտենցիալ էներգիայի համար ունենք

$W_e = kq^2 / r$ բանաձևը, որտեղ r - ը գնդիկների կենտրոնների հեռավորությունն է՝ $r = 2l\sin\varphi$ (նկ. 1.4): Այսպիսով, համակարգի լրիվ պոտենցիալ էներգիայի համար ստանում ենք հետևյալ արտահայտությունը.

$$W = -2mgl\cos\varphi + k\frac{q^2}{r}:$$

Համաձայն Դիրիխլեի ֆիզիկական սկզբունքի, համակարգի կայուն հավասարակշռության վիճակում նրա պոտենցիալ էներգիան պետք է ընդունի նվազագույն արժեք: Վերջինս կբավարարվի, եթե պոտենցիալ էներգիայի ածանցյալն ըստ φ անկյան հավասար լինի զրոյի՝

$$\left(-2mgl\cos\varphi + k\frac{q^2}{r}\right)' = 0,$$

որտեղից էլ ստանում ենք՝

$$\frac{\sin^3\varphi}{\cos\varphi} = \frac{kq^2}{4l^2mg}:$$

Վերջին արտահայտությունից էլ կարելի է որոշել գնդիկների զանգվածը՝

$$m = \frac{kq^2\cos\varphi}{4l^2g\sin^3\varphi} = 0,63\text{կգ}:$$

Պատ.՝ 0,63կգ:

Ինչպես տեսանք, խնդիրը լուծվեց առանց հավասարակշռության վիճակի «ուժային» վերլուծության: Այս խնդիրն իհարկե ավանդաբար լուծում են սովորական «ուժային» մեթոդով: Նման մոտեցման ժամանակ պատկերում են գնդիկներից մեկի վրա ազդող բոլոր ուժերը (նկ. 1.4) և գրում հավասարակշռության պայմանը վեկտորական տեսքով.

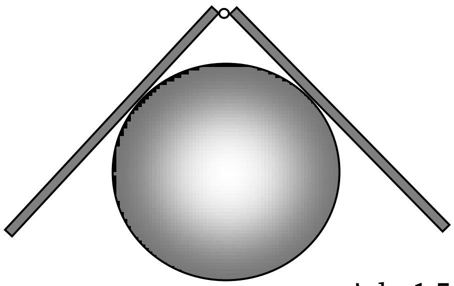
$$\vec{T} + m\vec{g} + \vec{F}_e = 0,$$

որտեղ $\vec{T}$ - ն թելի լարման ուժն է, $m\vec{g}$ - ն՝ ծանրության ուժը, իսկ $\vec{F}_e$ -ն՝ մյուս գնդիկի կողմից դիտարկվող գնդիկի վրա ազդող կուլոնյան վանողության ուժը: Այնուհետև վերջինս պրոյեկտում են հորիզոնական և ուղղաձիգ առանցքների վրա և ստացված

$$T\sin\varphi = k\frac{q^2}{r^2}, \quad T\cos\varphi = mg,$$

հավասարությունների հարաբերման ու մաթեմատիկական տարրական ձևափոխությունների արդյունքում որոշում գնդիկների որոնելի զանգվածը:

Խնդիր 4: R շառավղով հարթ, հորիզոնական գլանի վրա դրված են հոդակապով ամրացված երկու համասեռ ձողեր: Ձողերը գտնվում են



Նկ. 1.5

հավասարակշռության վիճակում, երբ նրանց միջև կազմած անկյունը 2φ է (նկ. 1.5): Որքա՞ն է յուրաքանչյուր ձողի l երկարությունը [9]:

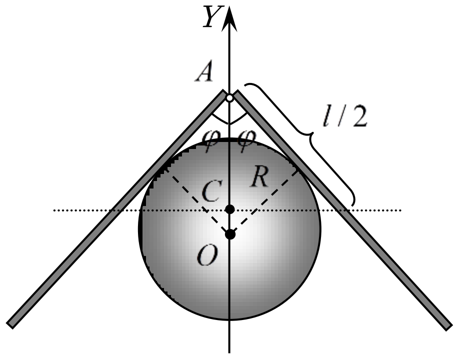
Լուծում: OY կոորդինատային ուղիղն ուղղորդենք ուղղաձիգ դեպի վեր՝ նրա O սկզբնակետն ընտրելով գլանի առանցքի վրա (տես Նկ. 1.6): Այդ դեպքում Նկ. 1.6 - ից պարզ է, որ A հոդակապի y_A կոորդինատը որոշվում է $y_A = \dfrac{R}{\sin\varphi}$ առնչությամբ: Նկ. 1.6 - ից երևում է, որ յուրաքանչյուր ձողի, հետևաբար և ձողերի համակարգի զանգվածների C կենտրոնը A հոդակապից ներքև է գտնվում $\dfrac{l}{2}\cos\varphi$ չափով: Հետևաբար համակարգի զանգվածների կենտրոնի y_C կոորդինատը կլինի

$$y_C = y_A - \frac{l}{2}\cos\varphi = \frac{R}{\sin\varphi} - \frac{l}{2}\cos\varphi:$$

Որպեսզի ձողերի համակարգի պոտենցիալ էներգիան ընդունի նվազագույն արժեք անհրաժեշտ է, որ նվազագույն արժեք ընդունի դրանց զանգվածների կենտրոնի y_C կոորդինատը: y_C - ի նվազագույն լինելուց հետևում է, որ նրա ածանցյալը ըստ φ անկյան հավասար է զրոյի՝

$$y'_C(\varphi) = \left(\frac{R}{\sin\varphi} - \frac{l}{2}\cos\varphi \right)' = 0,$$

որտեղից էլ ստանում ենք՝ $l = \dfrac{2R\cos\varphi}{\sin^3\varphi}$:



Նկ. 1.6

Պատ.՝ $l = \dfrac{2R\cos\varphi}{\sin^3\varphi}$:

Ինչպես տեսանք խնդիրը լուծվեց առանց որևէ ուժի պատկերման և հավասարակշռության պայմանի ուժային վերլուծության: Այս խնդիրը իհարկե կարելի է լուծել նաև սովորական «ստատիկայի» մեթոդներով: Կարծում ենք, որ ներկայացված լուծումը օգտակար է ներառարկայական կապերի վերհանման տեսակետից և կրկին անգամ ցույց է տալիս ֆիզիկայի տարբեր բաժինների ու դրանցում քննարկվող գաղափարների փոխկապակցվածությունը:

Ընդհանրացնող կրկնությունները ֆիզիկայի ուսուցման գործընթացում ունեն առանցքային նշանակություն և կարևորություն: Կրկնության գործընթացում կարևորագույն դեր է հատկացվում միջառարկայական և ներառարկայական կապերին [12]: Օրինակ խնդիր 2. - ը 10 - րդ դասարանում կարելի է լուծել միայն ավանդական ուժային եղանակով, մինչդեռ կրկնությունների ընթացքում, երբ սովորողները մաթեմատիկայի դասընթացից արդեն ծանոթ են ածանցյալի գաղափարին, հնարավոր է դառնում նաև քննարկել վերը ներկայացված լուծումը:

Ամփոփելով կարող ենք արձանագրել, որ Դիրիխլեի ֆիզիկական սկզբունքը հնարավորություն են ընձեռում և ֆիզիկայի դպրոցական դասընթացում դիտարկվող տարբեր տիպային և ոչ տիպային խնդիրների լուծման ժամանակ կիրառել նոր մոտեցում՝ խուսափելով հայտնի «ավանդական» եղանակներից: Ըստ էության, Դիրիխլեի ֆիզիկական սկզբունքն իր ձևակերպման և էության պարզությամբ հանդերձ, բավական արդյունավետ «գործիք» կարող է հանդիսանալ ֆիզիկական տարբեր խնդիրների լուծման ժամանակ։

Գլուխ Բ

Ստատիկայի կիրառությունները դպրոցական մաթեմատիկայում:

2.1. Ստատիկայի կիրառությունը հանրահաշվում

Կան ստատիկայի այնպիսի առաջադրանքներ, երբ պահանջվում է որոշել նյութական կետերի համակարգի զանգվածների կենտրոնի կոորդինատները: Մասնավորապես, երբ բոլոր այդ կետերը գտնվում են միևնույն *OX* ուղիղ վրա համակարգի զանգվածների կենտրոնի դիրքը որոշվում է հետևյալ արտահայտությամբ.

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}:$$

Նշված արտահայտության համարիչն ու հայտարարը տարբեր վերջավոր գումարներ են և կախված նյութական կետերի զանգվածներից և դրանց բաշխման օրինաչափությունից անհրաժեշտություն է առաջանում հաշվել տարբեր հանրահաշվական արտահայտություններ: Նման արտահայտությունների սովորողները հանդիպում են հանրահաշվի դասընթացում: Այս ամենը լավ հնարավորություն է ստեղծում մոտիվացնել հանրահաշվի տվյալ թեմաների դասավանդումը՝ մատնանշելով դրանց հնարավոր կիրառությունները ստատիկայում և ֆիզիկայի մյուս բաժիններում ինչը կարևոր է ֆիզիկա և մաթեմատիկա առարկաների միջառարկայական կապերի դրսևորման առումով: Շատ դեպքերում տպավորությունն այնպիսին է, թե այդ միջառարկայական կապերը խիստ միակողմանի են, այսինքն՝ մաթեմատիկական գիտելիքներն են, որ նպաստում են տարբեր ֆիզիկական հարցերի և խնդիրների քննարկմանն ու լուծմանը: Սակայն նման եզրահանգումը թվացյալ է, քանզի առկա է նաև հակառակ ազդեցությունը, երբ մաթեմատիկական խնդիրների լուծման ժամանակ օգտվում են տարբեր ֆիզիկական օրենքներից և օրինաչափություններից, որն առանձին դեպքում նպաստում է որոշ մաթեմատիկական հասկացությունների ընկալման «նյութականացմանը»: Նշված հակառակ ազդեցության օրինակներից է համակարգի զանգվածների կենտրոնի բանաձևի կիրառմամբ մի քանի վերջավոր հանրահաշվական գումարներ հաշվումը [**13**]:

Ստորև օրինակների տեսքով կներկայացնենք, թե ինչպես կարելի է համակարգի զանգվածների կենտրոնի բանաձևի կիրառմամբ հաշվել մի քանի վերջավոր գումարներ, ընդ որում դիտարկվող վերջավոր գումարների հաշվման համար կնշենք ինչպես հայտնի հանրահաշվական մոտեցումները, այնպես էլ առաջարկվող ֆիզիկական մոտեցումները:

Օրինակ 1: Հաշվել $S_n = 1+2+\cdots+n$ գումարը:

Լուծում: I եղանակ. հանրահաշվի դպրոցական դասընթացից հայտնի է, որ բնական թվերի S_n գումարի հաշվման համար բավական է գումարելիները մեկ անգամ դասավորել աճման կարգով, իսկ մյուս անգամ՝ նվազման կարգով [**14**]: Այսպես՝

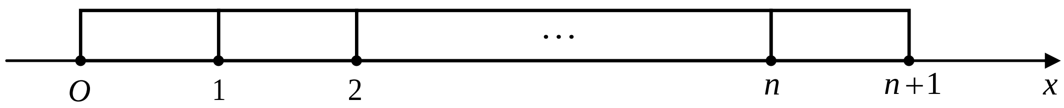
$$S_n = 1+2+\cdots+n;$$

$$S_n = n+(n-1)+\cdots+1:$$

Գումարելով միմյանց, կստանանք՝ $2S_n = n(n+1) \Rightarrow S_n = \frac{n(n+1)}{2}$:

II եղանակ. այս գումարի հաշվման համար նշենք մեկ ֆիզիկական եղանակ:

Վերցնենք $(n+1)$ երկարությամբ համասեռ ձող և այն բաժանենք $(n+1)$ հավասար մասերի, ենթադրելով, որ յուրաքանչյուր մաս ունի միավոր զանգված: Կոորդինատների OX առանցքն ուղղենք ձողի երկայնքով՝ սկզբնակետ ընտրելով ձողի ծայրերից մեկը /տես նկ.1/:



Նկ

Ելնելով խնդրի համաչափությունից, պարզ է, որ ձողի զանգվածի կենտրոնի

x_c կոորդինատը հավասար կլինի՝ $x_c = \dfrac{n+1}{2}$ ։ Մյուս կողմից, ձողը դիտարկելով որպես $(n+1)$ հատ միավոր երկարությամբ և միավոր զանգվածով ձողերի համակարգ, այդ համակարգի զանգվածի կենտրոնի x_c կոորդինատի համար կունենանք[6].

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n+1} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n+1} m_i} = \frac{\frac{1}{2} + \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(2 + \frac{1}{2}\right) + \cdots + \left(n + \frac{1}{2}\right)}{n+1} = \frac{S_n + \frac{n+1}{2}}{n+1} ։$$

Այսպիսով՝ $x_c = \dfrac{n+1}{2} = \dfrac{S_n + \frac{n+1}{2}}{n+1}$, որտեղից կստանանք՝ $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ ։

Օրինակ 2: Հաշվել $A_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ գումարը։

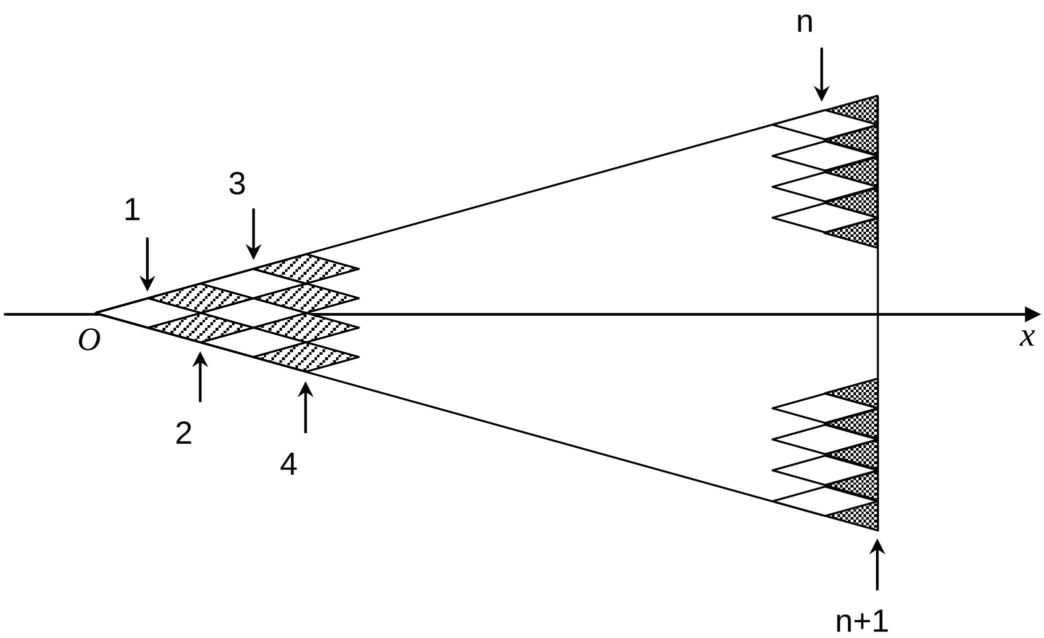
Լուծում: I եղանակ (հանրահաշվական մոտեցում [**15**])։ A_n գումարը հաշվելու համար օգտվենք $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$ նույնությունից։ Այն գրենք $k = 1,2,3...n$ արժեքների համար.

$$\begin{aligned}
&2^3 - 1^3 = 3\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + 1\\
&3^3 - 2^3 = 3\cdot 2^2 + 3\cdot 2 + 1\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(n+1)^3 - n^3 = 3\cdot n^2 + 3\cdot n + 1
\end{aligned}$$

Գումարելով վերը նշված հավասարությունները, ստանում ենք.

$(n+1)^3 - 1 = 3A_n + 3(1 + 2 + \cdots + n) + n$, որտեղից էլ, ի նկատի ունենալով, որ $1 + 2 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, ի վերջո կստանանք՝ $A_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ։

II եղանակ (ֆիզիկական մոտեցում)։ Դիտարկենք հավասարասրուն եռանկյան տեսք ունեցող համասեռ թիթեղ, որը ստացվել է $1 + 2 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ քանակով միմյանց հավասար շեղանկյուններից և $n+1$ հատ միմյանց հավասար «կիսաշեղանկյուններից» կամ այսպես ասած հավասարասրուն «փոքր» եռանկյուններից /տես նկ.2/։ Կոորդինատների OX առանցքն ուղղենք եռանկյան հիմքին տարված բարձրության երկայնքով՝ սկզբնակետ ընտրելով եռանկյան զազաթը: Յուրաքանչյուր շեղանկյան OX -ին զուգահեռ կամ OX -ի վրա գտնվող անկյունագծի երկարությունը նշանակենք $2h$ -ով: Այս դեպքում յուրաքանչյուր հավասարասրուն «փոքր» եռանկյան հիմքին տարված բարձրությունը կլինի h:



Նկ.

Թիթեղի զանգվածի կենտրոնի (որպես եռանկյան միջնագծերի հատման կետ) կոորդինատը կլինի՝ $x_c = \dfrac{2(n+1)h}{3}$: Մյուս կողմից, թիթեղը դիտարկելով որպես թվով $n+1$ հատ համապատասխանաբար 1; 2; $\cdots$; n հատ շեղանկյուններից և $n+1$ հատ եռանկյուններից կազմված առանձին զանգվածների համակարգ, և ի նկատի ունենալով, որ այդ համակարգի առանձին վերցրած ամեն մի մասի համար OX կոորդինատային առանցքը հանդիսանում է համաչափության առանցք, այդ համակարգի զանգվածի կենտրոնի x_c կոորդինատի համար կունենանք՝

$$x_c = \frac{m\cdot h + 2m\cdot 2h + 3m\cdot 3h + ... + nm\cdot nh + \dfrac{(n+1)m}{2}\cdot\left(nh + \dfrac{2}{3}h\right)}{m + 2m + 3m + ... + nm + \dfrac{(n+1)m}{2}} =$$

$$= h\cdot\frac{1^2 + 2^2 + ... + n^2 + \dfrac{n+1}{2}\left(n + \dfrac{2}{3}\right)}{\dfrac{n(n+1)}{2} + \dfrac{n+1}{2}} = h\cdot\frac{A_n + \dfrac{(n+1)(3n+2)}{6}}{\dfrac{(n+1)^2}{2}},$$

որտեղ m -ով նշանակել ենք շեղանկյուններից մեկի զանգվածը:

Այսպիսով՝ $x_c = \dfrac{2(n+1)}{3}h = \dfrac{A_n + \dfrac{(n+1)(3n+2)}{6}}{\dfrac{(n+1)^2}{2}} h$,

որտեղից կստանանք՝ $A_n = \dfrac{n+1}{3}\left(n^2 + 2n + 1 - \dfrac{3n+2}{2}\right) = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$:

Օրինակ 3: Հաշվել $B_n = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$ գումարը:

Լուծում: I եղանակ (հանրահաշվական մոտեցում [**15**]):

Օգտվելով

$$(n+1)^4 - n^4 = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$$

նույնությունից, կարող ենք գրել՝

$$\sum_{i=1}^{n}\left[(i+1)^4 - i^4\right] = \sum_{i=1}^{n}\left[4i^3 + 6i^2 + 4i + 1\right],$$

որտեղից կունենանք՝

$$(n+1)^4 - 1 = 4\left(1^3 + 2^3 + \cdots + n^3\right) + 6\left(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2\right) + 4\left(1 + 2 + \cdots + n\right) + n :$$

Ի նկատի ունենալով, որ

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ և } 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

ի վերջո B_n գումարի համար կստանանք՝

$$B_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = (S_n)^2 :$$

II եղանակ (ֆիզիկական մոտեցում): Վերցնենք միավոր գծային խտությամբ համասեռ ձող և այն բաժանենք համապատասխանաբար $1; 2; \ldots; n$ երկարությամբ մասերի: Կոորդինատների OX առանցքն ուղղենք ձողի երկայնքով, սկզբնակետ ընտրելով ձողի ծայրերից մեկը /տես նկ.3/:

Նկ.

Քննարկվող ձողն ունի $1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$ երկարություն, հետևաբար պարզ է, որ ձողի զանգվածի կենտրոնի x_c կոորդինատը կլինի՝ $x_c=\frac{n(n+1)}{4}$ ։ Մյուս կողմից, ձողը դիտարկելով որպես n հատ ձողերի համակարգ, այդ համակարգի զանգվածի կենտրոնի x_c կոորդինատի համար կունենանք՝

$$x_c=\frac{1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\left(1+\frac{2}{2}\right)+3\cdot\left(1+2+\frac{3}{2}\right)+\cdots+n\left(1+2+\cdots+(n-1)+\frac{n}{2}\right)}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{\frac{1^3}{2}+\frac{2^3}{2}+\cdots+\frac{n^3}{2}}{\frac{n(n+1)}{2}}:$$

Այսպիսով՝ $x_c=\frac{n(n+1)}{4}=\frac{B_n}{n(n+1)}$, որտեղից կստանանք՝

$$B_n=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2=(S_n)^2:$$

Հաղորդակից անոթներ:

Ինչպես հայտնի է ֆիզիկայի դպրոցական դասընթացից, որոշակի ծավալի միևնույն հեղուկով լցված հաղորդակից անոթում հեղուկի մակարդակները հավասար են՝ անկախ անոթների ձևից (ի նկատի ունենալով, որ մազական երևույթները արհամարհելի են)։ Այս ակնհայտ փաստը կիրառենք որոշ հանրահաշվական հարցադրումների պատասխանելիս։

Օրինակ 1: Քանի՞ իրական արմատներ ունի $x^3+x-2=0$ հավասարումը [**16**]։

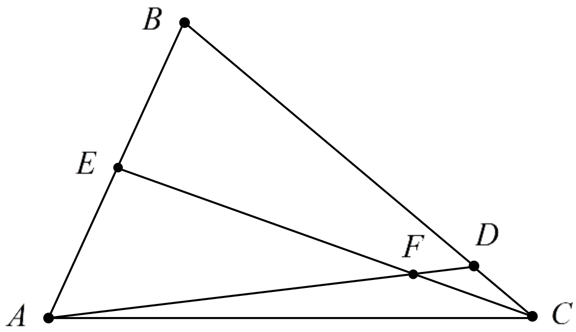
Լուծում: Դիտարկենք հիմքի միավոր մակերեսով գլանական և $\alpha=2arctg\frac{\sqrt{3\pi}}{\pi}$ գագաթի անկյունով կոնական անոթներից բաղկացած հաղորդակից անոթը։ Պարզ է, որ այս անոթի մեջ ցանկացած ծավալի և, մասնավորաբար, 2 ծավալային միավոր հեղուկ լցնելիս հաղորդակից անոթում կհաստատվի հեղուկի մի ինչ որ x մակարդակ (որը միշտ գոյություն ունի և միակն է)։ Ըստ այդմ, հաշվելով յուրաքանչյուր անոթում հեղուկի ծավալը, հեղուկի ընդհանուր ծավալի համար կունենանք՝ $x+x^3=2$, հետևաբար կարող ենք պնդել, որ ելակետային $x^3+x-2=0$ հավասարումն ունի ճիշտ մեկ իրական դրական արմատ, որը համաձայն վերոգրյալի, թվապես հավասար է հաղորդակից անոթում հաստատված հեղուկի սյան բարձրությանը: Մյուս կողմից, քանի որ $f(x)=x^3+x-2$ ֆունկցիան իր ողջ որոշման տիրույթում մոնոտոն աճող է $\left(f'(x)=3x^2+1>0\right)$, կնշանակի $f(x)=0$ հավասարումը չի կարող ունենալ մեկից ավել իրական արմատներ, հետևաբար այն ունի ճիշտ մեկ իրական արմատ:

Պատ.՝ տրված հավասարումն ունի ճիշտ մեկ իրական արմատ:

Հավելենք, որ նմանատիպ մոտեցմամբ կարելի է ապացուցել նաև, որ $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x-a_0=0$ տեսքի յուրաքանչյուր հավասարում, որում $n\in N$ և $a_0;a_1;\cdots;a_n\in R^+$, իրական թվերի բազմությունում միշտ ունի ճիշտ մեկ իրական դրական արմատ: Ապացուցման համար բավական է a_0 ծավալով հեղուկը դատարկել n հատ համապատասխան կոնտուրներով անոթներից կազմված հաղորդակից անոթի մեջ, որի յուրաքանչյուր i-րդ անոթի կոնտուր ընտրված է այնպես $(i=1;2;\ldots;n)$, որ նրանում x սյունով հեղուկի առկայության դեպքում վերջինիս ծավալը a_ix^i է:

2.2. Ստատիկայի կիրառությունը երկրաչափությունում

Անտիկ հույն մտածող մաթեմատիկոս և ֆիզիկոս Արքիմեդը հայտնաբերել է նյութական կետերի զանգվածների կենտրոնի կիրառմամբ երկրաչափական թեորեմների ապացուցման յուրահատուկ մի մեթոդ [17], որը հետագայում



նկ. 5 CE միջնագիծը F կետով տրոհում է AD հատվածը երկու մասի:

զարգացվել է մի շարք հայտնի մաթեմատիկոսների կողմից: Մեթոդի էությունն ու դրա տարբեր հետաքրքիր կիրառությունները ներկայացված են [17] գրքում: Նշենք միայն, որ բազմանկյունների գագաթներում կամ այլ կետերում մտովի տեղադրելով տարբեր զանգվածներով նյութական կետեր, այդ մեթոդի շրջանակում հնարավոր է լինում պարզել մի քանի ուղիղների միևնույն կետում հատվելու, կամ մի քանի կետերի միևնույն ուղղին կամ հարթությանը պատկանելու հարցերը: Մասնավորապես այս ճանապարհով Արքիմեդին հաջողվել է ապացուցել եռանկյունների միջնագծերի միևնույն կետում հատվելու մասին թեորեմը: Ստորև կներկայացնենք մի խնդիր, որը բնական ու պարզ կերպով լուծվում է նշված «զանգվածների մեթոդով»:

Խնդիր: ABC եռանկյան BC կողմի վրա վերցված է D կետ այնպես, որ $BD:DC=5$: Որոշել թե ի՞նչ հարաբերությամբ է եռանկյան CE միջնագիծը տրոհում AD հատվածը:

Լուծում: D կետը BC - ն տրոհում է 5:1 հարաբերությամբ: Հետևաբար եթե B և C կետերում տեղադրենք $m_B=m$ և $m_C=5m$ զանգվածներով նյութական կետեր, ապա D - ն կլինի դրանց զանգվածների կենտրոնը (նկ. 5): Նույն կերպ, եթե A

կետում տեղադրենք $m_A = m$ զանգվածով նյութական կետ, ապա E միջնակետը կլինի A և B կետերում տեղադրված նյութական կետերի զանգվածների կենտրոնը: Դիտարկվող m_A, m_B և m_C նյութական կետերի համակարգի զանգվածների կենտրոնը կլինի AD և CE հատվածների հատման F կետը: Այժմ m_B և m_C նյութական կետերի համակարգը փոխարինենք դրանց զանգվածների D կենտրոնում տեղադրված $m_D = m_B + m_C = 6m$ զանգվածով նյութական կետով: Քանի որ D - ն m_D և m_A - ի զանգվածների կենտրոնն է՝

$$\frac{AF}{AD} = \frac{m_D}{m_A} = 6:$$

Դիտարկված խնդրի վերը ներկայացված լուծումը արտահայտում է ստատիկայի և երկրաչափության բազմաբովանդակ կապերի դրսևորումներից միայն մեկը: Ստատիկայի գաղափարների կիրառմամբ հնարավոր է ապացուցել բազմաթիվ կարևոր երկրաչափական թեորեմներ և լուծել երկրաչափական խնդիրներ: Օրինակ, օգտվելով գազով լցված ուղիղ, եռանկյունաձև հիմքով պրիզմայաձև անոթի հավասարակշռության պայմաններից կարելի է ապացուցել Պյութագորասի թեորեմը և կոսինուսների թեորեմը [**18**]: Նմանօրինակ մոտեցմամբ հեշտությամբ կարելի է ապացուցել Մինկովսկու թեորեմը բազմանիստների համար, համաձայն որի եթե $\vec{n}_1, \vec{n}_2, ..., \vec{n}_k$ - ն ուռուցիկ բազմանիստի նիստերի արտաքին միավոր նորմալներն են, իսկ $S_1, S_2, ..., S_k$ - ն՝ համապատասխանաբար այդ նիստերի մակերեսները, ապա $S_1\vec{n}_1 + S_2\vec{n}_2 + ... + S_k\vec{n}_k = 0$:

Չևայի հայտնի թեորեմը նույնպես կարելի է ապացուցել օգտվելով ստատիկայի զինանոցից: Հետաքրքիր է, որ իտալացի ճարտարագետ Ջովաննի Չևան եռանկյունների վերաբերյալ իր դասական թեորեմը ապացուցել է զանգվածների կենտրոնի գաղափարի կիրառմամբ: Ինչ խոսք, որ Չևայի նշանավոր թեորեմը առավելապես «պատկանում է» երկրաչափությանն ու ապացուցվում է նաև մաքուր երկրաչափական մեթոդներով և լայնորեն կիրառվում է երկրաչափական տարբեր խնդիրների լուծման ժամանակ:

Զանգվածների կենտրոն:

Ինչպես հայտնի է ֆիզիկայի դպրոցական դասընթացից, վերջավոր քանակի նյութական կետերի համախումբ ունի զանգվածներիի կենտրոն և այն միակն է, ընդ որում այդ զանգվածների կենտրոնը չի փոխվի, եթե տրված նյութական կետերի մի քանիսից կազմված առանձին համախումբը փոխարինենք իրենց զանգվածների կենտրոնով [6]: Պարզ է, որ երկուսից ավել նյութական կետերի դեպքում մենք կարող ենք համակարգի զանգվածների կենտրոնը որոշել տարբեր կերպ՝ նախապես տարբեր ձևերով խմբավորելով տրված նյութական կետերը: Այս ակնառու փաստը հնարավորություն է տալիս նյութական կետերի զանգվածների կենտրոնի որոշման միջոցով հանգել տարբեր երկրաչափական հարցապնդումների հիմնավորմանը:

Օրինակ 2: Ապացուցել, որ յուրաքանչյուր քառանկյան մեջ հանդիպակաց կողմերի միջնակետերը միացնող հատվածները և անկյունագծերի միջնակետերը միացնող հատվածը հատվում են միևնույն կետում և այդ կետում նրանցից յուրաքաչյուրը կիսվում է [19]:

Լուծում: Դիցուք ունենք $ABCD$ քառանկյունը: Այս քառանկյան գագաթներում տեղադրենք միավոր զանգվածներ և ստացված չորս նյութական կետերի զանգվածների կենտրոնը նշանակենք O-ով (պարզ է, որ այն գոյություն ունի և միակն է): Այժմ որոշենք այս համակարգի զանգվածի կենտրոնը, վերը նշված չորս նյութական կետերը տարբեր կերպ երկուական խմբավորելով: Այսպես, դիտարկելով $A;B$ և $C;D$ զույգերը, A և B կետերում տեղադրված միավոր զանգվածները կարող ենք փոխարինել AB հատվածի միջնակետում տեղադրված 2 միավոր զանգվածով, իսկ C և D կետերում տեղադրված միավոր զանգվածները կարող ենք փոխարինել CD հատվածի միջնակետում տեղադրված 2 միավոր զանգվածով, ինչի արդյունքում կարող ենք պնդել, որ ելակետային չորս միավոր զանգվածների O կենտրոնը AB և CD հատվածների միջնակետերը միացնող հատվածի միջնակետն է: Նույն կերպ, դիտարկելով $A;D$ և $B;C$ զույգերը, համանման դատողությունների արդյունքում կարող ենք պնդել, որ O կենտրոնը AD և BC հատվածների միջնակետերը միացնող հատվածի միջնակետն է։ Եվ, վերջապես, դիտարկելով $A;C$ և $B;D$ զույգերը, ըստ վերոգրյալի կարող ենք պնդել, որ O կենտրոնը AC և BD հատվածների միջնակետերը միացնող հատվածի միջնակետն է։ Ըստ էության O ծանրության կենտրոնի գոյության և միակության փաստով հիմնավորվեց, որ ցանկացած $ABCD$ քառանկյան մեջ հանդիպակաց կողմերի միջնակետերը միացնող հատվածները և անկյունագծերի միջնակետերը միացնող հատվածը հատվում են մի կետում և այդ կետում նրանցից յուրաքանչյուրը կիսվում է։ Պնդումն ապացուցված է։

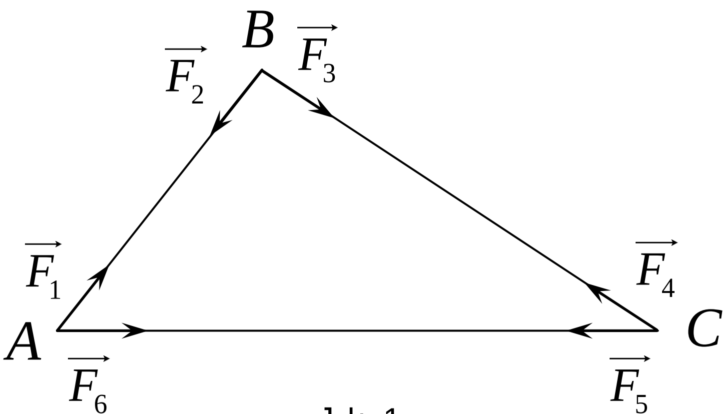
Հավելենք, որ նմանատիպ մոտեցմամբ հեշտությամբ կարելի է ապացուցել, որ, օրինակ, յուրաքանչյուր եռանկյան միջնագծերը հատվում են մեկ կետում և այդ կետով կիսվում 2:1 հարաբերությամբ մասերի՝ հաշված գագաթից, ինչի համար բավական է կամայական եռանկյան գագաթներում տեղադրել միավոր զանգվածներ և հաշվել ստացված համակարգի զանգվածի կենտրոնը՝ նախապես միավոր զանգվածներից որևէ երկուսը խմբավորելով։

<u>Մարմինների հավասարակշռություններ։</u>

Ինչպես հայտնի է ֆիզիկայի դպրոցական դասընթացից, եթե որևէ մարմնի վրա ազդում են որոշակի ուժեր, ապա տվյալ մարմինը կգտնվի հավասարակշռության մեջ այն և միայն այն դեպքում, երբ այդ ուժերի վեկտորական գումարը, ինչպես նաև կամայական կետով անցնող առանցքի նկատմամբ այդ նույն ուժերի մոմենտների հանրահաշվական գումարը հավասար է զրոյի։ Հետևաբար կարող ենք պնդել, որ եթե մարմինն իր վրա ազդող երեք համահարթ ուժերի ազդեցության տակ գտնվում է հավասարակշռության վիճակում, ապա այդ ուժերի ազդման գծերը հատվում են նույն կետում (քանզի հակառակ պարագայում ուժերից որևէ երկուսի համազորով և երրորդ ուժով պայմանավորված ուժազույգը կառաջացներ պտտող մոմենտ)։ Այս փաստը հնարավորություն է տալիս մարմնի հավասարակշռության պայմանից օգտվելով ապացուցել, որ երեք տարբեր ուղիղներ հատվում են նույն կետում։

Օրինակ 3: Ապացուցել, որ կամայական եռանկյան ներքին անկյունների կիսորդներն ընդգրկող ուղիղները հատվում են մեկ կետում:

Լուծում: Դիտարկենք *ABC* համասեռ եռանկյունաձև թիթեղը, որի *A*; *B* և *C* գագաթներում կիրառված են մոդուլով միմյանց հավասար



Նկ. 1

$\overrightarrow{F_1}$; $\overrightarrow{F_2}$; $\overrightarrow{F_3}$; $\overrightarrow{F_4}$; $\overrightarrow{F_5}$ և $\overrightarrow{F_6}$ ուժերը (տես նկ. 1): Քանի որ $\overrightarrow{F_1}$ և $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$ և $\overrightarrow{F_4}$, ինչպես նաև $\overrightarrow{F_5}$ և $\overrightarrow{F_6}$ ուժերը միմյանց համակշռում են, իսկ նրանց ազդման գծերը՝ համընկնում, ուրեմն այս ուժերի ազդեցության ներքո *ABC* թիթեղը կգտնվի հավասարակշռության վիճակում: Նշանակենք

$$\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_6} = \overrightarrow{F_A};\ \ \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{F_B};\ \ \overrightarrow{F_4} + \overrightarrow{F_5} = \overrightarrow{F_C}\ :$$

Հեշտ է նկատել, որ $\overrightarrow{F_A}$; $\overrightarrow{F_B}$ և $\overrightarrow{F_C}$ ուժերի ազդման գծերը կհանդիսանան *ABC* եռանկյան ներքին անկյունների կիսորդները և քանի որ այս երեք համահարթ ուժերի ազդեցության տակ *ABC* համասեռ եռանկյունաձև թիթեղը գտնվում է հավասարակշռության վիճակում, ուրեմն, համաձայն վերոգրյալի, այդ ուժերի ազդման գծերը (կամ որ նույնն է՝ *ABC* եռանկյան ներքին անկյունների կիսորդներն ընդգրկող ուղիղները) հատվում են նույն կետում: Պնդումն ապացուցված է:

Հավելենք, որ նմանատիպ մոտեցմամբ հեշտությամբ կարելի է ապացուցել, որ կամայական եռանկյան միջնագծերը (կամ բարձրությունները) հատվում են մեկ կետում:

Բազմաթիվ են մեխանիկայի գաղափարների և թեորեմների կիրառությունները մաթեմատիկայում: Մեխանիկայի գաղափարները, ստանալով խիստ մաթեմատիկական ձևավորում և ձևակերպում, ոչ միայն արժեքավոր էվրիստիկ միջոցներ են, այլև հնարավորություն են տալիս երկրաչափության և հանրահաշվի խնդիրները լուծել պատշաճ ճշտությամբ և խստությամբ: Կարծում ենք, որ դասավանդման ընթացքում նման մոտեցումների կիրառումը նպաստում է ֆիզիկայի և մաթեմատիկայի նկատմամբ սովորողների հետաքրքրությունների խթանմանն ու գործնական կարողությունների զարգացմանը:

Եզրակացություն

Աշխատանքի քննարկված մեթոդական հարցերն ու դիտարկված խնդիրների վերլուծությունը թույլ է տալիս գալ հետևյալ հիմնական եզրահանգումներին.

- Օգտվելով ստատիկայի գաղափարներից և էներգիայի պահպանման օրենքից, շրջանցելով ինտեգրալ հաշվի կիրառությունները և մնալով ֆիզիկայի և մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացի իմացությունների շրջանակում, կարելի է գտնել որոշ համաչափ մարմինների զանգվածների կենտրոնի դիրքը:
- Պոտենցիալ էներգիայի մինիմումի կամ այսպես կոչվող Դիրիխլեի ֆիզիկական սկզբունքը հնարավորություն են ընձեռում ֆիզիկայի դպրոցական դասընթացում դիտարկվող ստատիկայի տարբեր տիպային և ոչ տիպային խնդիրների լուծման ժամանակ կիրառել նոր մոտեցում՝ խուսափելով հայտնի «ավանդական» եղանակներից և իր ձևակերպման և էության պարզությամբ հանդերձ, բավական արդյունավետ «գործիք» կարող է հանդիսանալ ֆիզիկական տարբեր խնդիրների լուծման ժամանակ:
- Ստատիկայի գաղափարների կիրառմամբ հնարավոր է ապացուցել բազմաթիվ կարևոր երկրաչափական թեորեմներ և լուծել երկրաչափական խնդիրներ:
- Ստատիկայի գաղափարների կիրառմամբ հնարավոր է հաշվել հանրահաշվական տարբեր վերջավոր գումարներ:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Сторчилов П.А. Внутрипредметные связи как важный элемент методики преподавания физики в средней школе / Попов К.А., Сторчилов П.А. // Мат. междунар. науч.-практ. конф.: Современное образование: состояние и перспективы. – Ульяновск: УлГПУ, 2010. – с. 167-171.
2. Hannah J., Hillier M.J., Applied Mechanics, Third edition, 1995, Pearson UK, 464 p.
3. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р., Курс теоретической механики. Том 1. Статика и кинематика, М.: Наука, 1979, 272 ст.
4. Бутиков Е.И., Быков А.Л., Кондратьев А.С., Физика для поступающих в вузы, М.: Наука, 1982. - 608 с.
5. Գ.Վ.Գրիգորյան, Բ.Ա.Փախչանյան, Ֆիզիկայի հանրապետական օլիմպիադաներ, 1983-2003, Երևան, «Էդիթ Պրինտ», 2003:
6. Ֆ Ղազարյան Է., Կիրակոսյան Ա., Մելիքյան Գ., Մամյան Ա., Մայիլյան Ս., Ֆիզիկա-10: Ավագ դպրոցի 10-րդ դաս. դասագիրք ընդհանուր և բնագիտամաթեմատիկական հոսքերի համար: Եր.: «Էդիթ Պրինտ», 2010.-272էջ:
7. Б. Б. Буховцев, В. Д. Кривченков, Г. Я. Мякишев, И. М. Сараева, Сборник задач по элементарной физике, «Наука», 1974 г.
8. Успенский В.А., Некоторые приложения механики к математике, Гос. Изд. физ - мат лит., Москва, 1958, 50 с.
9. Վորոբյով Ի.Ի., Զուբկով Պ.Ի., Կուտուզովա Գ.Ա., Սավչենկո Օ.Յա., Տրուբաչյով Ա.Մ., Խարիտոնով Վ. Գ. Ֆիզիկայի խնդիրներ: Ուսումնական ձեռնարկ/ Օ. Յա. Սավչենկոյի խմբագրությամբ/, Եր.: «Տիգրան Մեծ»: 2008.- 528 էջ:
10. Գևորգյան Գ.Գ., Սահակյան Ա.Ա., Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր: Ավագ դպրոցի 10 - րդ դասարանի դասագիրք: - Եր.: Տիգրան Մեծ, 2009. 208 էջ:
11. Հովհաննիսյան Ռ., Շարխատունյան Հ., Սարգսյան Է., Ֆիզիկայի խնդիրների և հարցերի ժողովածու, Եր.: Լույս, 2004. – 231 էջ:

12. Цатурян А.М., Современные технологии организации обобщающего повторения школьного курса физики. Монография/ А.М. Цатурян. – Ванадзор. СИМ ТПАГРАТУН, 2013. - 106 с.
13. Մանուկյան Վ.Ֆ., Նիկողոսյան Գ.Ս., Որոշ գումարների հաշվումը զանգվածների կենտրոնի բանաձևի կիրառմամբ, «Մաթեմատիկան դպրոցում», Թիվ 3 (96), 2014, 35-42:
14. Հ. Միքայելյան, «Հանրահաշիվ-9», Երևան, Էդիթ Պրինտ, 2008:
15. И.Х. Сивашинский, Теоремы и задачи по алгебре и элементарным функциям, Издательство <<Наука>>, Москва, 1971.
16. Ивлев Б. М., Абрамов А. М., Дудницын Ю. П., Шварцбурд С. И., Задачи повышенной трудности по алгебре и началам анализа. М., “Просвещение”, 1990. -48 с.
17. Балк М.Б., Болтянский В.Г., Геометрия масс. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987, 160с.
18. Коган Б.Ю., Приложение механики к геометрии. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1965, 56с.
19. Готман Э. Г., Задачи по планиметрии и методы их решения. М., “Просвещение”: АО “Учеб. лит., 1996. – 240 с.