

Մաթեմատիկայի ծագումը և նրա դերը իմացության մեջ

Բնության մասին գիտությունը գիտական է այնքանով, որքանով նրանում հնարավոր է կիրառել մաթեմատիկան:

Կանտ

Չնայած այն բանին, որ զգայարաններից ստացված տեղեկությունը վերլուծվում է, ենթարկվում փորձնական ստուգման, և թեև այժմ մենք ունենք հեռադիտակի, մանրադիտակի տիպի հզոր սարքեր, որոնք հնարավորություն են տալիս կատարել զանազան դիտարկումներ, ինչպես նաև ունենք ճշգրիտ չափող սարքեր, այնուամենայնիվ նրանց միջոցով ստացված տեղեկությունները չափազանց սահմանափակ են և դրանք կարելի է հավաստի համարել միայն որոշակի սահմաններում: Այժմ մեզ շատ ավելի է հայտնի մոլորակների թվի, նրանց արբանյակների, արևի վրայի սև բծերի մասին, քան առաջ: Սակայն մեր իմացության մեջ եղած առաջընթացը միայն մի չնչին մասն է իմանալու համար ցանկալի բազմաբնույթ և կարևոր երևույթների անսահմանափակ և անսպառ բազմությունը:

Վճռորոշ, իրենց մասշտաբների մեջ հսկայական և նշանակությամբ՝ անանց քայլ կատարվեց արտաքին աշխարհի մեր իմացության ընդլայնման և բազմապատկման մեջ, երբ նրա ուսումնասիրության համար սկսեցին կիրառել մաթեմատիկան: Մաթեմատիկան ոչ միայն ճշգրտեց և ընդլայնեց մեր զգայարաններին հասանելի երևույթների մասին մեր գիտելիքները, այլև թույլ տվեց հայտնաբերել նոր երևույթներ, որոնք չէին ընկալվում մեր զգայարանների կողմից, և այդ պատճառով իհարկե իրենց ազդեցությամբ պակաս իրական չէին, քան շիկացած սալաքարը: Այն, որ մեր առօրյա կյանքում անտեսանելիորեն ներկա են նման ֆիզիկական <<ոգիներ>>, կասկած չի հարուցում: Մեր պետությունն այն մասին է, թե ինչպես են դրանք հայտնագործվել:

Դեռևս Հին Եգիպտոսի և Բաբելոնի քաղաքակրթությունները, որոնք մենք համարում ենք արևմտաեվրոպական մաթեմատիկայի հայրեր, մեր թվարկությունից մոտավորապես 3000 տարի առաջ իրենց առօրյա կարիքներից ծագած պրակտիկ խնդիրները լուծելու համար ստեղծեցին օգտակար, բայց իրար հետ չկապակցված կանոնների և բանաձևերի համախումբ: Բաբելոնացիները և եգիպտացիները չէին գիտակցում, որ մաթեմատիկան կարող է բնության իմացությունը տարածել զգայարաններին հասանելի սահմաններից դուրս: Նրանց հայտնաբերած մաթեմատիկան կարելի է համեմատել ալքիմիայի հետ, որը նախորդել է քիմիային:

Մաթեմատիկան, որպես տրամաբանական արտածում և բնության ճանաչողության միջոց, հին հույների ստեղծագործությունն է, որով նրանք ակտիվորեն զբաղվեցին մեր թվարկությունից մոտ 6 դար առաջ: 6-5-րդ դարերի ոչ մի

