«ԱՐՄԱՎԻՐ 1» ՎԿ

ՎԵՐԱՊԱՏՐԱՍՏՎՈՂ ՈՒՍՈՒՑՉԻ ՀԵՏԱԶՈՏԱԿԱՆ ԱՇԽԱՏԱՆՔ

Հետազոտության թեման՝ Ապացուցումների մեթոդը միջին դասարանում

Հետազոտող ուսուցիչ՝ Հայկանուշ Քոչարյան
անուն, ազգանուն

Արմավիր քաղաքի Ջ.Անդրանիկի անվան թիվ 5 հիմնական դպրոց
դպրոց

Մենթոր ուսուցիչ Շուշան Վարդանյան
անուն, ազգանուն

ԱՐՄԱՎԻՐ- 2022

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Անտիկ գիտության մեջ տրամաբանությունը առանձնահատուկ տեղ է գրավել: Այդ հանգամանքը կապված է եղել սոփեստության հետ: Հարկ է լինում ապացուցել սեփական տեսակետը, հերքել ուրիշների ասածները, պաշտպանել իր թեկնածուին եւ մերժել մյուսներին: Եվ պատահական չէ, որ հին հունական մտածողները հատուկ ուսումնասիրության առարկա դարձրեցին լեզվատրամաբանական այն միջոցները, ձեւերն ու կաղապարները, որոնք կիրառվում են կշռադատությունների ընթացքում ապահովել ճշմարտության ձեռքբերումը եւ համոզիչ դարձնելով խոսքը:

Արիստոտելը առաջինն էր, որ մտածողությունն ուսումնասիրելով կառուցվածքային տեսանկյունից, ձեւակերպեց տրամաբանական մտածողության հիմնական օրենքները. մտահանգման ու ապացուցման ձեւերը:

Ապացուցումը լավ ծանոթ է դպրոցականներին մաթեմատիկայից: Բայց ոչ միայն մաթեմատիկական, այլ նաև մյուս գիտությունները շահագրգռած են ցույց տալու իրենց պնդումների ճշմարիտ լինելը: Ֆիզիկոսը, քիմիկոսը, կենսաբանը ապացուցում են իրենց դրույթները որպես փաստարկներ (ապացույցներ) բերելով դատողություններ, որոնք կամ տեսական ճշմարիտ դրույթներ են, կա'մ էլ փորձնական ճշմարտություններ, այսինքն դիտված փաստեր ու գիտափորձերի արդյունքներին վերաբերող դատողություններ: Մաթեմատիկայում, բնագիտության մեջ, պատմության մեջ, առօրյա կյանքում կիրառվող ապացուցումներն ունեն առանձնահատկությունները: Բայց դրանք ունեն ընդհանրություն իրենց տրամաբանական ձևի տեսակետից: Ամեն մի ապացուցում պետք է ունենա որոշակի կառուցվածք և բավարարի որոշակի կանոնների, որոնք ապահովում են ապացուցման ճշմարտությունը:

Հանրակրթական դպրոցի մաթեմատիկայի դասընթացում տրամաբանության տարրերի ուսուցման կարևոր բաղադրամաս է համարվում տրամաբանական արտածման կամ ապացույցի իրականացումը և նրա ներկայացումը:

Ապացուցման հիմնախնդիրը վերաբերում է ճանաչողության հիմնական «ինչու» հարցադրմանը: Այս հարցադրումը հիմնականում ծագել է մարդկության պատմության վաղ շրջաններից, բայց իր բուռն զարգացումն է ստացել միայն անտիկ Հունաստանում: Հունական պոլիսների կառավարման ժողովրդական ձևը ենթադրում էր առաջադրվող հարցերի հրապարակային քննարկում, որտեղ բանախոսին անհրաժեշտ էր մարդկանց համոզել, ցույց տալ իր տեսակետի ճշմարտացիությունը: Ճարտասանությունը հունական կրթության կարևոր բաղադրիչն էր: Եվ բնականաբար հարցադրման պատասխանի, համոզիչ խոսքի հիմնական արժանիքներից մեկը, գլխավորը դրա փաստարկվածությունն էր, հիմնավորվածությունը, ապացուցելիությունը:

Այդ ամենի պատասխանը տվեց մաթեմատիկական գիտական օրինակներով ըստ Արիստոտելի տրամաբանության ստեղծման միջոցով, որը գիտություն էր ապացուցման մասին: Նախ հստակեցնենք թե ինչ է ապացուցումը:

Ապացուցումը տրամաբանական գործողություն է, որի միջոցով ցույց է տրվում որևէ դատողության ճշմարիտ լինելը՝ այն բխեցնելով ուրիշ այնպիսի դատողություններից, որոնց ճշմարտությունն արդեն ընդունված է, այսինքն ապացուցված է, հայտնի է, դրա մասին արդեն գիտենք:

Ապացուցումը կազմված է 3 մասից՝ ապացուցման թեզիս, ապացուցման հիմքեր, ապացուցման եղանակ:

1. Ապացուցման թեզիսը , այն դատողությունն է որի ճշմարտացիությունը ցույց է տրվում տվյալ ապացուցման մեջ:

2. Ապացուցման հիմքերը , (փաստարկները,ապացույցները) այն դատողություններն են, որոնց ճշմարիտ լինելը արդեն ընդունված է և որոնց կապակցությունից բխեցվում է ապացուցվող թեզիսը:

3. Ապացուցման եղանակը , որը կոչվում է նաև փաստարկում կամ դեմոստրացիա, բուն բխեցումն է, որը կատարվում է մտահանգման կամ մի քանի մտահանգումների կապակցված շարքի միջոցով: Ապացուցման թեզիսը

դրանց վերջնական եզրակացությունն է դառնում:

Ապացուցումը լինում է 2 տեսակի' ուղղակի և անուղղակի:

Ուղղակի կոչվում է այն ապացուցումը, որի մեջ թեզիսի ճշմարիտ լինելը ցույց տալու համար այն բխեցվում է փաստարկներից անմիջականորեն: Բայց երբեմն դժվար է գտնել փաստարկներ, որոնցից թեզիսը բխեր անմիջականորեն և այդ դեպքում դիմում են անուղղակի ապացուցմանը:

Անուղղակի ապացուցման դեպքում օգտագործվում են թեզիսի նկատմամբ այլ ընտրական դրույթ կամ դրույթներ, որոնց կեղծ լինելը ցույց տալու միջոցով բխեցվում է թեզիսի ճշմարիտ լինելը: Անուղղակի ապացուցման մի տեսակը, որ կոչվում է ապացուցում հակառակից կամ հանգեցնում անհեթեթության դպրոցական դասընթացներում հայտնի է հակասող ենթադրության մեթոդով ապացուցում անվանումով:

Իսկ ինչ հասկանալ ապացուցման ուսուցման տակ:

Հարցն այն է, թե ինչպես ենք մենք ապացուցում, ինչպես է ապացուցվող թեզիսը ստացվում տրված տեսության արդեն հայտնի ճշմարիտ պնդումներից: Ուսուցման պրակտիկայում մնում է ոչ լիարժեք պարզաբանված: Հաճախ է հանդիպում պատասխան' «ակնհայտ է», որը ոչինչ չի պարզաբանում: Ձ.Խ. Սլեպկանը նշում էր «Ապացույի ուսուցման տակ անհրաժեշտ է հասկանալ սովորողներին, պատրաստի ապացույցների ուսուցումը, որը առաջադրվում է ուսուցչի կամ դասագրքի կողմից և ապացուցման ինքնուրույն որոնման ուսուցումը»: Իսկ Ի.Լակատոսի « Ապացուցում և հերքում» գրքում հեղինակը առանձնացնում էր ապացուցման տիրապետման հետևյալ մակարդակները.

1. Պատրաստի ապացույցների հասկացում և վերարտադրություն
2. Պատրաստի ապացույցների ինքնուրույն վերլուծություն
3. Ապացույցների ինքնուրույն իրականացում
4. Առաջարկված թվացյալ ապացույցների հերքում

Թեզիսի հերքման առավել տարածված տեսակը հակաօրինակի կառուցման կամ վկայակոչման գործողությունն է, ըստ որի հասկանում են այնպիսի օբյեկտի համար պայմանը ճշմարիտ է իսկ եզրակացությունն կեղծ:

Պարզ է, որ ապացուցման կարողության նշված մակարդակին հասնելը անհրաժեշտ է առանց տրամաբանական գործողությունների իմացության:

Ապացուցման գործընթացը հիմնվում է ոչ միայն մաթեմատիկական օբյեկտների վրա, նրանում օգտագործվում են և սովորական բնական լեզվի հասկացությունները: Ապացուցման ուսուցման մեջ առանձնացնենք երկու հիմնական մակարդակներ:

Առաջին մակարդակում (4-7 . րդ դասարան) ապացուցումներ մեջ օգտագործվող տրամաբանական արտածումները երևան չեն բերվում, չեն բացատրվում: Ուշադրություն է դարձվում թե «ինչ է ապացուցվում», «ինչից է այդ բանը բխում», բայց ոչ «ինչպես է դա հետևում»: Այս մակարդակում ապացուցումը դիտարկվում է որպես դատողություն, որի միջոցով մի պնդման ճշմարտությունը հաստատվում է այլ պնդումների ճշմարտության հիման վրա:

Երկրորդ մակարդակում (բարձր դասարաններ) սովորողներին կարելի է բացատրել պարզագույն արտածման կանոնները և դրա հիման վրա ճշգրտել ապացուցման հասկացությունը: Այս մակարդակում սովորողներին հասանելի է դառնում ապացուցման վերլուծությունը, նրա տրամաբանական կառուցվածքը և հայտնաբերումը, նրանում օգտագործվող արտածման կանոնները: Ըստ Ստոլյարի «Ապացուցման ուսուցման տակ մենք հասկանում ենք փնտրման մտավոր գործընթացների սովորեցում և կառուցում, այլ ոչ թե անգիր անել ու վերարտադրել պատրաստի ապացույցները»:

Ապացուցման մեջ տրամաբանական քայլերի շղթայի կարողությունների իրականացման ուսուցումը, և նշված էվրիստիկական գործողությունների կիրառումը կազմում է ապացուցման դիտարկվող մակարդակի մեջ ուսուցման բովանդակությունը: Իսկ ապացուցման վերլուծությունը՝ տրամաբանական քայլերի առանձնացումը, տրամաբանական բացթողումների փնտրտուքը և վերացումը, ապացուցման գաղափարների առանձնացումը և նրա վերարտադրումը կազմում են ըմբռնման բովանդակությունը: Դասագրքերի հատկապես երկրաչափության դասագրքի, հնարավորությունները նշված էվրիստիկական եղանակների ձևավորման համար բավականին շատ են: Երկրաչափության դասընթացի առաջին թեորեմների ուսուցումը, օրինակ, եռանկյունների հավասարության հայտանիշները, նպաստում են սովորողների մոտ անալոգիայի, իսկ խնդրի հետ աշխատելու վերջնական փուլը ընդհանրացման և կոնկրետացման մեթոդների կիրառման կարողությունների ձևավորում:

Փաստերի ինfնուրույն բացահայտման, ձևակերպումների, ապացույցների կառուցման մեջ աշակերտների մասնակցությունը, բնականաբար, առաջացնում է տարբեր բնույթի սխալներ, այդ պատճառով կարևոր է սեփական աշխատանfի և իր ընկերների հետ աշխատանfների արդյունfները fննադատաբար գնահատելու կարողությունը, որոնf և ձևավորվում են առաջարկվող պնդումների ժխտման և ապացուցման գործընթացի մեջ: Ապացուցելու այդ առավել բարձր ուսուցման մակարդակը հիմնավորված է նաև հոգեբանական հետազոտությունների արդյունfներով:

Մեր աշխատանfում կարևոր է տրամաբանական հիմնավորումների ձևավորման պահանջների իրականացումը: Կարևոր խնդիր է դպրոցականներին սովորեցնել տրամաբանորեն դատելու ունակություններ: Արդեն իսկ 7-րդ դասարանում առաջին դասերից աշակերտները տիրապետում են հետևության ու ժխտման կանոններին:

Հիմնական դպրոցում հարկավոր է իրականացնել ապացույցի վերլուծություն՝ առանձնացնել նրանում տրամաբանական fայլեր դիտարկել տարբեր դեպfեր:

Լուծման իրականացման պլանի հետևյալ փուլը Պոյան բնութագրում է այսպես՝ լուծման պլան իրականացնելով, կոնկրետացրեf սեփական ամեն մի fայլ: Ձեզ պարզ է, որ ձեր կողմից ձեռնարկվող fայլը ճիշտ է: Կարող եf ապացուցել, որ դա ճիշտ է: Պարզ է, որ այդ փուլի իրականացումը ենթադրում է տրամաբանական գործողությունների և առաջին հերթին արտածման կանոնների տիրապետում, իսկ դրանf դպրոցական դասընթացում փաստացի չեն ուսուցանվում: |

Բոլորը համաձայն են, որ սովորեցնել առաջին հերթին նշանակում է սովորեցնել մտածել: Բայց ինչպես սովորեցնել մտածել: Պետf է արդյոf ուսուցումը որոշակի փուլում մեր դատողությունները դարձնել ուսուցման առարկա, թե տարբեր առարկաների ուսուցումը բավական է սովորողների մտածողությունը բավարար չափով զարգացնելու համար: Այս հարցում կարծիfները բաժանվում են:

Մաթեմատիկային վերագրվում է հատուկ դեր սովորողների տրամաբանական մտածողության զարգացման խնդրում, քանի որ մաթեմատիկայի ուսումնասիրության և այն սովորելու ընթացքում հարկ է լինում բազմիցս կատարել զանազան գործողություններ: Բնականաբար առաջանում է այն հարցը, թե այդ դերը պատկանում է միայն մաթեմատիկային, թե կախում ունի նաև դասավանդման մեթոդիկայից: Միայն տրամաբանական արտածումների մեջ վարժվելը առանց հասկանալու, թե ինչպես ենք կատարում արտածումը, արդյոք կհանգեցնի սովորողների տրամաբանական մտածողության զարգացման: Սովորաբար մաթեմատիկայի ուսուցման ընթացում ձգտում են վերացնել սովորողների կողմից մաթեմատիկական նյութի ընկալման դժվարությունները բացատրությունների կրկնություններով ու նյութի մաթեմատիկական բաղադրիչի մեկնաբանություններով: Դա արվում է նախ այն դեպքում, երբ ընկալման դժվարությունը կապված է նյութի տրամաբանական բաղադրիչի չհասկացման հետ: Նման փորձերը անպտուղ են, քանի որ չեն վերացնում դժվարության պատճառները:

Ապացույցների ու արտածումների ուսուցման մեջ շատ կարևոր է, որ սովորողը իմանա, թե իր մտքերը շարադրելու համար ինչ կանոն պետք է կիրառել: Արիստոտելի այն ուսմունքը, որում ասվում է «Գիտենալ՝ նշանակում է ապացուցել» նախ և առաջ վերաբերվում է մաթեմատիկային, որում ասելիքի բովանդակությունը նույնացվում է նրա ապացուցվածության հետ:

Ցուրաքանչյուր գիտություն կամ տեսություն ունի աքսիոմների կամ անառարկելի դրույթների իր համակարգը, որոնք որպես ճշմարտություններ ընդունվում են այդ գիտության կամ տեսության շրջանակներում:

Ապացուցման յուրաքանչյուր քայլից, այսինքն հաջորդականության մեկ բանաձևից հաջորդին անցման ընթացքը պահանջում է հիմնավորում, անհրաժեշտ է նշել, թե այդ հաջորդ բանաձևը արդյոք աքսիոմ է, թե ստացվել է իր նախորդներից արտածման ինչ-որ կանոնով: Վերջիններիս համար մեզանից պահանջվում են մեծ հմտություններ, երբ ապացուցումը երկար է լինում: Այս նպատակի համար անհրաժեշտ է ներմուծել ապացույցի փաստարկման հասկացությունը, ապացուցմանը զուգահեռ նշվող այն աքսիոմների և արտածման կանոնների անվանումների հաջորդականությունը, որոնք կիրառվում են ապացուցման համապատասխան քայլը իրականացնելու համար: Զնայած փաստարկների ներկայացումը երբեմն այնքան ծավալուն կարող է լինել, որ բուն ապացուցվող նյութի մասին հետաքրքրությունը թուլանում է:

Մաթեմատիկական ապացուցումները կիրառվում են ոչ միայն երկրաչափության դասընթացում այլ նաև հանրահաշվի:

Ելնելով աշակերտների տարիքային առանձնահատկություններից հայտի մեթոդիստ Գ.Ի.Սարանցևը հետևյալ կերպ է ներկայացնում աշակերտների կողմից ապացուցման ուսուցման մակարդակների ընկալունակությունը:

5-6-րդ դասարաններ

- Տրամաբանական ապացուցումների իրականացման պահանջմունքների ձևավորում
- Տրամաբանական արտածումների իրականացման ունակությունների ձևավորում

6-7-րդ դասարաններ

- էվրիստիկական հնարքների և նրանց կիրառության ուսուցում
- Տրամաբանական քայլերի շղթայի ուսուցում

7-րդ դասարան

- Պատրաստի ապացուցման ինքնուրույն վերլուծություն
- Ապացուցման գաղափարի առանձնացման ունակության ձևավորում

7-8-րդ դասարան

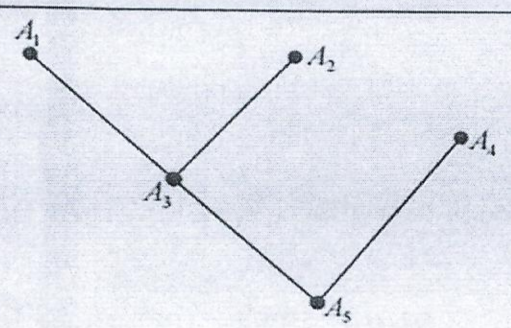
- Ապացուցման գիտական մեթոդի օգտագործման ուսուցում
- ճանաչողության գիտական մեթոդների օգտագործման ուսուցում

9-րդ դասարան

- Ապացուցման ենթակա դրույթի հերքման ձևավորում և ապացուցում

Երբ ապացուցումների ուսուցումը կազմակերպվում է հենցենյան ծառի տեսքով, ապա դրանք մի կողմից աշակերտներին հնարավորություն էին տալիս նորովի մոտենալ ապացուցումներին, ընկալել դրանց հիմքում ընկած մեխանիզմը, մյուս կողմից ապացուցմանը զուգահեռ տրված փաստարկների համակարգը թույլ է տալիս նշել ապացուցման մեջ կիրառվող հատկությունները կամ թեորեմները՝ հնարավորություն տալով վերհիշել դրանք, իսկ հաճախակի կիրառությունը ամրապնդում է դրանց իմացությունը: Ընդ որում ապացուցումների նման ուսուցումը հաճախ հնարավոր է իրականացնել խաղերի միջոցով ինչը էականորեն բարձրացնում է սովորողների ակտիվությունը:

Ապացուցման գաղափարը, որպես բանաձևերի հաջորդականություն, որի վերջին անդամը ապացուցող բանաձևն է, իսկ մնացած անդամները աքսիոմներ են կամ էլ ստացվում են նախորդներից արտածման որևէ կանոնով, պատկանում է Հիլբերտին: Ապացուցման այս ընկալման մեջ, սակայն չի երևում թե նրանում մասնակցող բանաձևերը իրենց նախորդող որ բանաձևերից են ստացվում արտածման կանոններով: Այդ թերությունը վերացնելու նպատակով Հիլբերտի աշակերտ Հենցենը ներմուծել է ծառի տեսքով ապացուցումը, որում արդեն հստակ նշվում են արտածման նախադրյալները:

	Փաստարկները
	աքսիոմ հետևում է A_1-ից A_2-ից արտածման կանոնով հետևում է A_3-ից և A_4-ից արտածման կանոնով

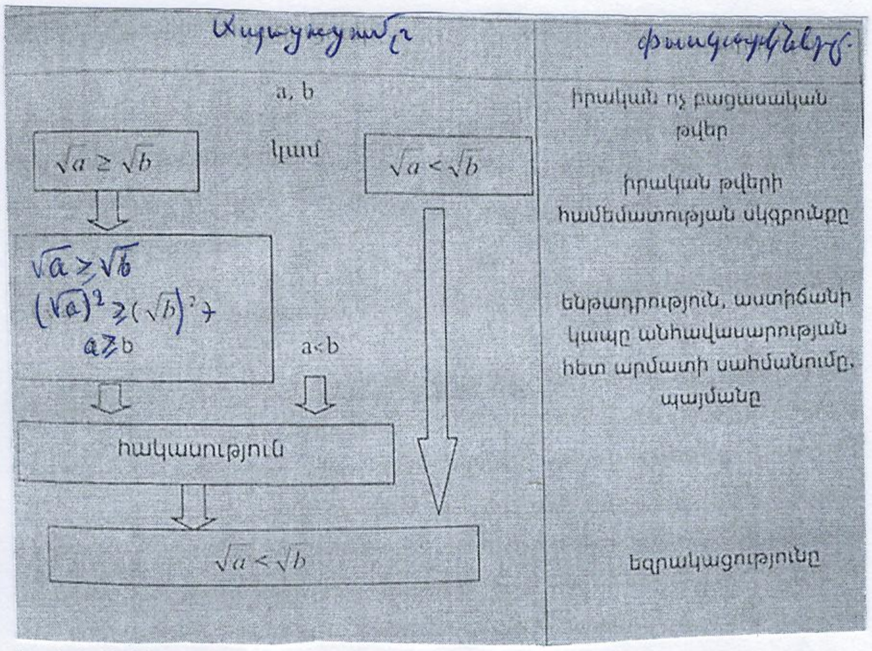
Ծառի տեսքով տրված ապացուցումը ի տարբերություն Հիլբերրյան ապացուցման հնարավորություն է տալիս հստակ ներկայացնել ապացուցման նախադրյալները նրա յուրաքանչյուր քայլում, իսկ դա, իր հերթին, ստեղծում է ապացուցման փաստարկում ու հիմնավորման հնարավորություն: Այստեղ հստակ երևում է, որ A3 բանաձևը ստացվելէ A1 և A2 բանաձևերից, իսկ A5-ը A3 և A4 բանաձևերից: Այս ամենը հնարավորություն է տալիս աշակերտին տեսնելու թեորեմի ապացուցման հիմքում ընկած դատողությունների և մտահանգումների ողջ մեխանիզմը և հստակ պատկերացնելու փաստարկների ողջ համակարգը:

Ծառի տեսքով ապացուցման դեպքում ձախ կողմում բերվում է ապացուցումը՝ որպես ծառ, աջ մասում գրվում են յուրաքանչյուր քայլի համար անհրաժեշտ փաստարկները կամ արտածման կանոնները: Բերված ապացուցումը կամ ծառը հնարավորություն է տալիս ապացույցի մեջ մասնակցող յուրաքանչյուր բանաձևի ստացման մեխանիզմը: Իսկ աջ մասում՝ փաստարկումների բաժնում, տրված են բանաձևի ստացման հիմնավորումները կամ արտածման կանոնները:

Ապացուցենք թվերի համեմատության միջոցով քառակուսի արմատների համեմատության հատկությունը.

Ա. Եթե ոչ բացասական արմատներից մեկը փոքր է մյուսից ապա նրա քառակուսի արմատը նույնպես փոքր կլինի մյուսի քառակուսի արմատից: Այսինքն՝ եթե $a<b$, ապա $\sqrt{a} <\sqrt{b}$, որտեղ կամայական ոչ բացասական թվեր են:

Բ.Եթե ոչ բացասական թվերից մեկը մեծ է մյուսից, ապա նրա քառակուսի արմատը նույնպես մեծ կլինի մյուսի քառակուսի արմատից: Այսինքն՝ եթե $a>b$ ապա $\sqrt{a} > \sqrt{b}$:



Պարզվում է երեխաներին դուր է գալիս նման ապացուցման մեթոդը, քանի որ սխեմատիկորեն նրանք տեսնում են, թե ինչից ինչ է բխում, տպավորիչ է, լավ է հիշվում, ներգրավվում են անգամ թույլ աշակերտները, գրավում է, վերացնում է վախը սեփական ուժերի հանդեպ, երեխաները ավելի ինքնավստահ են դառնում, զարգացնում է լեզվաբանական մտածողությունը, երեխաների մոտ զարգանում է փաստարկումներ կատարելու կարողությունները, պատասխանատվություն են զգում իրենց կատարած ամեն մի քայլի համար, գիտակցում են, որ այն ինչ գրեցին պետք է կարողանան հիմնավորել, ճիշտ ձևակերպեն իրենց մտքերը, միայն մաթեմատիկորեն չգրեն այն ինչ ապացուցում են, կարողանան հստակ հայերենով ձևակերպել իրենց մտքերը:

Սովորողների մեջ մաթեմատիկական մտածողության ունակությունների և հմտությունների ձևավորումը լավագույն հնարավորություններ է ընձեռում երկրաչափության դպրոցական դասընթացում ապացուցումների ուսուցումը, քանի որ տրամաբանական ձևերը, այդ թվում նաև սեփական կամ ուրիշի դատողությունները ապացուցելու, հիմնավորելու ընդունակությունները ավելի վառ, պարզորոշ կերպով հանդես են գալիս հենց երկրաչափության դասընթացում:

Երկրաչափության ավանդական դասընթացի ժամանակ ձևավորվում են մի շարք ունակություններ՝ կապված մաթեմատիկական պնդումներ ապացուցելու հետ: Բայց մինչև այսօր այդպիսի ունակությունների ամբողջությունն առանձնացվում էր փորձարարական ճանապարհով դասավանդման փորձի հիման վրա:

Մեր աշխատանքում դրվում է երկրաչափական ապացուցումների այն տարրերի առանձնացման հարցը, որոնք հանդիսանում են ուսուցման պարտադիր օբյեկտ և ստեղծում են սովորողների կողմից ինքնուրույն ոչ բարդ ապացուցումներ կատարելու և ուսուցչի ղեկավարությամբ կատարվող ապացուցումների նմուշները հասկանալու բավարար հիմք: Այդ պատճառով առաջարկվում է նման ունակությունների առանձնացման մի մեթոդիկա, համաձայն որի նախ կառուցվում են այդ ունակությունների առանձնացման տեսական հիմքերը, որոնք դիտարկվող պրոբլեմն ընդգրկում են բազմակողմանիորեն՝ հաշվի առնելով ապացուցումներ կատարելու ունակություններին ներկայացվող և ավանդական ծրագրային և հոգեբանամանկավարժական պահանջները, ապահովում են ինչպես մաթեմատիկայի այնպես էլ հարակից այլ առարկաների

(ֆիզիկա, քիմիա, կենսաբանություն և այլն) գիտակցված ուսուցման հնարավորություն:

Ապացուցման տարրերի առանձնացմամբ և սովորողների մեջ դրանց ձևավորման մեթոդիկայով զբաղվել են շատ հոգեբաններ: Սակայն, ինչպես ցույց է տալիս այդ հետազոտությունների վերլուծությունը, հիմնականում ուսումնասիրվել է ապացուցման ունակությունների ձևավորման հարցը, իսկ այդ ունակությունների առանձնացման համարյա բոլոր սկզբունքները հենվում են դասակարգման փորձի վրա:

Վերոհիշյալ հետազոտություններում ամբողջությամբ վերցված, օգտագործվող պարամետրերի հավաքածուն ապացուցման տարրերի առանձնացման պրոբլեմն ընդգրկում է ավելի բազմակողմանիորեն քան այդ հետազոտություններում առանձին-առանձին: Ուստի բնական է, որ մեր կողմից կատարվող հետազոտության հիմքում հիմնականում ընկած է հենց նախորդ հետազոտություններում կիրառված սկզբունքների համադրությունը.

1. մաթեմատիկայի ուսուցման ընթացքում ապացուցվող պնդումների կառուցվածքային ձևերի, նրանց ապացուցման մեթոդների և դրանց տարրերի նկատմամբ ավանդական պահանջների հաշվառում:

2. սովորողների մաթեմատիկական պատրաստականության նկատմամբ մաթեմատիկայի ժամանակակից ծրագրի պահանջների հաշվառում

3. ապացուցման ունակությունների ձևավորման նկատմամբ հոգեբանամանկավարժական պահանջների հաշվառում:

4. այլ ուսումնական առարկաների ուսուցումն ապահովելու ուղղությամբ ապացուցողական ունակություններին ներկայացվող պահանջևորի հաշվառում:

Այս պահանջներից մեզ համար հիմնարար նշանակություն ունի առաջինը, որի օգնությամբ առանձնացվում են '

1. դպրոցական մաթեմատիկական պնդումների հնարավոր կառուցվածքային ձևերն ու նրանց համապատասխան լեզվաքերական ձևակերպումները

2. ապացուցման այն հիմնական մեթոդները որոնք ավանդաբար օգտագործվում են երկրաչափության դպրոցական դասընթացում

3. երկրաչափության դպրոցական դասընթացում ավանդաբար օգտագործվող մեթոդների տարրերը:

Մեթոդների դասավանդմամբ զբաղվել են շատ հետազոտողներ: Դեռևս Արիստոտելն էր ուսուցանում, որ ամենուրեք մենք մեր համոզմունքները կառուցում ենք ինդուկցիայի միջոցով տարբերելով արտածումների երկու հիմնական դաս՝ ինդուկտիվ և դեդուկտիվ: Ուսումնասիրությունները ցույց են տալիս, որ երկրաչափության դպրոցական դասընթացում ներդրված ավանդական մեթոդների թվին են պատկանում՝

1. ուղղակի (համադրման վերլուծման-համադրման)

2. անուղղակի (հակասողենթադրության կամ հակասության մեթոդ)

3. լրիվ ինդուկցիայի

4. Կոնստրուկտավորման մեթոդներ

Ընդ որում պարզվում է, որ սովորաբար գործնականում ապացուցման և ոչ մի մեթոդ մաքուր վիճակում չի կիրառվում, կիրառվում են այլ մեթոդների կամ էլ նրանց տարրերի զուգակցությամբ. Բայց միաժամանակ նկատվում է, որ այս կամ այն ապացուցումը կատարելիս միշտ որոշակի մի մեթոդ ունի առաջատար դեր, իսկ մնացածները միջանկյալ, օժանդակ դեր: Ապացուցման եղանակների ավանդական անվանումները՝ «Ապացուցում հակասող ենթադրության մեթոդով», «Ապացուցում լրիվ ինդուկցիայի մեթոդով» և այլն, մեթոդները իրականում հանդիսանում են ապացուցումների առաջատար մեթոդներ: Երկրաչափության դասընթացի ոչ ավանդական մեթոդների թվին են պատկանում օրինակ մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը, մի շարք զուտ մաթեմատիկական ոչ տրամաբանական մեթոդներ, ինչպիսիք են օրինակ վեկտորական մեթոդը, կոորդինատային մեթոդը, զանազան ձևափոխությունների մեթոդները (զուգահեռ տեղափոխություն, համաչափություններ, համադրում և այլն): Հետազոտությունները ցույց տվեցին, որ երկրաչափության դպրոցական դասընթացում կիրառվում է ապացուցման մեթդների հետևյալ ամբողջությունները.

1. ուղիղ կամ ուղղակի ապացուցում

Ա.«համադրման. մեթոդ + կառուցման մեթոդ»

Բ.«համադրման մեթոդ+վերլուծություն».

2. Անուղղակի ապացուցում հակասության մեթոդով.

<<հակասության մեթոդ+ համադրման մեթոդ»

3.Օբյեկտի գոյության ապացուցում

«կառուցման մեթոդ +համադրման մեթոդ + հակասության մեթոդ»

4.Անուղղակի ապացուցում բացառության մեթոդով

«բացառության մեթոդ + հակասության մեթոդ +համադրման մեթոդ

5.Օբյեկտի գոյության ու միակության ապացուցում

«կառուցման մեթոդ +հակասության մեթոդ + համադրման մեթոդ»

6. Ապացուցում՝ լրիվ ինդուկցիայի մեթոդով

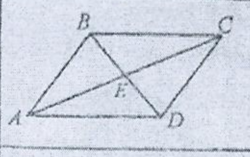
Ա.«լրիվ ինդուկցիայի մեթոդ + համադրման մեթոդ»

Բ.«լրիվ ինդուկցիայի մեթոդ + հակասության մեթոդ + համադրման մեթոդ»

Նշված մեթոդների առաջին մասը անվանում են երկրաչափության դասընթացի հիմնական մեթոդներ, իսկ երկրորդ մասը օժանդակ մեթոդներ:

Հիշենք որ յուրաքանչյուր խնդրի լուծման բանալին կիրառված ապացուցման մեթոդի և նրա առաջին քայլի ճիշտ ընտրությունն է: Ցուրաքանչյուր ապացուցում տրամաբանական որոշակի գործողությունների հաջորդականությունն է լրացված փաստարկներով: Հիմնավորել նշանակում է ինչ-որ միտք հաստատել կամ ժխտել մեկ այլ մտքի նկատմամբ: Ցանկացած պնդում (խնդիր) կարելի է ներկայացնել «եթե A ապա B» տեսքով,որտեղ A-ն կոչվում է խնդրի պայման, իսկ B-ն պահանջ կամ եզրակացություն:

Օրինակ 1: «AC և BD հատվածները հատվում են E կետում և կիսվում: Ապացուցել, որ $\Delta ABC = \Delta CDA$» ([7], էջ 38, խնդ. 107):

Ապացուցում	Հիմնավորում
1. Տրված է. $AC \cap BD = \{E\}$, $AE = EC$, $BE = ED$: Ապացուցել, որ $\Delta ABC = \Delta CDA$:	 Պայմանի և պահանջի առանձնացում:
2. $\Delta AEB = \Delta CED$, քանի որ $AE = EC$, $BE = ED$ (ըստ պայմանի), $\angle AEB = \angle CED$ (որպես հակադիր անկյուններ):	Եռանկյունների հավասարության ճանաչման I հայտանիշի միջոցով:
3. Հետևաբար, $AB = CD$ և $\angle BAE = \angle DCE$:	Հետևանքների որոնում եռանկյունների հավասարության սահմանման միջոցով:
4. $\Delta ABC = \Delta CDA$, քանի որ AC-ն ընդհանուր է, $AB = CD$, $\angle BAC = \angle DCA$:	Եռանկյունների հավասարության ճանաչում I հայտանիշի միջոցով:

1. Համադրման մեթոդն ապացուցման այնպիսի եղանակ է, երբ դատողությունները ընթանում են խնդրի պայմանից կամ հայտնի ինչ-որ փաստից դեպի պահանջը:

2.Վերլուծական-համադրման մեթոդը ապացուցման այնպիսի եղանակ է,երբ նախ խնդրի պահանջն այնfան է մոտեցվում խնդրի պայմանին, մինչև որ հստակ երևում է դատողությունների շղթայի (համադրման մեթոդի) առաջին fայլը: Դրանից հետո հակառակ կարգով համադրելով վերլուծության դատողությունները ստանում ենf խնդրի լուծումը: Այս մեթոդին են դիմում, երբ հայտնի չէ լուծման առաջին fայլը (ինչից սկսել): Այստեղ մեզ օգնության է գալիս հետևյալ պատվիրանը՝ եթե դա fեզ չի հաջողվի մի հուսահատվիր և փորձիր վերլուծել խնդրի պահանջն այնfան ժամանակ մինչև կգտնես խնդրի լուծման բանալին:

Օրինակ2.Կամայական և բացասական թվերի համար'

$$(a+b) / 2 \geq \sqrt{ab}$$

Վերլուծություն -- ►

$$(a+b)/2 \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a-2\sqrt{ab} + b \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$$

<--

Համադրում

3.Հակասության (հակասող ենթ ադրության) մեթոդն ապացուցման այնպիսի եղանակ է, երբ ուղիղ ճանապարհով պայմանից պահանջը գտնելու փոխարեն ենթադրվում է պահանջի հակադիր պնդման (ժխտմանն) ճշմարիտ լինելը, այստեղից այնուհետև արտածվում է հակասություն, որի հիման վրա հայտարարվում է թե ճշմարիտ է ապացուցվելիf պնդումը:

Օրինակ 4, Ապացուցել, որ գոյություն չունի իրական թիվ, որի քառակուսին բացասական է:

Ապացուցում: Ենթադրենք հակառակը՝գոյություն ունի այնպիսի a իրական թիվ,որ $a^2<0$: Հնարավոր է 3 դեպք՝ $a>0$, $a<0$, $a=0$

ա.Եթե $a>0$,ապա $a^2=a \times a >0$

բ.Եթե $a <0$,ապա $a^2=a \times a>0$

գ.Եթե $a =0$,ապա $a^2=0\times0=0$

Երեք դեպքում էլ ստացվեց $a^2\geq0$, որը հակասում է մեր ենթադրությանը: Հետևաբար գոյություն չունի իրական թիվ, որի քառակուսին բացասական է:

4. Բացառության մեթոդի կառուցվածքը հետևյալն է: Նախ որոշվում է վերոնշյալ բաժանարար ճշմարտությունը, ապա հակասության մեթոդով բացառվում են բոլոր դեպքերը բացի մեկից և դրա հիման վրա եզրակացվում է,որ ճշմարիտ է մեկը:

5. Լրիվ ինդուկցիայի մեթոդի կառուցվածքը հետևյալն է: Նախ՝ ապացուցվելիք խնդիրը տրոհվում է դեպքերի, ապա խնդիրը լուծվում է յուրաքանչյուր դեպքում առանձին- առանձին: Այնուհետև համոզվելով, որ բոլոր դեպքերը սպառվել են, արվում է ինդուկտիվ հայտարարություն, որ պնդումը ճիշտ է ցանկացած դեպքում:

6.Ապացուցման կառուցարկման մեթոդը կիրառվում է այն դեպքում,երբ պահանջվում է ապացուցել ինչ-որ բանի գոյությունը: Մեթոդի կառուցվածքը հետևյալն է «կառուցվում» կառուցարկվում է որոնելի օբյեկտը «1-ին փուլ»,ապա ապացուցվում է,որ այդ կերպ «կառուցված» օբյեկտն այն է ինչ պահանջվում էր «2-րդ փուլ» ապացուցում>> Օրինակ. Ապացուցենք որ «գոյություն ունի երկու արտահայտությունների քանորդ»

1. a,b ($b\neq0$)
2. $a/b=a \times 1/b$

Կ ա ռ ո ւ ց ա ր կ ո ւ մ

3. (ax1/b)xb=ax(1/bxb)=ax1=a

4. (ax1/b)xb=a

5. Ուստի a/b=ax1/b

Այս մեթոդը հաճախ կիրառվում է այսպես կոչված «Գոյության միակության» թեորեմների ապացույցներում:

7. Բացի ապացուցման վերոհիշյալ մեթոդներից՝ հաճախ հանդիպում է ապացուցման ևս մեկ տեսակ, որը որոշակիորեն տարբերվում է թվարկված մեթոդներից: Ապացուցման այդ տեսակը որևէ պնդման թեզի, սխալ կամ անհիմն լինելու ապացուցումն է՝ հերքումը: Զանազանում են հերքման երեք հիմնական ձև:

1. Պնդումը հերքելու ժամանակ վերջինիս հարկադրում են այնպիսի փաստեր, որոնցից ուղղակի բխում է հերքվող պնդման սխալ լինելը: Հերքման այս ձևը կոչվում է հերքում փաստերի միջոցով կամ հերքում հակաօրինակի միջոցով

   Օրինակ՝ որպիսի հերքենք <իռացիոնալ թվի քառակուսին իռացիոնալ թիվ է> պնդումը, բավական է բերել մեկ փաստ, օրինակ, որի դեպքում այդ պնդումը ճիշտ չէ: Նման հակաօրինակ է $\sqrt{2}$-ը:
2. Ապացուցում են հերքվող պնդման հակասող պնդումը՝ հակաթեզի ճշմարիտ լինելը և երրորդի բացառման օրենքի համաձայն սխալ համարում հերքվող պնդումը:
3. Այս դեպքում ենթադրում են հերքվող պնդման ճշմարիտ լինելը և ուսումնասիրում թե ինչ հետևանքներ են բխում դրանից: Նկատելով որ տվյալ հետևությունները հանգեցնում են անհեթեթության, եզրակացնում են այդ հետևանքների սխալ լինելը, որից էլ բխում է բուն պնդման հերքվող թեզի սխալ լինելը: Հերքման այս ձևը լայնորեն է կիրառվում օրինակ հակասության մեթոդով ապացուցումներում հակասող ենթադրությունը հերքելիս:

8. Ընտրության կամ փորձի և սխալի մեթոդը ապացուցման պարզագույն եղանակներից է: Օրինակ, որպեսզի պարզենք տրված թիվը, ասենք 103-ը պարզ թիվ է, բավական է ստուգել, որ այն չի բաժանվում $\sqrt{103}$-ը

չգերազանցող և ոչ մի պարզ թվի, մեր օրինակում՝ 2-ի, 3-ի 5-ի, 7-ի:

Ինչպես հայտնի է, տրամաբանությունը յուրաքանչյուր ապացուցման մեջ առանձնացնում է նրա հետևյալ երեք բաղկացուցիչ մասերը՝ դրույթ (պնդում, որը պետք է ապացուցվի), հիմքեր, արգումենտներ (պնդումներ, որոնց ճշմարտությունը ստուգված, ընդունված է նախկինում), դատողություն (փաստարկում, ցուցադրում): Սրան համապատասխան բուն երկրաչափական ապացուցման գաղափարիհետ սերտորեն կապված են նրա հետևյալ երեք բաղադրիչները՝

Ա)երկրաչափական պնդում (թեորեմ կամ խնդիր),որը պետք է ապացուցվի

Բ)բովանդակային բաղադրիչ(նախկինում ստուգված կամ ապացուցված, ընդունված պնդումներ՝ թեորեմներ, աքսիոմներ, սահմանումներ)

Գ)տրամաբանական բաղադրիչ (դրույթի ապացուցման մեթոդ, եղանակ):

Դպրոցական դասընթացին բնորոշ մաթեմատիկական պնդումների կառուցվածքի և նրանց ապացուցումների վերլուծությունը թույլ տվեց պարզել, որ նրանցից յուրաքանչյուրին հատուկ ապացուցողական ունակությունները համախմբվում են երեք խմբերում՝ բովանդակային, կառուցվածքային և տրամաբանական, որոնք լիովին համապատասխանում են ինչպես տրամաբանության դասընթացից հայտնի ապացուցման երեք բաղկացուցիչ մասերին, այնպես էլ կոնկրետ երկրաչափական ապացուցման մեր կողմից ընդունված երեք բաղադրիչներին:

Բովանդակային խմբում ամփոփվում են գիտելիքների և ունակությունների այն տարրերը, որոնք կապված են ինչպես ապացուցվող պնդման, այնպես էլ դասընթացի բովանդակության հետ:

Կառուցվածքային խմբում ընդգրկվում են գիտելիքների և ունակությունների այն տարրերը, որոնք կապված են պնդման տրամաբանական կառուցվածքի (ձևի) հետ տարվող որոշակի աշխատանքին; Տրամաբանական խումբը ,բաղկացած է այն տարրերից, որոնք կապված են արտածման տրամաբանական կանոնների հետ:

Պարզվում է, որ այս տարրերի մեջ կան այնպիսիք, որոնք բնորոշ են տրված մեթոդով կատարվող ցանկացած ապացուցմանը /մենք դրանց կանվանենք ինվարիանտ տարրեր/, ինչպես նաև այնպիսիք, որոնք բնորոշ են առանձին ապացուցումներին և փոփոխվում են ապացուցումից ապացուցում, թեորեմից թեորեմ /վերջինիս կանվանենք ոչ ինվարիանտ կամ սեփական տարրեր/:

Ինվարիանտ տարրերի օրինակներ են հանդիսանում «պնդման պահանջի և եզրակացության առանձնացման ունակությունները» բովանդակային խմբի բոլոր տարրերը, փաստի տակ տանելու ունակությունները»,«իմպլիկացիայի կանոնից օգտվելու ունակությունը» և այլն:

Սեփական տարրերի օրինակներ են «պնդման բարդ կառուցվածքից ավելի պարզ պնդումներ (ենթապնդումներ) ստանալու ունակությունները» այդ նպատակով կիրառվող շատ տրամաբանական կանոններից և նույնաբանություններից բացահայտ ձևով (առանց ուսուցչի օգնության) օգտվելու ունակությունները և այլն:

Եվ այսպես, յուրաքանչյուր մեթոդ բաղկացած է ապացուցողական տարրերի որոշակի եռախումբ ամբողջությունից, որոնք իրենց հերթին տրոհվում են ինվարիանտ և սեփական տարրերի: Հասկանալի է, որ բոլոր սովորողների համար պարտադիր ունակությունները պետք է նախ և առաջ փնտրել հենց ինվարիանտ տարրերի մեջ:

Սակայն ոչ բոլոր ինվարիանտ ունակությունները պետք է մտնեն պարտադիր տարրերի ցուցակի մեջ: Ինվարիանտ տարրերի ամբողջությունից բոլոր սովորողների համար պարտադիր տարրերի ընտրությունը կատարվում է վերոհիշյալ (2-4) պարամետրերի հիման վրա:

Դրանով ապահովվում է ապացուցողական ունակությունների այն տարրերի ընտրությունը, որոնց առկայությունը յուրաքանչյուր աշակերտին հնարավորություն կտա կատարելու ինքնուրույն, ոչ բարդ այնպիսի ապացուցումներ, որոնք ներդրված են սովորողների մաթեմատիկական պատրաստականության վերաբերյալ ծրագրային պահանջներում և շարունակելու մաթեմատիկական կրթությունը:

ԵԶՐԱԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆ

Ապացուցումը և նրա եղանակները մշտապես եղել են գրեթե բոլոր տրամաբանների, բազմաթիվ մաթեմատիկոսների և մեթոդիստների ուշադրության կենտրոնում, որովհետև այդ տրամաբանական գործողությունը իսկայական պրակտիկ նշանակություն ունի շրջակա աշխարհի ճանաչման գործընթացում:

Ապացուցման մեթմեթոդների ուսուցման արդյունքները պլանավորելիս անհրաժեշտ է քննարկել սովորողների կողմից համադրման մեթոդի, հակասության, բացառության և լրիվ ինդուկցիայի կառույցների յուրացման, ինչպես նաև կառուցապատկման մեթոդի հերքման հակաօրինակի մեթոդի էությունը հասկանալու հարցերը:

Այսպիսով՝ կատարած վերլուծությունները թույլ են տալիս եզրակացնել, որ ապացուցման գործընթացում, բացի համադրման մեթոդից, ապացուցման մնացած մեթոդներից և ոչ մեկը «մաքուր» վիճակում, միայնակ չի գործում, այլ դրանք կիրառվում են որոշակի հավաքածուներով՝ միակցություններով: Ընդ որում՝ յուրաքանչյուրը ապացուցում կարելի է առանձնացնել ապացուցման առաջատար մեթոդ և նշել օժանդակ մեթոդները:

Օգտագործված գրականության ցանկ

1. Ա.Տ.Մկրտչյան *«Մաթեմատիկան դպրոցում»* գիտամեթոդական ամսագիր թիվ 3, Երևան 2013թ.
2. Հ.Ս.Միքայելյան *«Ատենախոսություն»* Երևան 2015թ.
3. Է.Ի.Այվազյան *«Հանրահաշիվ հանրակրթական դպրոցի 9-10-րդ դասարանների լուծումների ուղեցույց»* Երևան 2001թ. Էդիթ Պրինտ
4. Օ.Ս.Միքայելյան *«Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդ և միացություններ»* Երևան 2008, Էդիթ Պրինտ
5. Ս.Է. Հակոբյան *«Երկրաչափության ուսուցչի ձեռնարկ 7,8,9»* Երևան 2011, Զանգակ-97,