փաստաթուղթ չի պահպանվել, որ կարող էր մեզ պատմել, թե ի՞նչը ստիպեց հույներին գնալ մաթեմատիկայի և նրա դերի ընկալման նոր ճանապարհով: Դրա փոխարեն մենք ունենք պատմաբանների շատ թե քիչ հավաստի ենթադրությունները, որոնց մի մասը, օրինակ, գտնում է, որ հին հույները գտան հակասություններ շրջանի մակերեսը որոշելու հարցում բաբելոնացիների ստացված արդյունքներում և որոշեցին բացահայտել, թե եղած արդյունքներից ո՞րն է հավաստի: Նման անհամաձայնություններ առաջացան այլ հարցերում նույնպես: Եվս մեկ բացատրությամբ պատմաբանները փաստում են հույների փիլիսոփայական հետաքրքրությունները, բայց դրանք միայն ենթադրություններ են, որոնք ավելի շատ բարձրացնում են հարցը, քան այն լուծում: Ինչ-որ մեկը գտնում է, որ դեդուկտիվ մաթեմատիկան իր արմատներով գնում է դեպի արիստոտելյան տրամաբանություն, որն էլ առաջացել է հասարակական-քաղաքական հարցերի շուրջ քննարկումների ընթացքում: Սակայն հին հունական մաթեմատիկան ծագել է Արիստոտելից առաջ:

Փոքր Ասիայում գտնվող հունական Միլեթ քաղաքից Թալեսը (մոտ 640-546 մ.թ.ա.) ապացուցել է էվկլիդեսյան երկրաչափության մի քանի թեորեմներ: Այդ ժամանակների որևէ փաստաթուղթ չի պահպանվել, և պնդումն այն մասին, որ Թալես Միլեթացին իր թեորեմներն ապացուցել է տրամաբանության միջոցներով, շատ վիճելի է: Բայց կասկած չի հարուցում այն, որ նա և Փոքր Ասիայում ապրող նրա ժամանակակիցները մտածում էին այն պլանի մասին, որ ընկած է աշխարհի կառույցի հիմքում:

Ավելի ստույգ. հայտնի է, որ բնության հիմքում ընկած բանական պլանի հայտնաբերման ծրագիրը, որ մշակված էր պյութագորականների կողմից (այլաբանական-կրոնական միաբանություն, որ գոյություն է ունեցել մ.թ.ա. 6-րդ դարում), ենթադրում էր մաթեմատիկայի օգտագործում: Պյութագորականներին զարմացնում էր, որ ֆիզիկապես իրարից այնքան տարբեր առարկաներ օժտված են միևնույն մաթեմատիկական հատկությամբ: Օրինակ, Լուսինը և ռեզինից պատրաստված գնդակը ունեն նույն ձևը և շատ այլ ընդհանուր հատկություններ, որոնցով օժտված են բոլոր գնդերը: Մի թե ակնհայտ չէ, որ հենց մաթեմատիկական հարաբերություններն էլ, որ թաքնված են արտաքին բազմությունների ետևում, պետք է կազմեն երևույթների էությունը:

Եթե խոսենք ավելի կոնկրետ, ապա պյութագորականները իրերի և երևույթների էությունը տեսնում էին թվերի և թվային առնչությունների մեջ: Թիվը նրանց համար բնությունը նկարագրելու համար տրված առաջին սկզբունքն էր, և այն համարվում էր նաև աշխարհի նյութը և ձևը: Համաձայն ավանդույթի՝ պյութագորականները գտնում էին, որ <<բոլոր իրերը թվեր են>>: Թվի նկատմամբ նրանց հավատը ավելի հասկանալի կդառնա, եթե նկատի ունենանք, որ պյութագորականները թիվը ներկայացնում էին շատ դիտողական կետերի

բազմության տեսքով և կետերը տեղավորում էին իրական առարկա ներկայացնող պատկերի տեսքով:

Պյութագորականներին է պատկանում երաժշտական ինտերվալները թվերի միջև պարզ հարաբերությունների տեսքով ներկայացնելու գաղափարը: Նրանք հանգեցին այդ մտքին՝ կատարելով երկու հայտնագործություն: Առաջինը, որ տատանվող ձայնալարից եկող ձայնի բարձրությունը կախված է նրա երկարությունից, և երկրորդը՝ ներդաշնակ համահնչունություն են արձակում այն ձայնալարերը, որոնց երկարությունները իրար հարաբերվում են ինչպես ամբողջ թվերը: Օրինակ, ներդաշնակ համահնչունություն է ստացվում, եթե ստիպենք տատանվել միևնույն կերպ ձգված երկու ձայնալարեր, որոնցից մեկը երկու անգամ երկար է մյուսից: Նման ձայնալարերի արձակած ձայներանգների միջև երաժշտական ինտերվալն այժմ կոչվում է օկտավա: Այլ ներդաշնակ համահնչունություն են ստեղծում երկու ձայնալարեր, որոնց երկարությունները իրար հարաբերվում են, ինչպես երեքը երկուսին: Այդ դեպքում ավելի կարճ ձայնալարի արձակած ձայներանգը մեկ կվիստայով բարձր է ավելի երկար ձայնալարի արձակած ձայներանգից: Ներդաշնակ համահնչունություն ծնող ցանկացած երկու ձայնալարերի երկարությունները, իրոք, իրար հարաբերվում են ինչպես ամբողջ թվերը:

Մուրակների շարժումը նույնպես պյութագորականները հանգեցնում էին թվային հարաբերության: Նրանց պատկերացմամբ՝ տարածության մեջ շարժվող մարմիններն արձակում են ձայներ, ընդ որում, ավելի արագ շարժվող մարմինները արձակում են ավելի բարձր ձայներ, քան ավելի դանդաղ շարժվող մարմինները: Հնարավոր է, որ նման գաղափարներ ներշնչել են ծայրում ծանր առարկա կապված երկար պարանի պտտումից արձակված սուլոցանման ձայները: Համաձայն պյութագորյան աստղագիտության՝ ինչքան մեծ է մուրակից Երկիր եղած հեռավորությունը, այնքան ավելի արագ է շարժվում մուրակը: Հետևաբար՝ մուրակների արձակած ձայները փոփոխվում են Երկրից ունեցած նրանց հեռավորության համապատասխան, և բոլոր ձայները ենթարկվում են որոշակի ներդաշնակության: Ինչպես և յուրաքանչյուր ներդաշնակություն, այդ «զնդերի երաժշտությունը» նույնպես կարելի է հանգեցնել զուտ թվային հարաբերության: Բայց այդ դեպքում մուրակների շարժումները նույնպես կարելի է հանգեցնել թվային հարաբերության:

Բնության այլ հատկանշական առանձնահատկություններ պյութագորականները նույնպես հանգեցնում էին թվին: Առանձնապես բարձր էին նրանք գնահատում 1,2,3,4 թվերը, որոնք կազմում են թեթրակտիս՝ քառյակ: Ըստ ավանդության՝ պյութագորականների երդումն ասում էր. «Երդվում եմ Թեթրակտիսի անունով, որ ի վերուստ տրված է մեր հոգիներին: Նրանում են հավերժ ծաղկող բնության արմատներն ու ակունքները»»: Ըստ պյութագորականների՝ բնությունը կազմված է քառյակներով՝ երկրաչափական չորս տարրերից՝ կետ, գիծ,

մակերևույթ և մարմին, և չորսառարկայական տարրերից՝ հող, օդ, կրակ և ջուր, որոնք խաղացել են կարևոր դեր Պլատոնի փիլիսոփայության մեջ: Թեթրակտիսի մեջ մտնող չորս թվերը գումարելով՝ ստացվում է 10 թիվը: Այդ պատճառով 10 թիվը պյութագորականները հայտարարեցին որպես իդեալական թիվ և նրա մեջ տեսան ամբողջ աշխարհի խորհրդանիշը: Եվ քանի որ 10 թիվը իդեալական է, ապա պետք է լինեն 10 երկնային մարմիններ: Որպեսզի ստանան երկնային մարմինների այս թիվը, պյութագորականները հորինեցին Կենտրոնական կրակը, որի շուրջ պտտվում են Երկիրը, Արևը, Լուսինը և այն ժամանակ հայտնի 5 մոլորակները, ինչպես նաև՝ Հակաերկիրը, որն ընկած է Կենտրոնական կրակի մյուս կողմում: Ո՛չ Կենտրոնական կրակը, ո՛չ էլ Հակաերկիրը չեն երևում, քանի որ մենք ապրում ենք Երկրի այն մասում, որը պտտվում է դրանց հակառակ կողմում: Այս ձևով պյութագորականները կառուցեցին իրենց աստղաբաշխական տեսությունը, որը հենված էր թվերի հարաբերությունների վրա:

Առաջին հույնը, որին մենք պարտական ենք բնության մաթեմատիկական ուսումնասիրության մեջ էական առաջընթացի համար, Պլատոնն էր (427-347 մ.թ.ա.): Նա ոչ միայն ընդունեց պյութագորականների որոշ տեսություններ, այլև, լինելով հրաշալի փիլիսոփա, իր գաղափարներով կանխորոշեց այդ շրջանում մտքի զարգացումը Հունաստանում: Պլատոնն Աթենքում հիմնեց Ակադեմիան, որը դարձավ մտածողների ձգողության կենտրոն և գործեց ինը դար: Պլատոնն ընդունում է, որ իրական աշխարհը կառուցված է մաթեմատիկական սկզբունքներով, այն, ինչ ընկալում են մեր զգայարանները, ավելին չէ, քան իրական աշխարհի ոչ կատարյալ պատկերացումը: Ֆիզիկական աշխարհի իրական և բանական լինելը կարելի է հաստատել միայն մաթեմատիկայի միջոցով, քանի որ. <<Աստված հավերժ երկրաչափականացնում է>>:

Պլատոնն ավելի առաջ գնաց, քան պյութագորականներն էին: Նա աշխատում էր ոչ միայն ճանաչել բնությունը, այլ դուրս էր գալիս նրա սահմաններից, որպեսզի կառուցեր մաթեմատիկական սկզբունքների վրա հիմնված գաղափարական աշխարհը, որը և ըստ Պլատոնի, իսկական իրականությունն է: Այն բանից հետո, երբ նախնական դիտարկումները կատարված են, բնությունը պետք է ամբողջությամբ փոխարինվեր մաթեմատիկայով: Պլատոնը պյութագորականներին քննադատում էր նրա համար, որ նրանք, ուսումնասիրելով երաժշտական ներդաշնակությունների հիմքում ընկած թվերը, այդպես էլ չհասան հենց թվերի բնական ներդաշնակության ուսումնասիրությանը: Պլատոնի համար մաթեմատիկան ոչ միայն գաղափարների և զգայական փորձի միջև միջնորդ էր, այլ իրականության էության ճշգրիտ արտացոլումը: Պլատոնը նաև դրեց դեդուկտիվ-աքսիոմատիկ մեթոդի հիմքերը: Այդ մեթոդի մեջ Պլատոնը տեսնում էր արդեն հավաքած գիտելիքի դասակարգման և նոր գիտելիքի ստացման իդեալական միջոց:

Երբ Ալեքսանդր Մակեդոնացին (մ.թ.ա. 356-323թթ.) պատրաստվում էր նվաճել աշխարհը, նա հունական Օիքումենի կենտրոնը Աթենքից տեղափոխեց Եգիպտոսի քաղաքներից մեկը, որը, իրեն հատուկ համեստությունից ելնելով, անվանեց Ալեքսանդրիա, որտեղ էլ Էվկլիդեսը (մ.թ.ա. մոտ 300 թիվ) գրեց մաթեմատիկայի առաջին հիշարժան փաստաթուղթը՝ իր դասական «Սկզբունքներ» աշխատությունը, որում առաջին անգամ կիրառվում է ապացուցումը: Ալեքսանդրիան շրջանի հույները մ.թ.ա.300թ.-մ.թ.600թ. անսպասելիորեն ընդարձակեցին մաթեմատիկան: Հիշատակենք միայն Ապոլոնին, Արքիմեդին, Դիոֆանտին: Նրանց աշխատություններում, ինչպես նաև Էվկլիդեսի «Սկզբունքներում», շարադրվում են իրական աշխարհի առարկաների, երևույթների և հարաբերությունների իդեալական տարբերակները: Դրանք բոլորն իրենց բաժինն ունեն մեր գիտելիքների ընդարձակման մեջ:

Հունական քաղաքակրթությունը կործանվեց հռոմեական և, այնուհետև, մուսուլմանական զավթիչների ճնշման տակ: Նրա անկմամբ Եվրոպան մտավ Միջնադարյան շրջան, որը տևեց մի ամբողջ հազարամյակ՝ 500-1500թթ: Միջնադարյան շրջանում գլխավոր դերը խաղում էր եկեղեցին, որը երկրային կյանքը դիտում էր որպես անդրշիրիմյան կյանքի համար նախապատրաստական փուլ: Բնության ուսումնասիրությունը ցանկացած միջոցներով՝ լինեն դրանք մաթեմատիկական, թե ոչ մաթեմատիկական, համարվում էին դատապարտելի: Այնուամենայնիվ, առանձին մտածողներ փորձեցին շարունակել մաթեմատիկական և ֆիզիկական ուսումնասիրությունները: Նրանք մաթեմատիկայի մեջ տեսնում էին ֆիզիկական երևույթների իրականությանը չհակասող նկարագրություն, կարևորում էին բնության փորձարարական հետազոտության անհրաժեշտությունը: Բոլոր այդ մտածողները գտնում էին, որ իրական ֆիզիկական աշխարհն իր հիմքերում բանական է և մաթեմատիկական մտածողությունը ունակ է նրա մասին գիտելիք տալու: Անհրաժեշտ է չմոռանալ նաև այն ծառայությունը, որ մաթեմատիկայի մեջ Միջնադարում կատարեցին հնդիկները և արաբները:

Ժամանակակից շրջանի սկիզբը ընդունված է համարել 15-րդ դարի վերջը և 16-րդ դարի սկիզբը: 16-րդ դարն ընդունված է անվանել Վերածննդի՝ հունական մտքի վերածննդի դարաշրջան: Մեզ համար, իհարկե, կարևոր չէ, թե ինչպես հունական ձեռագրերը հայտնվեցին Իտալիայում, որը և դարձավ Վերածննդի կենտրոնը: Այս շրջանում եվրոպացի մտածողները ավելի շատ ուսումնասիրում էին հույն հեղինակների աշխատությունները, քան հետևում նրանց բարձր նպատակներին:

16-18-րդ դարերի մաթեմատիկոսները վստահ էին, որ բնության բոլոր երևույթների հիմքում ընկած են մաթեմատիկական օրենքները և համառորեն աշխատում էին գտնել դրանք, որովհետև ելնում էին նրանից, որ Աստված այդ օրենքները նույնպես դրել է աշխարհակառույցի հիմքում: Բնության յուրաքանչյուր օրենքի հայտնագործումը ընկալվում էր ոչ թե որպես հետազոտողի

խորաթափանցության, այլ Աստծո իմաստության ևս մեկ ապացույց: Մաթեմատիկոսների և բնախույզների այս համոզմունքները տարածվեցին Վերածննդի դարաշրջանի ողջ Եվրոպայում: Դրանից ոչ շատ առաջ հայտնաբերված հունական հեղինակների աշխատությունները հակադրվում էին խորապես քրիստոնեական աշխարհին, և Վերածննդի հոգևոր առաջնորդները, որ ծնվել էին մի աշխարհում, բայց ձգտում էին մի այլ աշխարհ, կարողացան միաձուլել այդ երկու աշխարհները:

Ինչպիսի՞ք են մաթեմատիկական մեթոդի էական առանձնահատկությունները: Առաջին տարբերվող առանձնահատկությունն է հիմնական հատկությունների ներմուծումը: Նման հասկացություններից մի քանիսը, օրինակ՝ կետը, գիծը, ամբողջ թիվը, թելադրվել են առարկայական կամ ֆիզիկական աշխարհի կողմից: Տարրական հասկացությունների հետ միասին մաթեմատիկայում ոչ պակաս կարևոր դեր են խաղում նաև այն հասկացությունները, որոնք ստեղծվել են մարդկային բանականությամբ: Նման հասկացությունների օրինակ կարող են ծառայել բացասական թվերը, թվային դասերի տառային նշանակումները, կոմպլեքս թվերը, ֆունկցիաները, ամենատարբեր կորեր, անվերջ շարքերը, մաթեմատիկական անալիզի հասկացությունները, դիֆերենցիալ հավասարումները, մատրիցները և խմբերը, բազմաչափ տարածությունները: Թվարկված հասկացություններից մի քանիսը ամբողջապես զուրկ են զգայական հիմքերից: Ուրիշները՝ օրինակ ածանցյալը, ունեն որոշ զգայական հիմքեր ֆիզիկական երևույթների մեջ: Բայց չնայած ածանցյալը կապված է արագության ֆիզիկական երևույթի հետ, այն ավելի շատ կարելի է դիտարկել որպես բանականությամբ ստեղծված կառույց, ընդ որում որակապես շատ ավելի բարձր մակարդակում, քան, ասենք, եռանկյունը:

Մաթեմատիկայի հաջորդ էական առանձնահատկությունը նրա վերացականությունն է: «Պետություն» աշխատության մեջ երկրաչափների մասին Պլատոնը ասում է.

«Բայց, չէ՞ որ, երբ նրանք օգտվում են նաև գծագրերից և դրանից հետևություններ են անում, նրանց միտքը ուղղված է ոչ թե գծագրին, այլ այն պատկերներին, որոնք նման են այդ գծագրին: Իրենց հետևությունները նրանք անում են ընդհանրապես քառանկյան և նրա անկյունագծերի մասին, այլ ոչ թե միայն այն քառանկյան, որը գծագրել են: Այդպես է և մնացած բաներում: Նույնը վերաբերում է քանդակագործությանը և նկարչությանը. նրանցից կարող է ստվեր ընկնել, հնարավոր է նրանց արտացոլքը ջրի մեջ, բայց նրանք ծառայում են միայն որպես այն բանի պատկերավոր արտահայտություններ, ինչը կարելի է տեսնել ոչ այլ կերպ, քան մտովի:»

Եթե մաթեմատիկական ուզում է հզոր լինել, ապա մեկ վերացական հասկացության մեջ նա պարտավոր է ընդգրկել այդ հասկացության բոլոր ֆիզիկական դրսևորումների էական հատկանիշները: Օրինակ, ուղղի մաթեմատիկական հասկացությունը իր մեջ պետք է ներառի ամուր ձգված պարանի, քանոնի եզրի, դաշտի եզրագծի, լուսային ճառագայթների հետագծերի առավել կարևոր առանձնահատկությունները:

Մաթեմատիկայի ևս մեկ առանձնահատկություն իդեալականացումն է: Մաթեմատիկոսը իդեալականացնում է, երբ դիտավորյալ նկատի չի առնում կավճի գծի լայնությունը ուղիղները դիտարկելիս, կամ երկիրը դիտում է որպես գունդ որոշ խնդիրներ լուծելիս: Ինքնին իդեալականացումը իրականությունից լուրջ շեղում չէ, բայց իրականության համար նրա յուրաքանչյուր կիրառման դեպքում հարց է առաջանում, թե ինչքանով է մոտիկ ուսումնասիրվող առարկան այդ իդեալական կերպարին:

Մաթեմատիկայի ամենազարմանալի առանձնահատկությունը նրանում գործածվող կշռադաստիությունների մեթոդն է: Նրա հիմքը կազմում է արքիոմների համախումբը և դրանց նկատմամբ արտաձման կիրառումը: «Արքիոմ» բառը առաջացել է հունական «պատշան ձևով մտածել» արտահայտությունից: Արքիոմ հասկացությունը մտցվել է հույների կողմից որպես ակնհայտ ճշմարտություն, որը ոչ մեկի մոտ կասկած չի հարուցում: Պատռոնը գտնում էր, որ մարդիկ սարիորի նախապես օժտված են ճշմարիտի իմացությամբ, որին հասնում են ճշմարիտի առարկայական աշխարհում՝ իրենք հոգու միջոցով, և երկրաչափության արքիոմները որոշ հայտնի ճշմարտությունների մասին հիշողություններ են:

Արիստոտելը հիշատակում է «ընդհանուր դրույթների» մասին, որոնցից սկսվում են սպացուցումները: Եթե սպացուցման մեջ օգտագործվեին այնպիսի փաստեր, որոնք մեզ հայտնի չէին որպես ճշմարտություններ, սպա անհրաժեշտ կլիներ լրացուցիչ սպացուցում, որը կհաստատեր այդ փաստերը, և այսպես շարունակ: Արիստոտելը գտնում է նաև, որ որոշ հասկացություններ պետք է լինեն չսահմանվող, քանի որ հակառակ դեպքում սպացուցումը սկիզբ չէր ունենա: Մեր օրերում կետի, ուղղի հասկացությունները այդպիսիք են: Դրանց նշանակությունը և հատկությունները կախված են այն արքիոմներից, որոնք դրանց վերագրում են հատկություններ: Մաթեմատիկական հասկացությունների մասին արքիոմները ստեղծված են այնպես, որ այդ հասկացությունները բացահայտեն իրականության այս կամ այն կողմերը:

Ամփոփելով՝ կարելի է նշել, որ մաթեմատիկական կառուցում է իրական երևույթների մոդելներ: Հասկացությունները, արքիոմները, ընդհանրացումները և վերացարկումները, ինչպես նաև ինտուիցիան կիրառվում են մոդելի կառուցման ժամանակ: Ապացուցումը ցեմենտավորում է մոդելի տարրերը մեկ ամբողջության մեջ: Առավել հայտնի մոդելը Էվկլիդյան երկրաչափությունն է: Սակայն կան ավելի պարզ մոդելներ, որոնք պատմում են ավելի շատ՝ ավելի քիչ հայտնի երևույթների մասին, քան Էվկլիդյան երկրաչափությունը:

Մաթեմատիկան ոչ միայն թույլ է տալիս հատուցելու մեր զգայարանների թերությունները, այլ ավելի շատ հանդես է գալիս որպես մեր շրջապատի մասին գիտելիքների ընդլայնման մեթոդ: Ի տարբերություն զգայական ընկալումի՝ մաթեմատիկայի էությունը կայանում է նրանում, որ հենվելով մարդկային բանականության վրա և օգտվելով նրանից, որ մարդը կարող է դատողություններ անել, այն կարող է ծնել իրական աշխարհի մասին գիտելիքներ, որոնք միջին մարդուն, որը եթե անգամ դաստիարակված է արևմտյան բանական մշակույթով, թվում է ստացված բացառապես զգայական ընկալմամբ:

Եվ ինչպես մի անգամ նկատել է 20-րդ դարի նշանավոր մաթեմատիկոսներից մեկը՝ Դավիթ Հիլբերթը, ֆիզիկան մեր օրերում չափազանց կարևոր է, որպեսզի այն թողնվի ֆիզիկոսներին: