

# Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր 10-րդ դասարան, խորացված ծրագիր

## Թեմա 1. Իրական թվեր

### § 1. Բնական, ամբողջ և ռացիոնալ թվեր

Գևորգյան Գ.Գ., Սահակյան Ա.Ա., 2009, էջ 3:

<https://fliphtml5.com/fumf/ijfc>

Առաջադրանքներ 1-4:

### § 2. Ռացիոնալ թվերի գրառումը տասնորդական կոտորակներով

Գևորգյան Գ.Գ., Սահակյան Ա.Ա., 2009, էջ 7:

<https://fliphtml5.com/fumf/ijfc>

Առաջադրանքներ 8-20:

Լրացուցիչ նյութեր

1. Գրեք տասնորդական կոտորակի տեսքով.

$$\text{ա) } \frac{2}{3}, \quad \text{բ) } -\frac{3}{4}, \quad \text{գ) } 8\frac{3}{7}, \quad \text{դ) } -\frac{13}{99} :$$

2. Հաշվեք և արդյունքը գրեք տասնորդական կոտորակի տեսքով.

$$\text{ա) } \frac{2}{11} + \frac{1}{9}, \quad \text{բ) } \frac{8}{13} - \frac{2}{3}, \quad \text{գ) } \frac{1}{3} + 1,25, \quad \text{դ) } \frac{7}{9} \cdot 1,7, \quad \text{ե) } \frac{7}{36} \cdot 9 + 8 \cdot \frac{11}{32} + \frac{9}{10} \cdot \frac{5}{18} :$$

### §3. Իրական թվեր

Գևորգյան Գ.Գ., Սահակյան Ա.Ա., 2009, էջ 12:

<https://fliphtml5.com/fumf/ijfc>

Առաջադրանքներ 24-27, 29-33, 35-40:

Լրացուցիչ նյութեր

1. Տրված տասնորդական կոտորակներից որո՞նք են իռացիոնալ թվեր.

ա) 26,7;           բ) 6,24(3);

գ) 1, 313313331...(n-րդ մեկից հետո գտնվում են n քանակով 3-ներ);

դ) 7, 24681012... (ստորակետից հետո հերթականությամբ գրված են բոլոր զույգ թվերը):

2. 5,4 և 5,5 կամ 5,5 և 5,6 զույգերից ո՞րն է  $\sqrt{31}$ -ի տասնորդական մոտարկումը պակասորդով և հավելուրդով:

3.  $|x|=x$  կամ  $|x|=-x$  հավասարություններից ո՞րն է ճիշտ, եթե

ա)  $x=5-\sqrt{7}$ ,       բ)  $x=4-3\sqrt{3}$ ,       գ)  $x=5-\sqrt{10}$

#### § 4. Թվաբանական գործողություններ իրական թվերով

Գևորգյան Գ.Գ., Սահակյան Ա.Ա., 2009, Էջ 19:

<https://fliphtml5.com/fumf/ijfc>

Առաջադրանքներ 45-56, 60-64:

1. Ռացիոնալ, թե՞ իռացիոնալ թիվ է արտահայտության արժեքը.

ա)  $(2\sqrt{2}-5)\cdot(5+2\sqrt{2})$ ,       բ)  $(\sqrt{50}+4\sqrt{2})\cdot\sqrt{2}$ ,       գ)  $(\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{3}+1)^2$

2. Հաշվեք.

ա)  $\sqrt{63}\cdot\sqrt{28}$ ,       բ)  $\sqrt{20}\cdot\sqrt{5}$ ,       գ)  $\sqrt{50}:\sqrt{8}$ ,       դ)  $\sqrt{12}:\sqrt{27}$ :

#### § 5. Իրական թվի n-րդ աստիճանի արմատ

Գևորգյան Գ.Գ., Սահակյան Ա.Ա., 2009, Էջ 23:

<https://fliphtml5.com/fumf/ijfc>

Առաջադրանքներ 67-79:

Լրացուցիչ նյութեր

1. Պարզեցրեք.

$$1) (-\sqrt[4]{11})^4,$$

$$2) (\sqrt[3]{7})^3,$$

$$3) (3\sqrt[5]{-3})^5,$$

$$4) \sqrt[7]{-3^7},$$

$$5) 7\sqrt[8]{(-3)^8},$$

$$6) \sqrt[6]{64^2} :$$

2. Գտեք արտահայտության արժեքը.

$$1) \sqrt[3]{27},$$

$$2) \sqrt[5]{-32},$$

$$3) \sqrt[4]{81},$$

$$4) \sqrt[3]{64},$$

$$5) \sqrt[3]{-\frac{27}{8}},$$

$$6) \sqrt[4]{\frac{81}{256}},$$

$$7) \sqrt[5]{\frac{1}{32}},$$

$$8) \sqrt[5]{-\frac{243}{1024}} \cdot \sqrt[3]{-4\frac{17}{27}},$$

$$9) \sqrt[6]{\frac{64}{100000000}} \cdot \sqrt[4]{39\frac{1}{16}} : \sqrt[3]{-3\frac{19}{27}} :$$

3. Գտեք արտահայտության արժեքը.

$$1) \sqrt[4]{16 \cdot 625},$$

$$2) \sqrt[3]{8 \cdot 343},$$

$$3) \sqrt[5]{32 \cdot 243},$$

4)  $\sqrt[5]{0,00001 \cdot 32}$ ,

5)  $\sqrt[3]{24 \cdot 9}$ ,

6)  $\sqrt[4]{48 \cdot 27}$ ,

7)  $\sqrt[5]{160 \cdot 625}$ ,

8)  $\sqrt[3]{75 \cdot 45}$ ,

9)  $\sqrt[5]{27} \cdot \sqrt[5]{9}$ ,

10)  $\sqrt[7]{16} \cdot \sqrt[7]{-8}$  :

4. Գտեք արտահայտության արժեքը.

1)  $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[6]{9}$ ,

2)  $\sqrt[3]{-25} \cdot \sqrt[6]{25}$ ,

3)  $\frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{3}}$ ,

4)  $\frac{\sqrt[3]{243}}{\sqrt[3]{-9}}$ ,

5)  $\frac{\sqrt[4]{128}}{\sqrt[4]{8}}$ ,

6)  $\frac{\sqrt[3]{-625}}{\sqrt[3]{-5}}$ ,

7)  $\sqrt[4]{3 \frac{3}{8} \cdot 1 \frac{1}{2}} + \frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{80}}$

8)  $\sqrt[5]{1 \frac{11}{16}} \cdot 4,5 - \frac{\sqrt[5]{9}}{\sqrt[5]{288}}$  :

5. Արտադրիչը դուրս բերեք արմատանշանից ( $a > 0$ ,  $b > 0$ ).

1)  $\sqrt{4a}$ ,

2)  $\sqrt{18b}$ ,

3)  $\sqrt[3]{64c}$ ,

4)  $\sqrt[5]{a^6}$ ,

- 5)  $\sqrt[4]{32b^5}$ ,
- 6)  $\sqrt[6]{64a^8b^{11}}$ ,
- 7)  $\sqrt[5]{-128a^7}$ ,
- 8)  $\sqrt[4]{6a^{12}b^2c^4}$  :

6. Ազատվեք հայտարարի իռացիոնալությունից.

- 1)  $\frac{5}{\sqrt{3}}$ ,
- 2)  $\frac{2}{\sqrt[3]{4}}$ ,
- 3)  $\frac{7}{\sqrt[3]{49}}$ ,
- 4)  $\frac{15}{\sqrt[3]{25}}$ ,
- 5)  $\frac{3}{\sqrt[4]{12}}$ ,
- 6)  $\frac{10}{\sqrt[5]{8}}$ ,
- 7)  $\frac{20}{\sqrt[4]{40}}$ ,
- 8)  $\frac{6}{\sqrt[5]{27 \cdot 25}}$  :

7. Պարզեցրեք.

- 1)  $\sqrt[3]{\sqrt[5]{7}}$ ,
- 2)  $\sqrt[3]{a^4 \sqrt{a}}$ ,
- 3)  $\sqrt[5]{a^2 \sqrt[4]{a}}$ ,
- 4)  $\sqrt[18]{36^3}$ ,
- 5)  $\sqrt[12]{25^3}$ ,

6)  $\sqrt[8]{16^5 b^4}$  :

8. Ո՞ր դեպքում է ճիշտ հավասարությունը.

1)  $\sqrt{a^2} = |a|$ ,

2)  $\sqrt{a^2} = -a$ ,

3)  $\sqrt[4]{a^4} = a$ ,

4)  $\sqrt[4]{a^4} = |a|$ ,

5)  $\sqrt[3]{a^3} = a$ ,

6)  $\sqrt[3]{a^3} = -a$ ,

7)  $\sqrt[5]{a^5} = a$  :

9. Պարզեցրեք.

1)  $\sqrt{a^2}$ , եթե  $a > 0$ ,

2)  $\sqrt[4]{a^2}$ , եթե  $a < 0$ ,

3)  $\sqrt[6]{a^6}$ , եթե  $a \geq 0$ ,

4)  $\sqrt[5]{a^5}$ ,

5)  $\sqrt[6]{a^6}$ , եթե  $a \leq 0$ ,

6)  $\sqrt[3]{a^3} - \sqrt{a^2}$ , եթե  $a \leq 0$ ,

7)  $\sqrt[5]{a^5} - \sqrt[4]{a^4}$ , եթե  $a > 0$ ,

8)  $\sqrt[4]{a^4}$  :

10. Ազատվեք հայտարարի իռացիոնալությունից.

1)  $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$ ,

2)  $\frac{3}{\sqrt{7} - \sqrt{5}}$ ,

- 3)  $\frac{a-\sqrt{2}}{a+\sqrt{2}}$ ,
- 4)  $\frac{b-\sqrt{7}}{2b-\sqrt{5}}$ ,
- 5)  $\frac{1}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}}$ ,
- 6)  $\frac{2}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{7}}$ :

### § 6. Իրական թվի ռացիոնալ ցուցիչով աստիճան

Գևորգյան Գ.Գ., Սահակյան Ա.Ա., 2009, Էջ 28:

<https://fliphtml5.com/fumf/ijfc>

Առաջադրանքներ 82-87:

Լրացուցիչ նյութեր

1. Ներկայացրեք արմատանշանով.

- 1)  $7^{\frac{4}{7}}$ ,
- 2)  $4^{1,25}$ ,
- 3)  $3 \cdot 2^{-\frac{3}{5}}$ ,
- 4)  $2 \cdot 8^{\frac{11}{11}}$ ,
- 5)  $a^{\frac{3}{8}}$ ,
- 6)  $2b^{-\frac{2}{3}}$ ,
- 7)  $b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{2}{7}}$ ,
- 8)  $a^{\frac{3}{4}} : b^{\frac{2}{5}}$ :

2. Ներկայացրեք ռացիոնալ ցուցիչով աստիճանի տեսքով.

- 1)  $\sqrt{11}$ ,
- 2)  $\sqrt[3]{5^5}$ ,
- 3)  $\sqrt[7]{5^{17}}$ ,

- 4)  $\sqrt[9]{a^{21}}$ ,
- 5)  $\sqrt[3]{5^2}$ ,
- 6)  $\sqrt[3]{7^{-11}}$ ,
- 7)  $\sqrt[5]{2^{-15}}$ ,
- 8)  $\sqrt[13]{b^{-7}}$ ,
- 9)  $2\sqrt{8a}$ ,
- 10)  $3\sqrt[5]{3^4 c^2}$ ,
- 11)  $\frac{1}{8}\sqrt[7]{2^5 ax^3}$ ,
- 12)  $\frac{1}{9}\sqrt[11]{(3^5):(b^5 c)}$ ,
- 13)  $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt{a^3}$ ,
- 14)  $\sqrt[7]{a^3} \cdot \sqrt[4]{a}$ ,
- 15)  $\sqrt[3]{a^2} \sqrt[4]{a}$ ,
- 16)  $\sqrt[5]{a^3} \sqrt[7]{a^4}$  :

### 3. Գտեք արտահայտության արժեքը.

- 1)  $\left(1\frac{11}{25}\right)^{-0,5} \cdot \left(4\frac{17}{27}\right)^{\frac{1}{3}}$ ,
- 2)  $\sqrt[7]{\frac{1}{9}} : 243^{\frac{1}{7}} \cdot (7\sqrt{7})^{\frac{2}{3}}$ ,
- 3)  $8^{\frac{1}{3}} \cdot 81^{0,25}$ ,
- 4)  $8^{\frac{1}{2}} : \left(8^{\frac{2}{6}} \cdot 9^{\frac{3}{2}}\right)$ ,
- 5)  $(100\ 000)^{0,3} \cdot (0,000\ 001)^{\frac{1}{3}}$ ,
- 6)  $\left(\frac{64^4}{3^8}\right)^{-\frac{1}{8}}$ ,



$$7) \left( \frac{27^3}{125^6} \right)^{\frac{2}{9}},$$

$$8) 16^{\frac{5}{4}},$$

$$9) \left( \sqrt{5^3} \right) \cdot \sqrt[3]{25^{0.75}} : \left( 5^{\sqrt[8]{5^5}} \right),$$

$$10) \sqrt[3]{36} \cdot 2^{\frac{4}{3}} : 3^{\frac{1}{6}},$$

$$11) \sqrt[3]{100} \cdot \left( \sqrt{2} \right)^{\frac{8}{3}} \cdot \left( \frac{1}{5} \right)^{\frac{7}{6}},$$

$$12) 243^{0.4}:$$

4. Իմաստ ունի՞ արտահայտությունը.

$$1) 3^{\frac{19}{43}},$$

$$2) \left( \frac{1}{2} \right)^{-\frac{5}{3}},$$

$$3) 0^{\frac{3}{14}},$$

$$4) 0^{\frac{3}{14}},$$

$$5) (-3)^6,$$

$$6) (-4)^{-\frac{1}{4}},$$

$$7) (-4)^{\frac{1}{3}}:$$

5. a-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում է ճիշտ հավասարությունը.

$$1) \left( a^{\frac{1}{3}} \right)^3 = a,$$

$$2) \left( a^3 \right)^{\frac{1}{3}} = a,$$

$$3) \left( a^{\frac{1}{3}} \right)^3 = -a,$$

$$4) (a^4)^{\frac{1}{4}} = -a,$$

$$5) (a^{0,7})^{\frac{10}{7}} = a,$$

$$6) (a^8)^{-\frac{1}{8}} = \frac{1}{|a|}:$$

### 6. Պարզեցրեք.

$$1) 3 + 3^{\frac{1}{2}},$$

$$2) 4 - 4^{\frac{1}{3}},$$

$$3) a - a^{\frac{1}{2}},$$

$$4) (ax)^{\frac{1}{3}} + (ay)^{\frac{1}{3}}, \text{ երբ } a \geq 0, x \geq 0, y \geq 0:$$

$$5) (3x)^{\frac{1}{2}} - (5x)^{\frac{1}{2}},$$

$$6) c^{\frac{1}{2}} + c^{\frac{1}{4}},$$

$$7) a + a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}},$$

$$8) x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}} + 1:$$

### 7. Պարզեցրեք.

$$1) \frac{a^{\frac{1}{2}} - 4}{a - 16},$$

$$2) \frac{a+b}{a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}}},$$

$$3) \frac{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}},$$

$$4) \frac{a-b}{a^{0,5} + b^{0,5}},$$

$$5) \frac{a^{1,2} - b^{2,1}}{a^{0,8} + a^{0,4}b^{0,7} + b^{1,4}},$$

$$6) \frac{a-8}{a^{\frac{2}{3}} + 2a^{\frac{1}{3}} + 4},$$

$$7) \left(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}\right)^2 - (4xy)^{\frac{1}{2}},$$

$$8) \frac{(\sqrt{x}-1)(x^2-\sqrt{x})^{-1}}{\sqrt{x}(x+\sqrt{x}+x\sqrt{x})^{-1}},$$

$$9) \frac{a-1}{a^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\sqrt{a} + \sqrt[4]{a}}{\sqrt{a} + 1} \cdot a^{\frac{1}{4}} + 1,$$

$$10) \frac{2x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}} - 3x^{-\frac{1}{3}}} - \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{5}{3}} - x^{\frac{2}{3}}} - \frac{x+1}{x^2 - 4x + 3} :$$

## § 7. Իրական թվի իռացիոնալ ցուցիչով աստիճան

Գևորգյան Գ.Գ., Սահակյան Ա.Ա., 2009, Էջ 31:

<https://fliphtml5.com/fumf/ijfc>

Առաջադրանքներ 90-97:

Լրացուցիչ նյութեր

1. Հաշվեք.

ա)  $2^{\sqrt{5}} \cdot 2^{-\sqrt{5}};$

բ)  $3^{2\sqrt{2}} : 9^{\sqrt{2}};$

գ)  $(5^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}};$

դ)  $\left((0,5)^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{8}}$

ե)  $2^{2-3\sqrt{5}} \cdot 8^{\sqrt{5}};$

զ)  $3^{1+2\sqrt{2}} : 9^{\sqrt{2}};$

է)  $(5^{1+\sqrt{2}})^{1-\sqrt{2}} - (\sqrt{5})^0;$

ը)  $\frac{10^{2+\sqrt{7}}}{2^{2+\sqrt{7}} \cdot 5^{1+\sqrt{7}}};$

թ)  $(25^{1+\sqrt{2}} - 5^{2\sqrt{2}}) \cdot 5^{-1-2\sqrt{2}};$

2. Պարզեցրեք արտահայտությունը.

$$\text{ա) } \frac{m^{\sqrt{3}} \cdot n^{\sqrt{3}}}{(mn)^{2+\sqrt{3}}}; \quad \text{բ) } \frac{x^{\sqrt{7}} \cdot y^{\sqrt{7}+1}}{(xy)^{\sqrt{7}}}; \quad \text{գ) } (a^{\sqrt{2}} - b^{\sqrt{2}})(a^{\sqrt{2}} + b^{\sqrt{2}}):$$

3. Համեմատեք թվերը.

$$\text{ա) } 3^{\sqrt{20}} \text{ և } 3^{\sqrt{22}}; \quad \text{բ) } 7^{-\sqrt{3}} \text{ և } 7^{-\sqrt{5}}; \quad \text{գ) } \left(\frac{1}{3}\right)^{1,4} \text{ և } \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}:$$

4. Համեմատեք տրված թվերը և 1-ը.

$$\text{ա) } 2^{-\sqrt{5}}; \quad \text{բ) } \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}; \quad \text{գ) } \left(\frac{\pi}{4}\right)^{\sqrt{5}-2}; \quad \text{դ) } \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{8}-3}:$$

## **Թեմա 2. Էռանկյունաչափության տարրերը**

### **§ 8. Ռադիան: Դրական և բացասական ուղղությամբ պտույտներ**

Գևորգյան Գ.Գ., Սահակյան Ա.Ա., 2009, Էջ 35:

<https://fliphtml5.com/fumf/ijfc>

Առաջադրանքներ 101-118:

Լրացուցիչ նյութեր

1. Վերածեք ռադիանի.

- 1)  $30^\circ$ ,      2)  $120^\circ$ ,      3)  $135^\circ$ ,      4)  $225^\circ$ ,  
5)  $210^\circ$ ,      6)  $36^\circ$ ,      7)  $240^\circ$ ,      8)  $100^\circ$ :

2. Վերածեք աստիճանի.

- 1)  $\frac{\pi}{2}$ ,      2)  $\frac{\pi}{3}$ ,      3)  $\frac{\pi}{4}$ ,      4)  $\frac{\pi}{6}$ ,  
5)  $\frac{3\pi}{4}$ ,      6)  $\frac{2\pi}{3}$ ,      7)  $\frac{3\pi}{2}$ ,      8)  $\frac{5\pi}{4}$ :

### **§ 9. Թվային արգումենտի էռանկյունաչափական ֆունկցիաները**

Գևորգյան Գ.Գ., Սահակյան Ա.Ա., 2009, Էջ 40:

<https://fliphtml5.com/fumf/ijfc>

Առաջադրանքներ 123-131,133-136:

Լրացուցիչ նյութեր

1. Հաշվեք.

- 1)  $2 \cos 60^\circ + \sqrt{3} \cos 60^\circ$ ,  
2)  $2 \sin 30^\circ + 6 \cos 60^\circ - 4 \operatorname{tg} 45^\circ$ ,

- 3)  $2\operatorname{ctg}90^\circ - 3\cos 270^\circ + 5\sin 0^\circ$ ,
- 4)  $\operatorname{tg}360^\circ - \frac{3}{4}\sin 270^\circ - \frac{1}{4}\cos 180^\circ$ ,
- 5)  $\operatorname{tg}^2 30^\circ + 2\sin 60^\circ - \operatorname{tg}45^\circ + \cos^2 30^\circ$ ,
- 6)  $\operatorname{ctg}^2 45^\circ + \cos 60^\circ - \sin^2 60^\circ + \frac{3}{4}\operatorname{ctg}^2 60^\circ$ :

Ինտերակտիվ մոդելներ.

[https://mathnet.am/interact\\_1/sin\\_cos\\_1000.html](https://mathnet.am/interact_1/sin_cos_1000.html)

### § 10. Եռանկյունաչափական ֆունկցիաների նշանները՝ ըստ քառորդների

Գևորգյան Գ.Գ., Սահակյան Ա.Ա., 2009, Էջ 46:

<https://fliphtml5.com/fumf/ijfc>

Առաջադրանքներ 139-144, 146-153:

Լրացուցիչ նյութեր

1. Պարզեք արտահայտության նշանը.

- 1)  $\sin 177^\circ$ ,      2)  $\operatorname{tg} 145^\circ$ ,      3)  $\cos 410^\circ$ ,      4)  $\sin(-75^\circ)$ ,
- 5)  $\cos 280^\circ$ ,      6)  $\cos 500^\circ$ ,      7)  $\cos(-116^\circ)$ ,      8)  $\operatorname{ctg} 305^\circ$ :

2. Պարզեք արտահայտության նշանը.

- 1)  $\sin \frac{5\pi}{4}$ ,      2)  $\cos \frac{2\pi}{3}$ ,      3)  $\sin \frac{7\pi}{4}$ ,      4)  $\sin \frac{11\pi}{6}$ ,
- 5)  $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{4}$ ,      6)  $\operatorname{ctg} \frac{5\pi}{7}$ ,      7)  $\operatorname{tg}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$ ,      8)  $\cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$ :

### § 11. Հիմնական եռանկյունաչափական նույնություններ

Գևորգյան Գ.Գ., Սահակյան Ա.Ա., 2009, Էջ 51:

<https://fliphtml5.com/fumf/ijfc>

Առաջադրանքներ 156-174:

Լրացուցիչ նյութեր

1. Գտեք արտահայտության արժեքը նշված պայմանների դեպքում.

1)  $\sin \alpha$ ;  $\cos \alpha = -0,6$ ,  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ,

2)  $\sin \alpha$ ;  $\cos \alpha = -0,6$ ,  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ,

3)  $\sin \alpha$ ;  $\cos \alpha = \frac{8}{17}$ ,  $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ ,

4)  $\cos \alpha$ ;  $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$ ,  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ ,

5)  $\operatorname{ctg} \alpha$ ;  $\cos \alpha = \frac{20}{29}$ ,  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ,

6)  $\cos \alpha$ ;  $\operatorname{tg} \alpha = 3$ ,  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ ,

7)  $\sin \alpha$ ;  $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{2}{5}$ ,  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ,

8)  $\operatorname{tg} \alpha$ ;  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ ,  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ :

2. Գտեք արտահայտության արժեքը նշված պայմանների դեպքում.

1)  $3 \sin \lambda$ ;  $\operatorname{ctg} \lambda = 2\sqrt{2}$ ,  $\pi < \lambda < \frac{3}{2}\pi$ ,

2)  $4 \sin \lambda$ ;  $\operatorname{ctg} \lambda = \sqrt{15}$ ,  $3\pi < \lambda < \frac{7}{2}\pi$ ,

3)  $3 \cos \lambda$ ;  $\operatorname{ctg} \lambda = 2\sqrt{2}$ ,  $\pi < \lambda < \frac{3}{2}\pi$ ,

4)  $3 \cos \lambda$ ;  $\operatorname{ctg} \lambda = -2\sqrt{2}$ ,  $\frac{3}{2}\pi < \lambda < 2\pi$ ,

5)  $7 \cos \lambda$ ;  $\operatorname{tg} \lambda = -4\sqrt{3}$ ,  $\frac{\pi}{2} < \lambda < \pi$ ,

6)  $\sqrt{5} \sin \lambda$ ;  $\operatorname{tg} \lambda = -2$ ,  $\frac{\pi}{2} < \lambda < \pi$ :

### 3. Պարզեցրեք.

- 1)  $1 - \sin^2 \alpha$ ,
- 2)  $\cos^2 \alpha - 1$ ;
- 3)  $(1 - \cos \alpha) \cdot (1 + \cos \alpha)$ ,
- 4)  $(1 - \sin \alpha) \cdot (1 + \sin \alpha)$ ,
- 5)  $1 + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$ ,
- 6)  $\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1$ ,
- 7)  $\sin \alpha - \sin \alpha \cos^2 \alpha$ ,
- 8)  $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$ ,
- 9)  $\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha$ ,
- 10)  $\cos^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha \cos^2 \alpha$ ,
- 11)  $\operatorname{tg}^2 \alpha (2 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - 1)$ :

### §12. Բերման բանաձևեր

Գևորգյան Գ.Գ., Սահակյան Ա.Ա., 2009, էջ 56:

<https://fliphtml5.com/fumf/ijfc>

Առաջադրանքներ 178-193:

Լրացուցիչ նյութեր

1. Գտեք արտահայտության արժեքը նշված պայմանների դեպքում.

- 1)  $4 \cos\left(\frac{7}{2}\pi + \lambda\right)$ ;  $\cos \lambda = \frac{\sqrt{7}}{4}$ ,  $\frac{3}{2}\pi < \lambda < 2\pi$ ,
- 2)  $6 \cos\left(\frac{3}{2}\pi - \lambda\right)$ ;  $\cos \lambda = \frac{\sqrt{39}}{8}$ ,  $\frac{3}{2}\pi < \lambda < 2\pi$ ,
- 3)  $8 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \lambda\right)$ ;  $\cos \lambda = \frac{\sqrt{17}}{9}$ ,  $\frac{3}{2}\pi < \lambda < 2\pi$ ,



- 4)  $\frac{15}{\sqrt{21}} \cos\left(\frac{5\pi}{2} + \lambda\right); \cos \lambda = \frac{2}{5}, \frac{3}{2}\pi < \lambda < 2\pi,$
- 5)  $\frac{28}{\sqrt{33}} \cos\left(\frac{3}{2}\pi + \lambda\right); \cos \lambda = -\frac{4}{7}, \frac{\pi}{2} < \lambda < \pi,$
- 6)  $\frac{20}{3} \cos\left(\frac{9\pi}{2} + \lambda\right); \cos \lambda = \frac{4}{5}, \frac{3}{2}\pi < \lambda < 2\pi,$
- 7)  $\frac{15}{\sqrt{2}} \cos(\pi + \lambda); \sin \lambda = -\frac{1}{3}, \pi < \lambda < \frac{3}{2}\pi,$
- 8)  $16 \cos(3\pi + \lambda); \sin \lambda = -\frac{\sqrt{15}}{8}, \pi < \lambda < \frac{3}{2}\pi,$
- 9)  $15 \cos(2\pi - \lambda); \sin \lambda = \frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{\pi}{2} < \lambda < \pi,$
- 10)  $\frac{6}{\sqrt{2}} \cos(7\pi - \lambda); \sin \lambda = \frac{1}{3}, \frac{\pi}{2} < \lambda < \pi,$
- 11)  $7 \cos(5\pi - \lambda); \sin \lambda = \frac{\sqrt{13}}{7}, 0 < \lambda < \frac{\pi}{2},$
- 12)  $\frac{5\sqrt{6}}{3} \cos(\pi - \lambda); \sin \lambda = -\frac{1}{5}, 3\pi < \lambda < \frac{7}{2}\pi:$

### § 13. Երկու անկյունների գումարի և տարբերության

#### եռանկյունաչափական ֆունկցիաների բանաձևերը

Գևորգյան Գ.Գ., Սահակյան Ա.Ա., 2009, էջ 63:

<https://fliphtml5.com/fumf/ijfc>

Առաջադրանքներ 198-214:

Լրացուցիչ նյութեր

#### 1. Պարզեցրեք.

- 1)  $\cos 107^{\circ} \cos 17^{\circ} + \sin 107^{\circ} \sin 17^{\circ},$
- 2)  $\cos 36^{\circ} \cos 24^{\circ} - \sin 36^{\circ} \sin 24^{\circ},$
- 3)  $\sin 63^{\circ} \cos 27^{\circ} + \cos 63^{\circ} \sin 27^{\circ},$
- 4)  $\sin 51^{\circ} \cos 21^{\circ} - \cos 51^{\circ} \sin 21^{\circ},$

$$5) \cos 18^{\circ} \cos 63^{\circ} + \sin 18^{\circ} \sin 63^{\circ},$$

$$6) \cos 311^{\circ} \cos 19^{\circ} - \sin 311^{\circ} \sin 19^{\circ},$$

$$7) \sin 14^{\circ} \cos 254^{\circ} - \sin 254^{\circ} \sin 14^{\circ},$$

$$8) \frac{\operatorname{tg} 22^{\circ} + \operatorname{tg} 23^{\circ}}{1 - \operatorname{tg} 22^{\circ} \cdot \operatorname{tg} 23^{\circ}},$$

$$9) \frac{\operatorname{tg} \frac{2\pi}{3} - \operatorname{tg} \frac{5\pi}{12}}{1 + \operatorname{tg} \frac{2\pi}{3} \cdot \operatorname{tg} \frac{5\pi}{12}},$$

$$10) \frac{\operatorname{tg} 1^{\circ} + \operatorname{tg} 224^{\circ}}{1 + \operatorname{tg} 1^{\circ} \cdot \operatorname{tg} 136^{\circ}},$$

$$11) \frac{\operatorname{tg} 260^{\circ} - \operatorname{tg} 35^{\circ}}{1 - \operatorname{tg} 80^{\circ} \cdot \operatorname{tg} 145^{\circ}}:$$

#### § 14. Կրկնակի անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիաների բանաձևերը

Գևորգյան Գ.Գ., Սահակյան Ա.Ա., 2009, էջ 69:

<https://fliphtml5.com/fumf/ijfc>

Առաջադրանքներ 217-238:

Լրացուցիչ նյութեր

##### 1. Պարզեցրեք.

$$1) \cos 2\alpha + \sin^2 \alpha,$$

$$2) \frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha},$$

$$3) \frac{\sin \varphi}{2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}},$$

$$4) \frac{\sin 4\varphi}{2 \cos 2\varphi},$$

$$5) \frac{\sin 40^{\circ}}{\sin 20^{\circ}},$$

$$6) \frac{\sin 100^{\circ}}{2 \cos 50^{\circ}},$$

$$7) \frac{\cos 80^{\circ}}{\cos 40^{\circ} + \sin 40^{\circ}},$$

$$8) \frac{\cos 36^{\circ} + \sin^2 18^{\circ}}{\cos 18^{\circ}},$$

$$9) \frac{2 \operatorname{tg} 15^{\circ}}{1 - \operatorname{tg}^2 15^{\circ}},$$

$$10) \frac{2 \operatorname{tg} 75^{\circ}}{1 - \operatorname{tg}^2 75^{\circ}},$$

$$11) \frac{2 \operatorname{tg} 240^{\circ}}{1 - \operatorname{tg}^2 240^{\circ}}:$$

2. Գտեք  $\sin 2\alpha$ -ն և  $\cos 2\alpha$ -ն.

$$1) \sin \alpha = \frac{5}{13}, \quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi,$$

$$2) \cos \alpha = -0.6, \quad \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2},$$

$$3) \operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}, \quad \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2},$$

$$4) \operatorname{ctg} \alpha = -\frac{2}{5}, \quad \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi,$$

$$5) \sin \alpha = -\frac{\sqrt{6}}{4}, \quad \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2},$$

$$6) \cos \alpha = -\frac{2}{3}, \quad 5\pi < \alpha < \frac{11\pi}{2},$$

$$7) \cos \alpha = -\frac{2}{5}, \quad \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2},$$

$$8) \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \frac{7\pi}{2} < \alpha < 4\pi:$$

### § 15. Կես անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիաների բանաձևերը

Գևորգյան Գ.Գ., Սահակյան Ա.Ա., 2009, Էջ 73:

<https://fliphtml5.com/fumf/ijfc>

Առաջադրանքներ 243-246, 248-251:

## Լրացուցիչ նյութեր

1. Գտեք արտահայտության արժեքը նշված պայմանների դեպքում.

1)  $8\sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2}$  ;  $\sin \alpha = \frac{-5\sqrt{7}}{16}$  ,  $3\pi < \alpha < \frac{7}{2}\pi$  ,

2)  $3\sqrt{15} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$  ;  $\sin \alpha = \frac{-\sqrt{15}}{8}$  ,  $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$  ,

3)  $(3 + \sqrt{8}) \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$  ;  $\sin \alpha = \frac{1}{3}$  ,  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$  ,

4)  $\sqrt{10} \cos \frac{\alpha}{2}$  ;  $\sin \alpha = \frac{-\sqrt{24}}{5}$  ,  $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$  ,

5)  $2\sqrt{5} \cos \frac{\alpha}{2}$  ;  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{3}{4}$  ,  $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$  ,

6)  $2\sqrt{\frac{2}{3}} \cos \frac{\alpha}{2}$  ;  $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{15}$  ,  $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$  ,

7)  $\sqrt{38} \sin \frac{\alpha}{2}$  ;  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4\sqrt{22}}{3}$  ,  $2\pi < \alpha < \frac{5}{2}\pi$  ,

8)  $3\sqrt{7} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$  ;  $\cos 2\alpha = \frac{1}{8}$  ,  $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$  :

## § 16. Եռանկյունաչափական ֆունկցիաների արտադրյալի և գումարի բանաձևերը

Գևորգյան Գ.Գ., Սահակյան Ա.Ա., 2009, Էջ 76:

<https://fliphtml5.com/fumf/ijfc>

Առաջադրանքներ 256-263, 265-271:

## Լրացուցիչ նյութեր

1. Ձևափոխեք արտադրյալի.

1)  $\sin 40^{\circ} + \sin 16^{\circ}$  ,

2)  $\sin 20^{\circ} - \sin 40^{\circ}$  ,

3)  $\cos 46^{\circ} - \cos 74^{\circ}$  ,

4)  $\cos 15^{\circ} + \cos 45^{\circ}$  ,

5)  $\sin 12^{\circ} + \sin 20^{\circ}$  ,

6)  $\cos 53^0 + \cos 17^0$ ,

7)  $\cos 26^0 - \cos 124^0$ ,

8)  $\sin \frac{2\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{5}$

9)  $\cos \frac{11\pi}{12} + \cos \frac{3\pi}{4}$

10)  $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) + \cos \alpha$

11)  $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)$

12)  $\sin \alpha - \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$ :

**§ 17. Եռանկյունաչափական արտահայտությունների նույնական  
ձևափոխություններ**

Գևորգյան Գ.Գ., Սահակյան Ա.Ա., 2009, Էջ 80:

<https://fliphtml5.com/fumf/ijfc>

Առաջադրանքներ 275-280, 282, 284-285, 287-291:

### Թեմա 3. Թվային ֆունկցիա

#### § 18. Թվային ֆունկցիա

Գևորգյան Գ.Գ., Սահակյան Ա.Ա., 2009, Էջ 86:

<https://fliphtml5.com/fumf/ijfc>

Առաջադրանքներ 293-307:

Լրացուցիչ նյութեր

1. Գտեք հետևյալ բանաձևով տրված ֆունկցիայի որոշման տիրույթը.

$$1) y = 4x - 8, \quad 2) y = \frac{2x}{5-x}, \quad 3) y = \frac{1}{x^2+1},$$
$$4) y = x^2 - 5x + 1, \quad 5) y = \frac{3}{(x-4)(x+1)}, \quad 6) y = \sqrt{x-5} :$$

2. Բերեք մի այնպիսի ֆունկցիայի օրինակ, որի որոշման տիրույթը լինի.

ա) բոլոր թվերի բազմությունը,

բ) բոլոր թվերի բազմությունը, բացի 7-ից:

3. Ո՞րն է հետևյալ բանաձևով տրված ֆունկցիայի որոշման տիրույթը.

$$1) y = x^2 + 2x, \quad 2) y = \frac{x-1}{1+x}, \quad 3) y = \sqrt{9+x} :$$

4. Ֆունկցիան տրված է  $f(x) = 2x^2 - x + 2$  բանաձևով: Պատկանո՞ւմ են արդյոք հետևյալ թվերը այդ ֆունկցիայի արժեքների տիրույթին.

$$1) 5, \quad 2) -6, \quad 3) 10, \quad 4) -3, \quad 5) 0, \quad 6) 45:$$

Ինտերակտիվ մոդելներ.

[https://mathnet.am/interact/e\\_f.html](https://mathnet.am/interact/e_f.html)

#### § 19. Ֆունկցիայի գրաֆիկ

Գևորգյան Գ.Գ., Սահակյան Ա.Ա., 2009, Էջ 92:

<https://fliphtml5.com/fumf/ijfc>

Առաջադրանքներ 310-320:

## Լրացուցիչ նյութեր

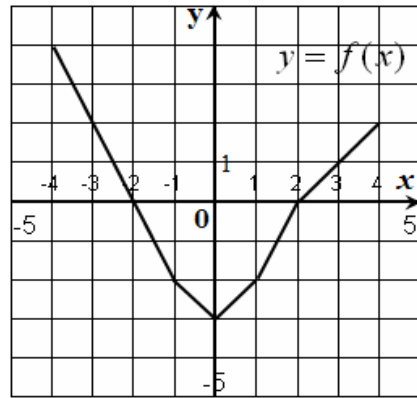
1. Նկար 1-ում պատկերված է  $y = f(x)$  ֆունկցիայի գրաֆիկը, որի որոշման տիրույթը  $[-4; 4]$  միջակայքն է: Գրաֆիկի միջոցով գտեք.

ա)  $f(-4)$ ,  $f(-3)$ ,  $f(0)$ ,  $f(4)$  արժեքները,

բ)  $x$ -ի այն արժեքները, որոնց դեպքում  $f(x) = -2$ ,  $f(x) = 0$ ,  $f(x) = 2$ ,

գ) ֆունկցիայի արժեքների տիրույթը,

դ) նշանապահականության միջակայքերը:



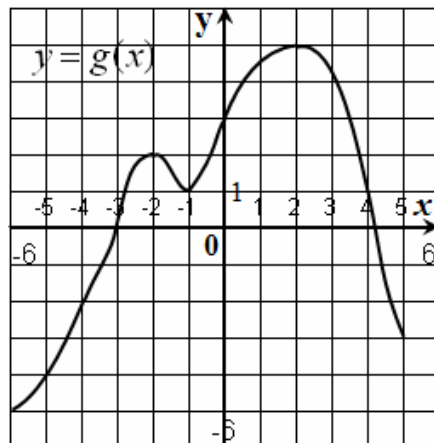
Նկ. 1

2. Նկար 2-ում պատկերված է  $y = g(x)$  ֆունկցիայի գրաֆիկը, որի որոշման տիրույթը  $[-6; 5]$  միջակայքն է: Գրաֆիկի միջոցով գտեք.

ա)  $g(-5)$ ,  $g(-2)$ ,  $g(0)$ ,  $g(2)$ ,  $g(5)$  արժեքները,

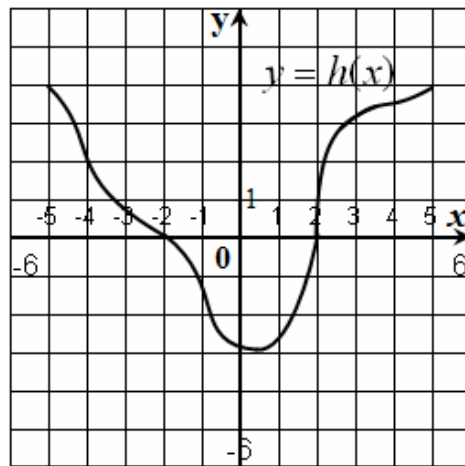
բ)  $x$ -ի այն արժեքները, որոնց դեպքում  $g(x) = -4$ ,  $g(x) = -5$ ,  $g(x) = 5$ ,

գ) ֆունկցիայի արժեքների տիրույթը:



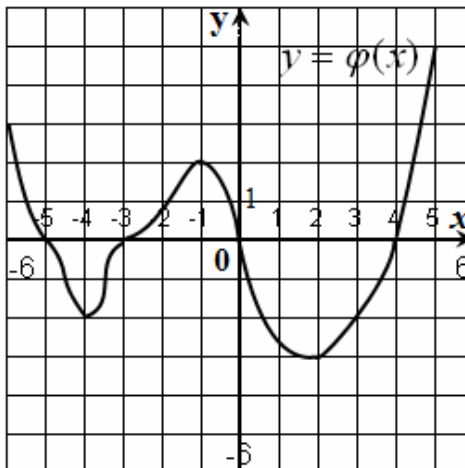
Նկ. 2

3. Նկար 3-ում պատկերված է  $[-5; 5]$  միջակայքում որոշված  $y = h(x)$  ֆունկցիայի գրաֆիկը: Գտեք նրա զրոները և նշանապահականության միջակայքերը:



Նկ. 3

4. Նկար 4-ում պատկերված է  $[-6; 5]$  միջակայքում որոշված  $y = \phi(x)$  ֆունկցիայի գրաֆիկը: Գտեք նրա զրոները, նշանապահականության միջակայքերը և արժեքների բազմությունը:



Նկ. 4

5. Գծեք մի այնպիսի ֆունկցիայի գրաֆիկ, որի զրոները լինեն հետևյալ թվերը.  
 ա)  $-3$  և  $3$ ,    բ)  $-4; 0$ ; և  $2$ ,    գ)  $-3; 2; 1$  և  $5$ :
6. Գծեք  $[-10; 10]$  որոշման տիրույթ ունեցող մի այնպիսի ֆունկցիայի գրաֆիկ, որի զրոները լինեն  $-2; 1$  և  $3$  թվերը, որը դրական արժեքներ ընդունի  $[-10; -2)$  և  $(3; 10]$  միջակայքերում և բացասական արժեքներ՝  $(-2; 1)$  և  $(1; 3)$  միջակայքերում:



7. Գտեք ֆունկցիայի գրոները (եթե գոյություն ունեն).

ա)  $y = -0,8x + 12$ ,

գ)  $y = \frac{4 + 2x}{x^2 + 5}$ ,

բ)  $y = (3x - 10)(x + 6)$ ,

դ)  $y = \frac{6}{(x - 1)(x + 8)}$ :

Ինտերակտիվ մոդելներ

[https://mathnet.am/element\\_func/elem\\_func.html](https://mathnet.am/element_func/elem_func.html)

## §20. Գործողություններ ֆունկցիաների հետ

Գևորգյան Գ.Գ., Սահակյան Ա.Ա., 2009, էջ 97:

<https://fliphtml5.com/fumf/ijfc>

Առաջադրանքներ 324- 327:

Լրացուցիչ առաջադրանքներ

1. Գտեք  $f(x)$  և  $g(x)$  ֆունկցիաների գումար, տարբերություն կամ արտադրյալ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը եթե.

ա)  $D(f) = [-3; 2]$ ,  $D(g) = [0; 7]$ ,

բ)  $D(f) = (-1; 5]$ ,  $D(g) = (4; 6)$ ,

գ)  $D(f) = [3; 8]$ ,  $D(g) = (-2; 3]$ :

2.  $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ : Գտեք  $D(F)$ -ը, եթե.

ա)  $D(f) = [-4; 5]$ ,  $D(g) = [-3; 7]$ , իսկ  $g(x) = 0$  միայն, երբ  $x = 1$ ,

բ)  $D(f) = [-2; 2]$ ,  $D(g) = [2; 4]$ , իսկ  $g(x) = 0$ , երբ  $x = 2$ :

3.  $f(x) = 3x - 1$ ,  $g(x) = 2x^2 - 3x + 5$ ,  $h(x) = \frac{2}{x}$ ,  $\phi(x) = |x|$  ֆունկցիաների համար գրեք  $F(x)$  ֆունկցիայի բանաձևը և գտեք որոշման տիրույթը, եթե.

ա)  $F(x) = f(f(x))$ ,    դ)  $F(x) = h(f(x))$ ,    է)  $F(x) = \phi(g(x))$ ,

բ)  $F(x) = h(g(x))$ ,      ե)  $F(x) = g(h(x))$ ,      ը)  $F(x) = g(\phi(x))$ ,

զ)  $F(x) = h(h(x))$ ,      գ)  $F(x) = f(g(x))$ ,      թ)  $F(x) = f(h(x))$ :

4. Տրված ֆունկցիան ներկայացրեք երկու ֆունկցիաների համադրույթի տեսքով.

ա)  $y = \frac{4}{x+2}$ ,      գ)  $y = 2x^3 - 7$ ,      ե)  $y = (x+3)^3$ ,

բ)  $y = (x-1)^2 - 2$ ,      զ)  $y = |7x+2|$ ,      զ)  $y = 5|x| - 4$ :

### § 21. Ֆունկցիայի գրաֆիկի ձևափոխություններ

Գևորգյան Գ.Գ., Սահակյան Ա.Ա., 2009, էջ 100:

<https://fliphtml5.com/fumf/ijfc>

Առաջադրանքներ 331-344:

Լրացուցիչ նյութեր

1. Ձևափոխելով  $y = x^2$  ֆունկցիայի գրաֆիկը՝ կառուցե՛ք հետևյալ ֆունկցիաների գրաֆիկները.

ա)  $y = |2x^2 - x + 3|$ ,      գ)  $y = |x^2 - 6x - 7|$ ,      ե)  $y = x^2 - 5|x| + 6$ ,

բ)  $y = x^2 + 4|x| + 12$ ,      զ)  $y = |2x - x^2 + 8|$ ,      զ)  $y = -x^2 + 7|x| - 10$ :

2. Ձևափոխելով  $y = |x|$  ֆունկցիայի գրաֆիկը՝ կառուցե՛ք հետևյալ ֆունկցիաների գրաֆիկները.

ա)  $y = -|x|$ ,      գ)  $y = -3|x|$ ,      ե)  $y = |x - 3|$ ,      է)  $y = |7x - 3| + 2$ ,

բ)  $y = 2|x|$ ,      զ)  $y = |8 - 4x|$ ,      զ)  $y = |3x + 1|$ ,      ը)  $y = ||x + 2| - 4|$ :

3. Ձևափոխելով  $y = \sqrt{x}$  ֆունկցիայի գրաֆիկը՝ կառուցե՛ք հետևյալ ֆունկցիաների գրաֆիկները.

1)  $y = 2\sqrt{x}$ ,      2)  $y = -\frac{4}{5}\sqrt{x}$ ,      3)  $y = \sqrt{x-1}$ ,      4)  $y = \sqrt{3x-4}$ ,

5)  $y = \sqrt{-x}$ ,      6)  $y = \sqrt{x} - 5$ ,      7)  $y = \sqrt{|x|-1}$ ,      8)  $y = |\sqrt{3x-1}|$ :

Տեսանյութեր և ինտերակտիվ մոդելներ.

1. [https://www.youtube.com/watch?v=sdMhr\\_JU\\_JM](https://www.youtube.com/watch?v=sdMhr_JU_JM)
2. [https://mathnet.am/interact/fx\\_a1.html](https://mathnet.am/interact/fx_a1.html)
3. [https://mathnet.am/interact/f\\_xa2.html](https://mathnet.am/interact/f_xa2.html)
4. [https://mathnet.am/interact/af\\_x.html](https://mathnet.am/interact/af_x.html)
5. [https://mathnet.am/interact/f\\_ax.html](https://mathnet.am/interact/f_ax.html)
6. [https://mathnet.am/interact/\\_fx.html](https://mathnet.am/interact/_fx.html)
7. [https://mathnet.am/interact/mod\\_f.html](https://mathnet.am/interact/mod_f.html)
8. [https://mathnet.am/interact/f\\_mod.html](https://mathnet.am/interact/f_mod.html)

## § 22. Կոտորակագծային ֆունկցիա

Գևորգյան Գ.Գ., Սահակյան Ա.Ա., 2009, Էջ 110:

<https://fliphtml5.com/fumf/ijfc>

Առաջադրանքներ 347-349:

Լրացուցիչ նյութեր

1. Ձևափոխելով  $y = \frac{1}{x}$  ֆունկցիայի գրաֆիկը՝ կառուցե՛ք հետևյալ ֆունկցիաների գրաֆիկները.

$$\begin{array}{llllll} \omega) y = -\frac{1}{x}, & \varphi) y = \frac{1}{x-1}, & \epsilon) y = \frac{4x+3}{x-1}, & \varepsilon) y = \frac{1}{|x|}, & \vartheta) y = -\frac{1}{|x|}, \\ \rho) y = \frac{5}{x}, & \eta) y = \frac{2}{x+3}, & \varrho) y = \frac{x+4}{3-x}, & \varrho) y = \left| \frac{x}{x-1} \right|, \\ \sigma) y = \frac{|x|+2}{3-|x|}: \end{array}$$

Տեսանյութեր և ինտերակտիվ մոդելներ.

1. [https://www.youtube.com/watch?v=sdMhr\\_JU\\_JM](https://www.youtube.com/watch?v=sdMhr_JU_JM)
2. [https://mathnet.am/interact/fx\\_a1.html](https://mathnet.am/interact/fx_a1.html)
3. [https://mathnet.am/interact/f\\_xa2.html](https://mathnet.am/interact/f_xa2.html)
4. [https://mathnet.am/interact/af\\_x.html](https://mathnet.am/interact/af_x.html)
5. [https://mathnet.am/interact/f\\_ax.html](https://mathnet.am/interact/f_ax.html)
6. [https://mathnet.am/interact/\\_fx.html](https://mathnet.am/interact/_fx.html)
7. [https://mathnet.am/interact/mod\\_f.html](https://mathnet.am/interact/mod_f.html)
8. [https://mathnet.am/interact/f\\_mod.html](https://mathnet.am/interact/f_mod.html)

### § 23. Սահմանափակություն, մեծագույն և փոքրագույն արժեքներ

Գևորգյան Գ.Գ., Սահակյան Ա.Ա., 2009, էջ 113:

<https://fliphtml5.com/fumf/ijfc>

Առաջադրանքներ 354-357, 359-363:

Լրացուցիչ նյութեր

1. Կարո՞ղ է ածող  $\Phi$ ունկցիան լինել.

ա) ներքևից սահմանափակ,

բ) վերևից սահմանափակ:

2. Կարո՞ղ է նվազող  $\Phi$ ունկցիան լինել.

ա) վերևից սահմանափակ,

բ) ներքևից սահմանափակ:

3. Կարո՞ղ է ածող  $\Phi$ ունկցիան ընդունել միայն բացասական արժեքներ:

### § 24. Ֆունկցիայի պարբերականությունը

Գևորգյան Գ.Գ., Սահակյան Ա.Ա., 2009, էջ 118:

<https://fliphtml5.com/fumf/ijfc>

Առաջադրանքներ 366-372, 374-375, 379-380:

Լրացուցիչ նյութեր

1.  $f(x)$   $\Phi$ ունկցիան  $T$  պարբերական  $\Phi$ ունկցիա է: Ինչի՞նչ է հավասար  $f\left(\frac{x}{2}\right)$   $\Phi$ ունկցիայի հիմնական պարբերությունը:

1)  $2T$ ;

2)  $\frac{T}{2}$ ;

3)  $T$ ;

4)  $T - 2$ :

2.  $f(x)$   $\Phi$ ունկցիան  $T$  պարբերական  $\Phi$ ունկցիա է: Ինչի՞նչ է հավասար  $4f(x)$   $\Phi$ ունկցիայի հիմնական պարբերությունը:

- 1)  $\frac{T}{4}$ ;                      2)  $4T$ ;                      3)  $T$ ;                      4)  $T+4$ :

3.  $f(x)$  ֆունկցիան  $T$  պարբերական ֆունկցիա է: Ինչի՞նչ է հավասար  $-\frac{1}{2}f(x)$  ֆունկցիայի հիմնական պարբերությունը:

- 1)  $-2T$ ;                      2)  $T$ ;                      3)  $\frac{T}{2}$ ;                      4)  $T-\frac{1}{2}$ :

4.  $f(x)$  ֆունկցիան  $T$  պարբերական ֆունկցիա է: Ինչի՞նչ է հավասար  $f(x-1)$  ֆունկցիայի հիմնական պարբերությունը:

- 1)  $T-1$ ;                      2)  $-T$ ;                      3)  $T+1$ ;                      4)  $T$ :

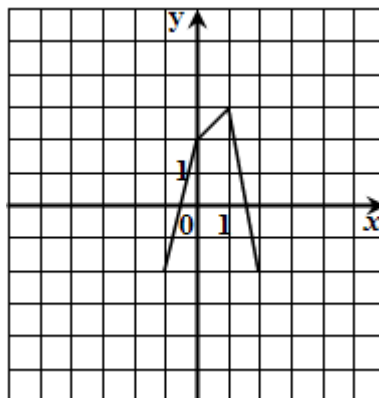
5.  $f(x)$  ֆունկցիան  $T$  պարբերական ֆունկցիա է: Ինչի՞նչ է հավասար  $f(3x)$  ֆունկցիայի հիմնական պարբերությունը:

- 1)  $3T$ ;                      2)  $\frac{T}{3}$ ;                      3)  $T$ ;                      4)  $T-3$ :

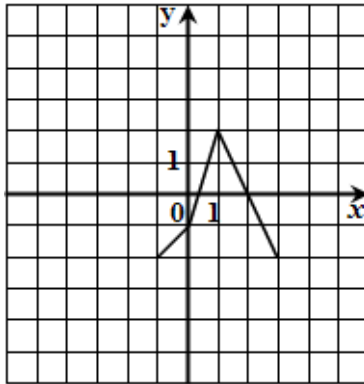
6.  $f(x)$  ֆունկցիան  $T$  պարբերական ֆունկցիա է: Ինչի՞նչ է հավասար  $f(x)+5$  ֆունկցիայի հիմնական պարբերությունը:

- 1)  $T+5$ ;                      2)  $5T$ ;                      3)  $T$ ;                      4)  $T-5$ :

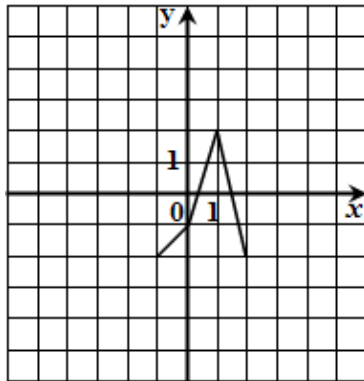
7.  $y = f(x)$  ֆունկցիան երեք պարբերությամբ պարբերական ֆունկցիա է, որոշված ամբողջ թվային առանցքի վրա: Նկարում պատկերված է այդ ֆունկցիայի գրաֆիկը, երբ  $-1 \leq x \leq 2$ : Գտեք  $f(-5) - f(-1) + f(6)$ :



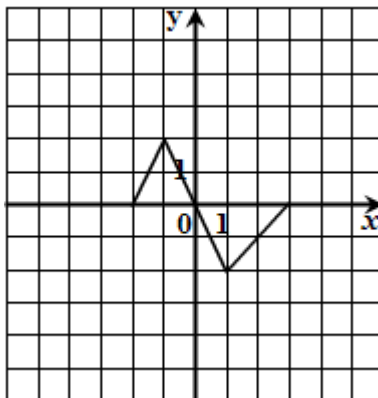
8.  $y = f(x)$  ֆունկցիան չորս պարբերությամբ պարբերական ֆունկցիա է, որոշված ամբողջ թվային առանցքի վրա: Նկարում պատկերված է այդ ֆունկցիայի գրաֆիկը, երբ  $-1 \leq x \leq 3$ : Գտեք  $f(-8) + f(1) - f(7)$ :



9.  $y = f(x)$  ֆունկցիան չորս պարբերությամբ պարբերական ֆունկցիա է, որոշված ամբողջ թվային առանցքի վրա: Նկարում պատկերված է այդ ֆունկցիայի գրաֆիկը, երբ  $-1 \leq x \leq 2$ : Գտեք  $f(-8) \cdot f(0) \cdot f(5)$ :



10.  $y = f(x)$  ֆունկցիան հինգ պարբերությամբ պարբերական ֆունկցիա է, որոշված ամբողջ թվային առանցքի վրա: Նկարում պատկերված է այդ ֆունկցիայի գրաֆիկը, երբ  $-2 \leq x \leq 3$ : Գտեք  $f(-4) \cdot f(-1) \cdot f(12)$ :



## § 25. Չույգ և կենտ ֆունկցիաներ

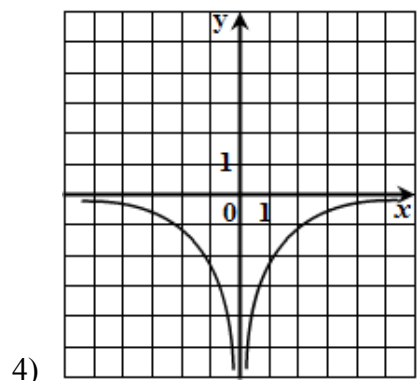
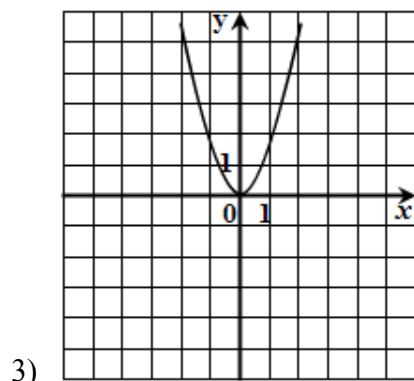
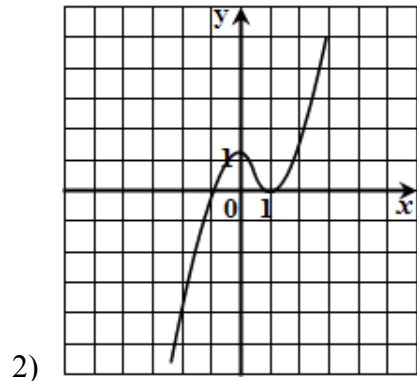
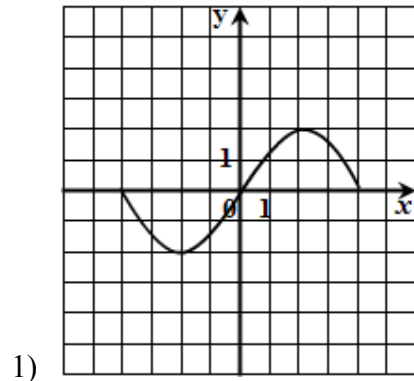
Գևորգյան Գ.Գ., Սահակյան Ա.Ա., 2009, էջ 123:

<https://fliphtml5.com/fumf/ijfc>

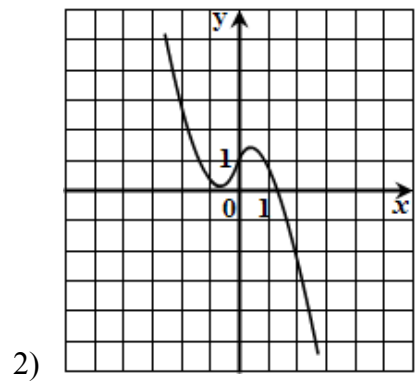
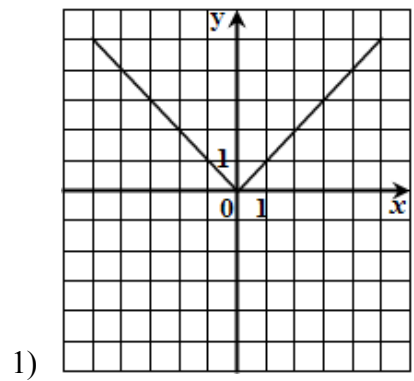
Առաջադրանքներ 383-386, 388-398:

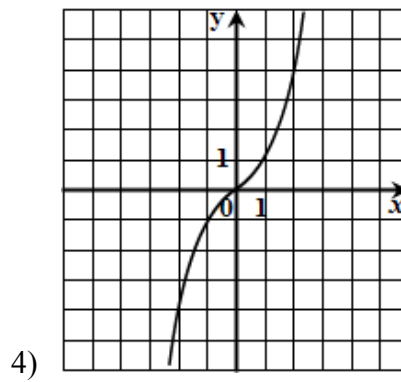
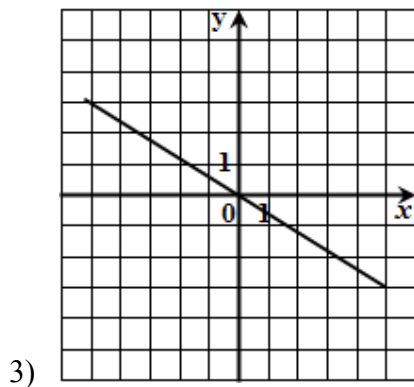
Լրացուցիչ նյութեր

1. Հետևյալ գրաֆիկներից ո՞րը կարող է լինել կենտ ֆունկցիայի գրաֆիկ:

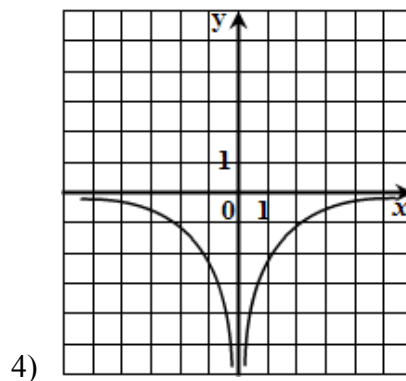
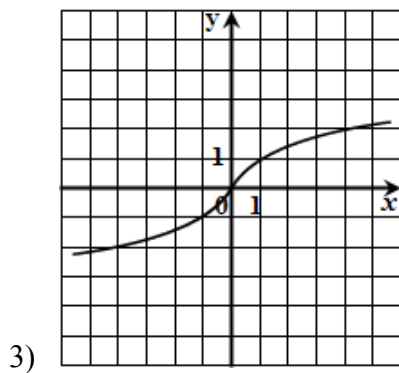
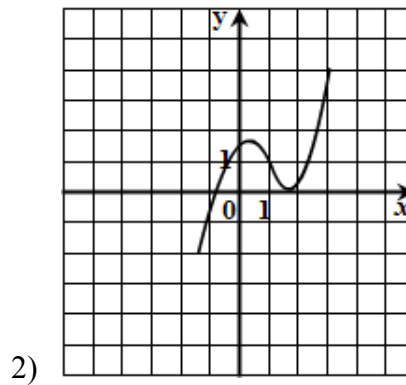
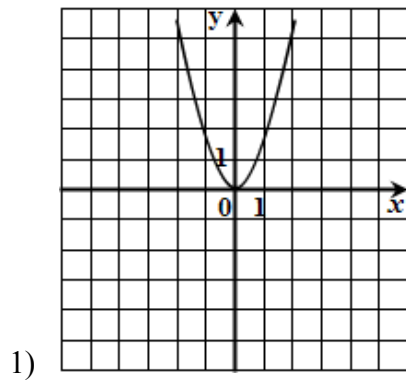


2. Հետևյալ գրաֆիկներից ո՞րը կարող է լինել զույգ ֆունկցիայի գրաֆիկ:





3. Հետևյալ գրաֆիկներից ո՞րը կարող է լինել կենտ ֆունկցիայի գրաֆիկ:

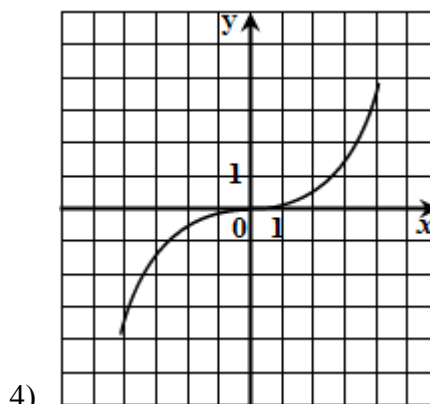
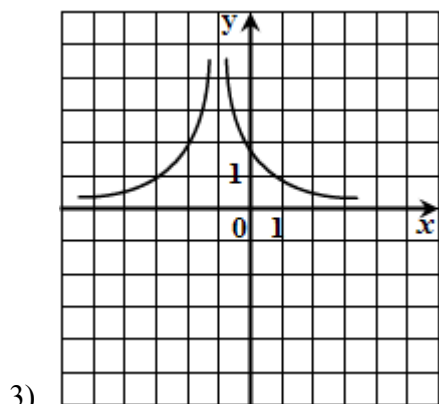
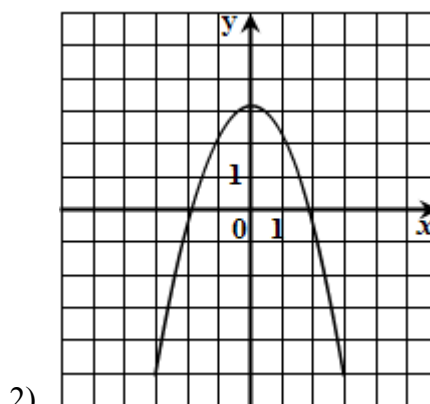
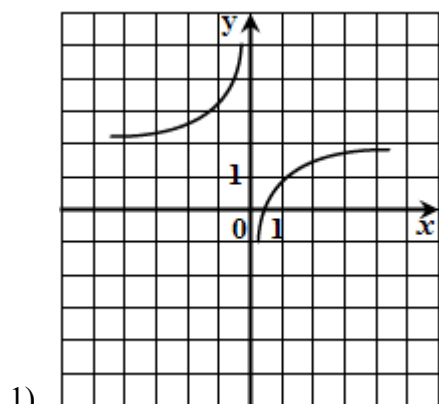


4. Չույգ ֆունկցիայի գրաֆիկը համաչափ է

- 1)  $x$ -երի առանցքի նկատմամբ.
- 2)  $y$ -ների առանցքի նկատմամբ.
- 3) կորողինատների սկզբնակետի նկատմամբ.
- 4)  $y = x$  ուղղի նկատմամբ:



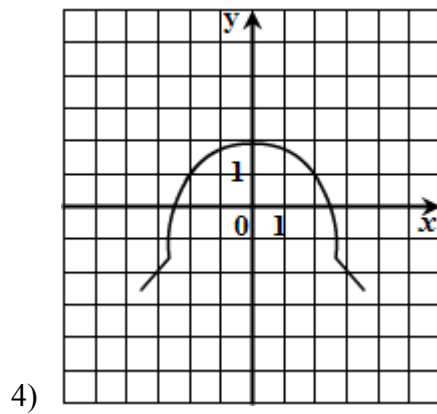
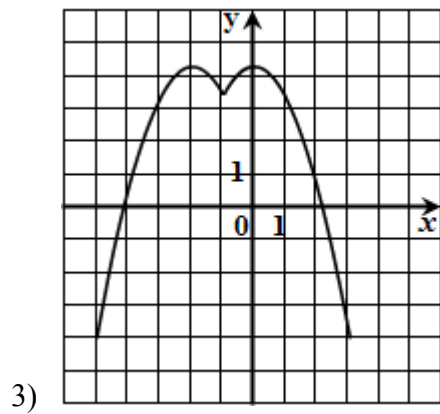
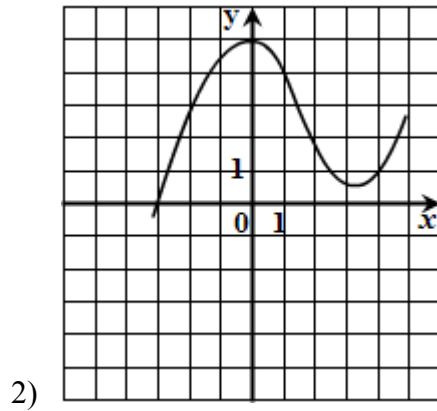
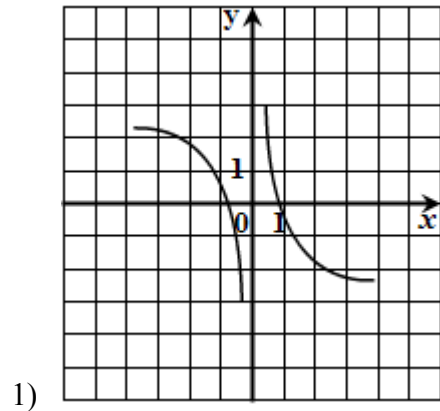
5. Ջետևյալ գրաֆիկներից ո՞րը կարող է լինել կենտ ֆունկցիայի գրաֆիկ:



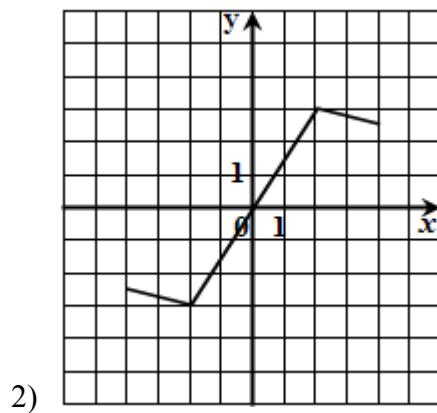
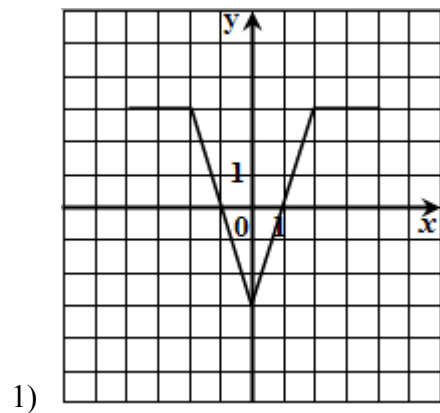
6. Կենտ ֆունկցիայի գրաֆիկը համաչափ է

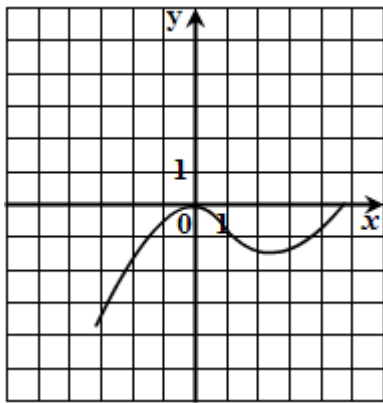
- 1)  $y$ -ների առանցքի նկատմամբ.
- 2)  $x$ -երի առանցքի նկատմամբ.
- 3) կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ.
- 4)  $y = x$  ուղղի նկատմամբ:

7. Հետևյալ գրաֆիկներից ո՞րը կարող է լինել կենտ ֆունկցիայի գրաֆիկ:

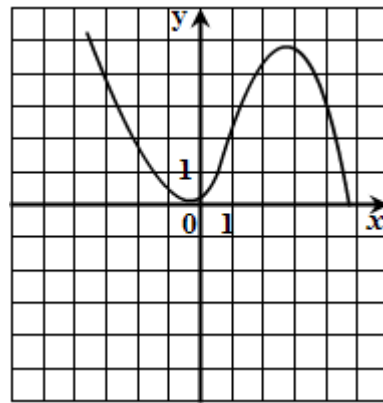


8. Հետևյալ գրաֆիկներից ո՞րը կարող է լինել գույժ ֆունկցիայի գրաֆիկ:



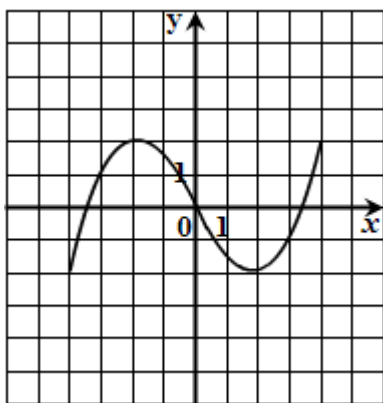


3)

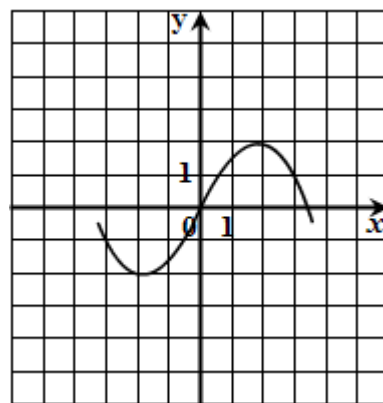


4)

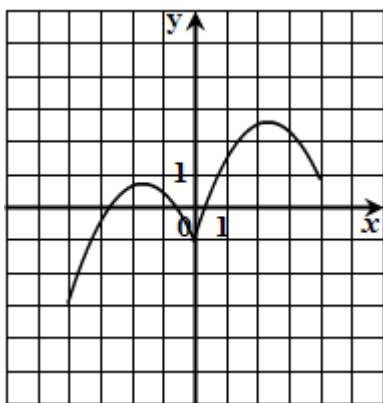
9. Հետևյալ գրաֆիկներից ո՞րը կարող է լինել զույգ ֆունկցիայի գրաֆիկ:



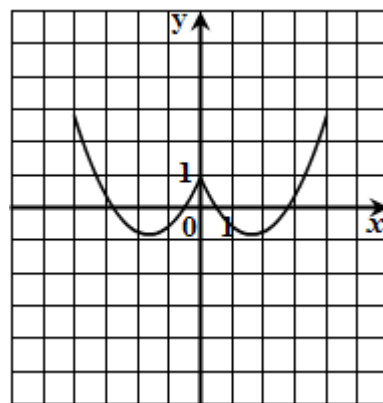
1)



2)



3)



4)

Ինտերակտիվ մոդելներ.

[https://mathnet.am/trinajor/zuyg\\_kent.html](https://mathnet.am/trinajor/zuyg_kent.html)

## § 26. Ֆուկսիաների մոնոտոնության միջակայքերը և էքստրեմումները

Գևորգյան Գ.Գ., Սահակյան Ա.Ա., 2009, էջ 127:

<https://fliphtml5.com/fumf/ijfc>

Առաջադրանքներ 400-414:

Ինտերակտիվ մոդելներ.

[https://mathnet.am/interact/achum\\_nvazum.html](https://mathnet.am/interact/achum_nvazum.html)

## § 27. Ֆուկսիայի հետազոտման ուրվագիծը և գրաֆիկի կառուցումը

Գևորգյան Գ.Գ., Սահակյան Ա.Ա., 2009, էջ 133:

<https://fliphtml5.com/fumf/ijfc>

Առաջադրանքներ 417-422:

## § 28. Հակադարձ ֆուկսիան և նրա գրաֆիկը

Գևորգյան Գ.Գ., Սահակյան Ա.Ա., 2009, էջ 138:

<https://fliphtml5.com/fumf/ijfc>

Առաջադրանքներ 425-427, 429-433:

## Ֆինանսական կրթությանը վերաբերող առաջադրանքներ

1. Արմենենք իրենց բնակարանը ձմռանը տաքացնում էին էլեկտրասալիկներով, և յուրաքանչյուր տարվա ձմեռային շրջանում դրանց վրա ծախսված ընդհանուր գումարը կազմում էր 200 000 դրամ: Նրանց հարևանը հաշվարկեց, որ էներգիայի 30%-ը անտեղի կորչում է հնացած պատուհանների պատճառով: Նա առաջարկեց դրանք փոխարինել ջերմամեկուսիչ պատուհաններով, որոնց շնորհիվ էներգիայի կորուստը կնվազի 45%-ով: Որքա՞ն կկազմի պատուհանները փոխելու ծախսը, եթե այն չի գերազանցում դրանց շնորհիվ 4 տարվա խնայված հոսանքի արժեքը:
2. Տիգրանը մեկ տարի ժամկետով 300 000 դրամ **սպառողական վարկ** է վերցրել տարեկան 18% **անվանական տոկոսադրույքով**: Բանկն առաջարկում է վարկի մարման հետևյալ եղանակը. տոկոսագումարները վճարել ամսական

պարբերականությամբ, իսկ **մայր գումարը՝** Տիգրանի նախընտրած ժամանակացույցով և չափով:

ա) Միջին հաշվով որքա՞ն է կազմում Տիգրանի ամսական վճարելիք տոկոսագումարը:

բ) Վարկի դիմաց նա տարվա ընթացքում որքա՞ն է վճարելու բանկին, եթե յուրաքանչյուր ամսում լրացուցիչ վճարելու է **սպասարկման վճար** մայր գումարի 0,2% - ի չափով:

3. Կարենն ուներ կուտակած 5 միլիոն դրամ և ուզում էր գնել մի ավտոմեքենա, որի գինը խանութ-սրահում 6.2 միլիոն դրամ էր: Որպեսզի մեքենան գնելիս պարտքը քիչ լինի, նա իր գումարը մեկ տարի ժամկետով **ավանդ** ներդրեց բանկում 10,5% տոկոսադրույքով: Տոկոսագումարի վճարումը 10% **եկամտային հարկը** պահելուց հետո կատարվելու էր ժամկետի վերջում: Իսկ եթե ավանդը հետ վերցնելու ժամկետից շուտ, ապա տոկոսագումար չէր ստանա: Ավանդի ժամկետին ընդամենը մեկ ամիս էր մնացել, երբ ավտոմեքենաների խանութը հայտարարություն տարածեց, որ երեք շաբաթից հետո մեքենայի գինը բարձրանալու է 8%-ով: Կարենը հայտնվեց երկընտրանքի առջև՝ ավանդը վերցնել ժամկետից շուտ, թե՞ սպասել մինչև ժամկետի լրանալը: Ինչպե՞ս վարվի նա, որպեսզի մեքենան գնելու համար վերցնելիք պարտքը քիչ լինի: Նրա ճիշտ որոշման շնորհիվ որքանո՞վ քիչ կլինի պարտքը:

4. Ներմուծված ձմերուկը հուլիսին 20%-ով էժան էր տեղականից: Օգոստոսին, տեղափոխման ծախսերի հետ կապված, ներմուծվածի գինը բարձրացավ 8%-ով, իսկ տեղականի գինը առաջարկի ավելացման պատճառով իջավ 25%-ով: Օգոստոսին ո՞ր ձմերուկն է ավելի թանկ և քանի՞ տոկոսով:

5. Արթուրն աշխատում է արդյունաբերական ձեռնարկությունում որպես կշեռքավար՝ 187200 դրամ **հաստիքավճարով**:

ա) Հաշվել Արթուրի համախառն աշխատավարձի չափը, եթե բացի հաստիքավճարից, նա ստանում է հաստիքավճարի 50%-ի չափով հավելավճար ծանր և վնասակար աշխատանքային պայմանների համար, ինչպես նաև 10000 դրամ՝ որպես սննդի դիմաց վճարի փոխհատուցում:

բ) Հաշվել Արթուրի **տնօրինելի աշխատավարձի** չափը՝ հաշվի առնելով **դրոշմանիշային վճարը** (2021 թ. դրույթամբ՝ 100 001-ից մինչև 200 000 դրամ հաշվարկման բազայի դեպքում 3000 դրամ), **արհմիության անդամավճարը** (1%), եկամտային հարկը (22%) և **կենսաթոշակային վճարը** (3,5%):

6. Արամի հայրը, որի համախառն աշխատավարձը ամսական 250000 դրամ է, աշխատում է շինարարական արտադրամասում, մայրը տնային տնտեսուհի է, տատիկն ու պապիկը արդեն 3 տարի է՝ թոշակառու են և ստանում են ամսական, համապատասխանաբար, 45000 և 65000 դրամ թոշակ: Արամը լսելով, որ եկամտային հարկը դարձել է 22%, հաշվեց, որ իրենց ընտանիքի ամսական **տնօրինելի եկամուտը** կազմում է  $360000 \cdot 0.78 = 280800$  դրամ: Գտե՛ք Արամի սխալը:

7. Գրքի երեք հեղինակները 1 410 000 դրամ **հոնորար** ստացան, ընդ որում՝ երկրորդը ստացավ առաջինի ստացածի 1/3-ը և էլի 60 000 դրամ, իսկ երրորդը՝ երկրորդի

ստացածի 1/3-ը և էլի 30 000 դրամ: Որքա՞ն գումար ստացավ հեղինակներից յուրաքանչյուրը հարկումից հետո: (Յոնորարից հարկվում է 10%):

8. Գիտաշխատող Հայկի աշխատավարձը, ըստ հաստիքի, 120 000 դրամ է, այս տարի նա 500 000 դրամ հոնորար ստացավ: Հայկի տարեկան **անվանական եկամուտը** կազմել է  $12 \cdot 120000 + 500000 = 1940000$  դրամ, իսկ եկամտային հարկը՝  $12 \cdot 120000 \cdot 0.22 = 316800$  դրամ: Գտե՛ք սխալը:

9. Հայտնի է, որ մինչև 10 նստատեղ և 121-250 ձիաուժ ունեցող մարդատար ավտոմեքենայի **գույքահարկի տարեկան դրույքաչափը** հաշվարկվում է հետևյալ սկզբունքով. յուրաքանչյուր ձիաուժի դիմաց 300 դր, ընդ որում՝ 150 ձիաուժը գերազանցող յուրաքանչյուր մեկ ձիաուժի դիմաց լրացուցիչ 1000 դրամ: Ենթադրենք գնել եք 4 տարվա վաղեմության, 155 ձիաուժ ունեցող ավտոմեքենա: Հաշվել, թե որքան հարկ պետք է վճարել, եթե 3 տարուց ավելի վաղեմության ավտոմոբիլային տրանսպորտային միջոցների համար գույքահարկի գումարը երրորդ տարվան հաջորդող յուրաքանչյուր տարվա համար պակասեցվում է հարկի գումարի 10 տոկոսի չափով, բայց ոչ ավելի, քան հարկի գումարի 50 տոկոսը:

\*Վաղեմության ժամկետը որոշելու համար հիմք է ընդունվում ավտոմոբիլային տրանսպորտի միջոցի թողարկման տարին:

10. Երկվորյակ քույրեր Մանեն և Նարեն աշխատում են նույն ձեռնարկությունում: Մանեի աշխատանքային պայմանագրում ամսական աշխատավարձի չափ նշված է 240000 դրամ, որի 22%-ը պահում են որպես եկամտային հարկ, 3,5%-ը՝ կենսաթոշակային վճար և 5500 դրամ պահում են որպես դրոշմանիշային վճար (2021 թ. դրությամբ՝ 200 001-ից մինչև 500 000 դրամ հաշվարկման բազայի դեպքում): Նարեն հաշվեց, որ մեկ տարվա իր աշխատավարձից ստացած տնօրինելի եկամուտը կազմում է 2 մլն. դրամ: Քույրերից ո՞րի աշխատավարձն է ավելի բարձր:

11. Ձեռնարկությունն արտադրում է օդորակիչ, որի **առաջարկի \$ուևկցիան** ունի  $q=12,5p-350$  տեսքը, իսկ **պահանջարկի \$ուևկցիան**՝  $q=946-p$  տեսքը, որտեղ  $q$  -ն քանակն է, իսկ  $p$  - ն՝ միավորի գինը՝ արտահայտված 1000 դրամներով:

ա) Քանի՞ օդորակիչ արտադրելու դեպքում կստեղծվի **շուկայական հավասարակշռություն** և ի՞նչ գնով:

բ) Ի՞նչ գնի դեպքում շուկայում օդորակիչի **դեֆիցիտը** կլինի 230 միավոր:

## **ՏԵՐՄԻՆՆԵՐ**

**Սպառողական վարկ** - այն վարկերն են, որոնք տրամադրվում են ֆիզիկական անձ սպառողին՝ ապրանքներ ձեռք բերելու կամ այլ ծախսեր հոգալու համար: Սպառողական վարկերը տրամադրվում են միայն ՀՀ դրամով:

**Անվանական տոկոսադրույք (տարեկան)** - բանկի (վարկային կազմակերպության) կողմից հայտարարվող այն տոկոսադրույքն է, որի հիման վրա հաշվարկվում են վարկի դիմաց վճարվող տոկոսագումարները:

**Մայր գումար** - վարկով վերցրած գումարը՝ առանց տոկոսագումարների և այլ վճարների:

**Սպասարկման վճարներ** – ֆինանսական ծառայությունների հետ կապված լրացուցիչ վճարներ:

**Ավանդ** – գումար, որը ներդնում էք բանկում, իսկ բանկը պարտավորվում է վերադարձնել ներդրված գումարը և պայմանագրով նախատեսված կարգով ու պայմաններով դրա դիմաց վճարել տոկոսներ:

**Կապիտալացում** – ավանդի դեպքում որոշակի պարբերականությամբ ստացված տոկոսագումարի ավելացումը մայր գումարին: Կապիտալացման շնորհիվ ավանդի տարեկան տոկոսային եկամտաբերությունը կարող է փոխվել:

**Չարկ** – գումար, որը պարտադիր կարգով վճարում են քաղաքացիները և կազմակերպությունները պետական ծախսերը ֆինանսավորելու նպատակով:

**Ուղղակի հարկ** – այն հարկատեսակներն են, որոնք գանձվում են պետության կողմից հարկատուի եկամուտներից և ունեցվածքից: Օրինակ՝ եկամտային հարկ, շահութահարկ:

**Անուղղակի հարկ** - այն հարկատեսակներն են, որոնք սահմանվում են ապրանքների գների և ծառայությունների սակագների վճարման վրա որպես հավելուրդ: Անուղղակի հարկերը կախված չեն եկամուտներից և ունեցվածքի արժեքից: Օրինակ՝ ավելացված արժեքի հարկ, ակցիզային հարկ:

**Եկամուտ** – աշխատանքի կամ այլ գործունեության արդյունքում վաստակած գումար:

**Եկամտային հարկ** – հարկի տեսակ է, որը գանձվում է անհատի աշխատավարձից կամ այլ եկամուտներից:

**Տնօրինելի եկամուտ (աշխատավարձ)** – եկամտի (աշխատավարձի) այն մասը, որը կարելի է օգտագործել սեփական հայեցողությամբ հարկերի և այլ պարտադիր վճարների գանձումից հետո:

**Դրոշմանիշային վճար** – եկամտից գանձվող պարտադիր վճարի տեսակ, օրինակ՝ ամսական աշխատավարձից պահվող 1500 դրամ գումարը (2021 թ. դրությամբ՝ մինչև 100 000 դրամ հաշվարկման բազայի դեպքում)՝ ուղղված Չինծառայողների ապահովագրության հիմնադրամին:

**Անդամավճար** - որևէ կուսակցության, կազմակերպության և այլ հաստատության անդամության համար մուծվող վճար:

**Կուտակային կենսաթոշակային համակարգ** - պարտադիր մասնակից են 1974 թ. հետո ծնված պետական ծառայողները, աշխատող անձինք (2018 թ. հուլիսից), 2014 թ. հետո առաջին անգամ աշխատանքի անցնողները, անհատ ձեռնարկատերերը, նոտարները: Կամավոր կարող են միանալ բոլոր ցանկացողները:

**Կենսաթոշակային հիմնադրամ (\$ոնդ)** - ներդրումային հիմնադրամ է, որտեղ կուտակվում են կենսաթոշակային համակարգի մասնակիցների գումարները, հիմնական նպատակը մարդկանց կենսաթոշակի ապահովումն է:

**Կենսաթոշակային վճար** – ամեն ամիս կենսաթոշակային հիմնադրամ փոխանցվող գումար, որը նվազեցնում է տնօրինելի եկամուտը:

**Յոնորար** - վարձատրություն, որը վճարվում է գրական, գիտական, արվեստի ստեղծագործությունների հեղինակին կամ նրա ժառանգորդներին այդ ստեղծագործությունն օգտագործելու համար:

**Անվանական եկամուտ** – ստացվող եկամտի դրամական արտահայտությունը, օրինակ՝ 100000 դրամ աշխատավարձ:

**Գույքահարկ**- սեփականության իրավունքով անձանց պատկանող հարկվող օբյեկտ համարվող գույքի համար օրենքով սահմանված կարգով և չափով համապատասխան բյուջեներ վճարվող ուղղակի հարկ է, որը կախված չէ հարկ վճարողների տնտեսական գործունեության արդյունքներից:

**Առաջարկ** - ապրանքների և ծառայությունների այն քանակը, որը արտադրողները ցանկանում են և պատրաստ են արտադրել/վաճառել այդ գնով:

**Պահանջարկ** - ապրանքների և ծառայությունների այն քանակը, որը գնորդները ցանկանում են և պատրաստ են գնել այդ գնով:

**Պակասուրդ (դեֆիցիտ)** – այն իրավիճակն է, երբ շուկայում ապրանքի/ծառայության քանակն ավելի քիչ է, քան պահանջվում է:

**Շուկայական հավասարակշռություն** - սա մի իրավիճակ է, երբ գինը որոշվում է այնպես, որ պահանջվող և առաջարկվող ապրանքաքանակը ճիշտ ձևով հավասարակշռվում է: Այս իրավիճակում շուկան հավասարակշռվում է:



## Թեմա 4. Թվային արգումենտի եռանկյունաչափական ֆունկցիաներ և եռանկյունաչափական հավասարումներ

### § 29. Սինուս և կոսինուս ֆունկցիաների հատկություններն ու գրաֆիկները

Գևորգյան Գ.Գ., Սահակյան Ա.Ա., 2009, էջ 144:

<https://fliphtml5.com/fumf/ijfc>

Առաջադրանքներ 438-449:

Լրացուցիչ նյութեր

1. Ձևափոխելով  $y = \sin x$  կամ  $y = \cos x$  ֆունկցիայի գրաֆիկը՝ կառուցեք տրված  
ֆունկցիայի գրաֆիկը.

1)  $y = \sin 2x$ ,

2)  $y = 2 \sin x$ ,

3)  $y = \cos 5x$ ,

4)  $y = 3 \cos \frac{x}{4}$ ,

5)  $y = 2 \sin \left( x - \frac{\pi}{3} \right)$ ,

6)  $y = \frac{1}{4} \cos \left( x + \frac{\pi}{6} \right)$ ,

7)  $y = 2 - 2 \sin x$ ,

8)  $y = |\sin x|$ ,

9)  $y = |\cos x|$ ,

10)  $y = 2 \sin |2x|$ ,

11)  $y = \cos |x|$ ,

12)  $y = \frac{1}{2} - \left| \cos \left( 5x + \frac{\pi}{6} \right) \right|$ :

Ինտերակտիվ մոդելներ

[https://mathnet.am/element\\_func/elem\\_func.html](https://mathnet.am/element_func/elem_func.html)

[https://mathnet.am/interact/sinx\\_1.html](https://mathnet.am/interact/sinx_1.html)

### § 30. Տանգենս և կոտանգենս ֆունկցիաների հատկություններն ու գրաֆիկները

Գևորգյան Գ.Գ., Սահակյան Ա.Ա., 2009, Էջ 152:

<https://fliphtml5.com/fumf/ijfc>

Առաջադրանքներ 453-459:

Լրացուցիչ նյութեր

1. Ձևափոխելով  $y = tgx$  կամ  $y = ctgx$  ֆունկցիայի գրաֆիկը՝ կառուցեք տրված ֆունկցիայի գրաֆիկը.

1)  $y = tgx + 3$ ,

2)  $y = 2 - ctgx$ ,

3)  $y = tg4x$ ,

4)  $y = ctg \frac{3x}{2}$ ,

5)  $y = tg(3x + 1)$ ,

6)  $y = |ctgx|$ :

Ինտերակտիվ մոդելներ

[https://mathnet.am/element\\_func/elem\\_func.html](https://mathnet.am/element_func/elem_func.html)

### § 31. Թվի արկսինուսը և արկկոսինուսը

Գևորգյան Գ.Գ., Սահակյան Ա.Ա., 2009, Էջ 155:

<https://fliphtml5.com/fumf/ijfc>

Առաջադրանքներ 462-466, 468-471:

Լրացուցիչ նյութեր

1. Հաշվեք.

1)  $\arcsin 0$ ,

2)  $\arcsin 1$ ,

3)  $\arcsin(-1)$ ,

4)  $\arcsin \frac{1}{2}$ ,

5)  $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ,

6)  $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,

7)  $\arccos 1$ ,

8)  $\arccos\frac{1}{2}$ ,

9)  $\arccos(-1)$ ,

10)  $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ,

11)  $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$  :

### § 32. Թվի արկտանգենտը և արկկոտանգենտը

Գևորգյան Գ.Գ., Սահակյան Ա.Ա., 2009, Էջ 160:

<https://fliphtml5.com/fumf/ijfc>

Առաջադրանքներ 477-479, 481-484:

Լրացուցիչ նյութեր

#### 1. Հաշվեք.

1)  $\operatorname{arctg} 0$ ,

2)  $\operatorname{arctg} 1$ ,

3)  $\operatorname{arctg}(-1)$ ,

4)  $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$ ,

5)  $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ,

6)  $\operatorname{arcctg} 0$ ,

7)  $\operatorname{arcctg} 1$ ,

8)  $\operatorname{arcctg}(-1)$ ,

9)  $\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)$ ,

10)  $\operatorname{arcctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$  :

### § 33. Պարզագույն եռանկյունաչափական հավասարումների լուծման բանաձևերը

Գևորգյան Գ.Գ., Սահակյան Ա.Ա., 2009, էջ 163:

<https://fliphtml5.com/fumf/ijfc>

Առաջադրանքներ 488-493:

Լրացուցիչ նյութեր

1. Լուծեք հավասարումը.

$$11) \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$12) \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$13) \sin x = -\frac{1}{2},$$

$$14) \sin x = \frac{2}{7},$$

$$15) \sin x = 4,$$

$$16) \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$17) \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$18) \cos x = -\frac{1}{2},$$

$$19) \cos x = \frac{7}{2},$$

$$20) \cos x = \frac{1}{4}:$$

2. Լուծեք հավասարումը.

$$1) \operatorname{tg} x = -1,$$

$$2) \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$3) \operatorname{tg} x = -\sqrt{3},$$

$$4) \operatorname{tg} x = 8,$$

$$5) \operatorname{ctg} x = \sqrt{3},$$

6)  $ctgx = 1$ ,

7)  $ctgx = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ,

8)  $ctgx = 5$ :

### § 34. Եռանկյունաչափական հավասարումներ

Գևորգյան Գ.Գ., Սահակյան Ա.Ա., 2009, Էջ 170:

<https://fliphtml5.com/fumf/ijfc>

Առաջադրանքներ 496-503, 505-508, 510-519:

Լրացուցիչ նյութեր

#### 1. Լուծեք հավասարումը.

1)  $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$ ,

2)  $4\cos^2 x - 8\cos x + 3 = 0$ ,

3)  $3tg^2 x + 2tgx - 1 = 0$ ,

4)  $2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0$ ,

5)  $\cos 2x + 3\sin x = 2$ ,

6)  $\sin x + \cos x = 0$ :

#### 2. Լուծեք հավասարումը.

1)  $\sin 11x \cos 6x = \sin 9x \cos 4x$ ,

2)  $\cos 3x \cos 5x = \cos 4x \cos 6x$ ,

3)  $\sin x \sin 3x = \sin 5x \sin 7x$ ,

4)  $\sin 2x \cos 4x = \sin 6x \cos 8x$ ,

5)  $\cos 3x \cos 5x = \cos x \cos 7x$ ,

6)  $\sin 2x \sin 4x = \sin x \sin 5x$ ,

7)  $\cos 5x + \cos 7x = \cos(\pi + 6x)$ ,

8)  $\sin 3x + \sin 5x = \sin 4x$ :

#### 3. Լուծեք հավասարումը.

1)  $\sin 3x \sin 4x - \cos x = 0$ ,

2)  $1 + \cos x - \cos 2x = \cos 3x$ ,

3)  $1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$ ,

4)  $\cos 2x - \cos 8x + \cos 6x = 1$ ,

- 5)  $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 + \cos 2x,$
- 6)  $\sin 2x - \cos 2x + \sin x + \cos x + 1 = 0,$
- 7)  $\cos 2x \sin x + \sin x = 5 \cos 2x + 5,$
- 8)  $2 \sin x \cos x + 4 \cos x = \sin x + 2,$
- 9)  $\cos 9x - \cos 7x + \cos 3x - \cos x = 0,$
- 10)  $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0,$
- 11)  $\cos \frac{x}{2} + \cos x + \cos \frac{3x}{2} + \cos 2x = 0,$
- 12)  $\sin 8x - \sin 6x + \sin 4x = \sin 2x,$
- 13)  $\cos 4x + \cos 2x = \sin 9x + \sin 3x,$
- 14)  $\cos 6x + \sin 2x + \sin 6x = \cos 2x,$
- 15)  $\cos 4x + \cos 2x + \sin x = \sin 5x,$
- 16)  $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 4x\right) + \cos 2x = 3 \cos 3x :$

#### 4. Լուծեք հավասարումը.

- 1)  $\sin x \cos 5x = \sin 6x,$
- 2)  $\sin 3x = \cos x - \sin x,$
- 3)  $\operatorname{tg}^2 3x - 2 \sin^2 3x = 0,$
- 4)  $\cos 2x + \cos 6x + 2 \sin^2 x = 1,$
- 5)  $\sin x + \sin 3x = 4 \cos^3 x,$
- 6)  $\cos 3x = 2 \sin(1,5\pi + x),$
- 7)  $\sin 4x = 2 \cos^2 x - 1,$
- 8)  $\sin 6x + \sin 2x = 0,5 \operatorname{tg} 2x,$
- 9)  $\sin 6x = 2 \sin 2x,$
- 10)  $\cos 3x + \sin x \cdot \sin 2x = 0,$
- 11)  $(1 + \cos 4x) \sin x = \cos^2 2x,$
- 12)  $\sin 3x + \sin x = 4 \sin^2 x,$
- 13)  $\sin(5x - \pi) + \sin x = 2 \cos 3x,$
- 14)  $\sin 2x \sin 3x + \cos 5x = 0,$
- 15)  $\cos x \cos 5x = \cos 6x,$
- 16)  $\sin 3x \cos 3x = \sin 2x,$
- 17)  $\sin 2x \cos 8x + \sin 6x = 0,$
- 18)  $3 \cos^2 3x = (1 + \cos 6x) \sin x :$

### 5. Լուծեք հավասարումը.

- 1)  $\cos^2 x + 4 \sin^2 x = 2 \sin 2x$ ,
- 2)  $3 \cos^2 x = 4 \sin x \cos x - \sin^2 x$ ,
- 3)  $3 \cos^2 x = \sin^2 x + \sin 2x$ ,
- 4)  $2 \sin^2 x - \cos 2x + \sin 2x = 0$ ,
- 5)  $3 \cos 2x - 4 \sin 2x - 5 = 0$ ,
- 6)  $4 \cos 2x - 3 \sin 2x + 5 = 0$ ,
- 7)  $3 \cos^2 x - \sin^2 x - \sin 2x = 0$ ,
- 8)  $2 \sin 2x = 6 \cos^2 x - 1$ ,
- 9)  $6 \sin^2 x + 0,5 \sin 2x = 2 + \cos^2 x$ ,
- 10)  $6 \sin^2 x + \sin x \cos x - \cos^2 x = 2$ ,
- 11)  $\sin^2 x - 2 \sin x \cos x = 3 \cos^2 x$ ,
- 12)  $1 + 3 \cos^2 x - 5 \sin x \cos x = 0$ ,
- 13)  $3 \sin x \cos x - 3 \cos^2 x = \cos 2x$ :

### 6. Լուծեք հավասարումը.

- 1)  $\sqrt{3} \cos x + \sin x = \sqrt{2}$ ,
- 2)  $\cos x - \sqrt{3} \sin x = -1$ ,
- 3)  $\sqrt{3} \cos x + \sin(\pi + x) = \sqrt{2}$ ,
- 4)  $\sqrt{3} \cos(\pi - x) + \sin x = \sqrt{2}$ ,
- 5)  $5 \cos x + 12 \sin x = 13$ ,
- 6)  $3 \sin x + 4 \cos x = 2$ ,
- 7)  $5 \sin x + 12 \cos x = 13$ ,
- 8)  $\sin x - 2 \cos x = 1$ ,
- 9)  $2 \sin x + \cos x = 2$ ,
- 10)  $3 \sin 3x + 4 \cos 3x = -5$ ,
- 11)  $5 \sin 2x - 12 \cos 2x = 13$ ,
- 12)  $\cos^2 x - 3 \sin x \cos x = -1$ ,
- 13)  $4 \cos^2 x - 7 \sin 2x = 2$ :

## §35. Անկախ և կախյալ պատահույթներ

### Պատահույթի հավանականություն

Հավանականությունը մաթեմատիկայի կարևոր մասերից մեկն է: Այն շատ կարևոր տեղ ունի դրամային շուկաներում, եղանակի կանխատեսման համար, քվանտային տեսությունում և այլ բնագավառներում, երբ վիճակագրությունը կիրառվում է իրական խնդիրներում:

#### 1. Հավանականությունների բառարանը

- Երբ դուք ցանկանում եք կանխատեսել ինչ-որ բանի ապագայում պատահելու հնարավորությունը, ապա օգտագործում եք հավանականությունը.
  - **Փորձը** կրկնվող պրոցես է, որի արդյունքում ձևավորվում են **ելքերը**
  - **Պատահույթը** մեկ կամ մի քանի ելքերի բազմությունն է
  - **Նմուշների տարածությունը** փորձի բոլոր հնարավոր ելքերի բազմությունն է
- Պատահույթների և նմուշների տարածությունները բազմություններ են և բազմությունների տերմիններն էլ օգտագործվում են դրանք նկարագրելու համար: Լատիներեն մեծատառերով նշանակում են պատահույթները: Պատահույթի հավանականությունը փորձի արդյունքում պատահույթի պատահելու հնարավորությունն է:
  - Երբ բոլոր ելքերն հավասարապես հնարավոր են, **պատահույթի հավանականությունը** այդ պատահույթի բոլոր ելքերի քանակի և նմուշների տարածության բոլոր հնարավոր ելքերի քանակի հարաբերությունն է
  - Անհնար պատահույթն ունի 0 հավանականություն, իսկ հավաստի պատահույթի հավանականությունը 1 է:
  - Քանի որ բոլոր պատահույթների հավանականություններն ընկած են անհնար և հավաստի պատահույթների հավանականությունների միջև, ապա հավանականությունները սովորաբար գրվում են սովորական կոտորակի կամ տասնորդական թվի տեսքով, ինչպես նաև տոկոսներով: Այս գրքում կօգտագործենք կոտորակներն ու տասնորդական թվերը:



## Օրինակ 1

Չկեղծված զառի նիստերի վրա գրված են 1-ից 6 թվերը: Մեկ անգամ զառը նետելուց հետո գրացնել են վերին նիստի վրա գրված թիվը:

ա. Գտնել հավանականությունը, որ վերին նիստի վրա կլինի 5 թիվը:

բ. Գտնել կենտ թիվ դուրս բացվելու հավանականությունը:

**Նմուշների տարածություն** ունի 6 ելք՝ 1, 2, 3, 4, 5 և 6, քանի որ բոլոր թվերն են կարող են բացվել:

ա. Չառն ունի 6 նիստ և մեկ նիստի վրա կլինի 5 թիվը, հետևաբար 5 թիվը վերին նիստի վրա լինելու հավանականությունը կլինի  $\frac{1}{6}$  կամ 0,16:

Մեկ ելքի դեպքում վերին նիստին 5 կբացվի՝ բաժանած 6 հնարավոր ելքերի քանակի վրա:

բ. Կենտ թվերն են 1, 3, 5: Հետևաբար կենտ թիվ բացվելու հավանականությունը կլինի  $\frac{1}{6} = \frac{1}{2}$  կամ 0,5:

3 ելք համապատասխանում է կենտ բացվելու պայմանին՝ 1, 3, 5:

3 ելքերի քանակը բաժանենք 6 հնարավոր ելքերի քանակի վրա:

## Օրինակ 2

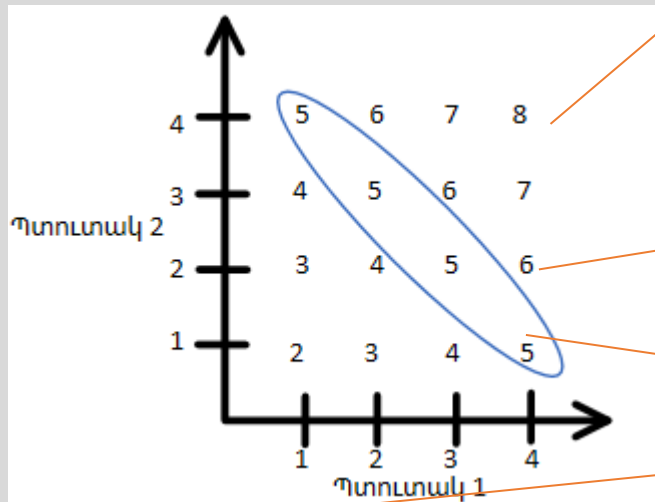
Երկու չկեղծված պտուտակ (spinner) ունեն 4 նիստ, որոնց վրա գրված են 1-ից 4 թվերը: Երկու պտուտակը միաժամանակ նետելուց հետո գրանցում են նրանց վրա բացված թվերի գումարը:

Գտնել հավանականությունը, որ այդ գումարը կլինի

ա. ճիշտ 5

բ. 5-ից մեծ

Պտուտակների վրա բացված թվերը ներկայացնելու համար գծել երկու առանցք:



Դիագրամի 16 կետերը ներկայացնում են նմուշների տարածությունը:

Ընդամենը կա 16 թիվ, որոնցից յուրաքանչյուրը հավասարապես հնարավոր է, քանի որ պտուտակը կանոնանվոր է:

Այս հատվածում կա 4 ելք.  
1+4, 2+3, 3+2, 4+1

F-ով նշանակված է «թվերի գումարը ճիշտ 5 է» պատահույթը

Ընդամենը կա չորս հատ 5 և 16 ելք: Հետևաբար

$$\text{ա. } P(F) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

$$\text{բ. } P(5 - \text{ից մեծ}) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

P() անգլերեն Probability (հավանականություն) բառից է:

6 ելքի համար գումարը մեծ է 5-ից՝ քառակուսու վերին աջ մասում: 2+4, 3+4, 4+4, 3+3, 4+3, 4+2: Պատասխանը կարելի է գրել 0,375:

## Խնդիր 5Ա.

Հետևյալ փորձերի համար պարզել նմուշների տարածությունը և հաշվել պատահույթների հավանականությունը.

- Կանոնանվոր զառը նետում են մեկ անգամ և գրնացում են, թե բացված թիվը կենտ է թե զույգ: Գտնել զույգ բացվելու հավանականությունը:

2. Նետում են երկու մետաղադրամ: Գտնել հավանականությունը, որ երկուսի վրա էլ կբացվի միևնույն երեսը:
3. Թղթախաղի տուփում կա 52 խաղաթուղթ, որից հանում են մեկ խաղաթուղթ: Գտնել հավանականությունը, որ այն սիրտ նշանով է:
4. 52 խաղաթղթի տուփից հանում են մեկը, գրանցում նշանը և վերադաձնում տուփ: Ապա հանում են ևս մեկ թղթադրամ: Գտնել կամայական հերթականությամբ ագռավի և խաչի նշաններ դուրս գալու հավանականությունը:
5. Նետում են գառ և մետաղադրամ: Գտնել զինանշան և 6 բացվելու հավանականությունը:
6. Նետում են 2 հատ 6 նիստանի գառ և գրանցում կողային նիստերի վրա բացված երկու ամենամեծ թվերի արտադրյալը: Գտնել հավանականությունը, որ արդյունքը մեծ է 24-ից:

**Պայմանական հավանականությունը կարելի է ներկայացնել ծառածև դիագրամով**

**Օրինակ 10**

Մոտոցիկլավարների մրցաշարին հանդիսատեսի թիվը կախված է եղանակից: Անձրևոտ եղանակին շատ հանդիսատես ունենալու հավանականությունը 0,4 է, իսկ լավ եղանակին այն հասնում է 0,9: Եղանակի տեսության կանխատեսմամբ մրցման օրը անձրևի հավանականությունը 0,75 է:

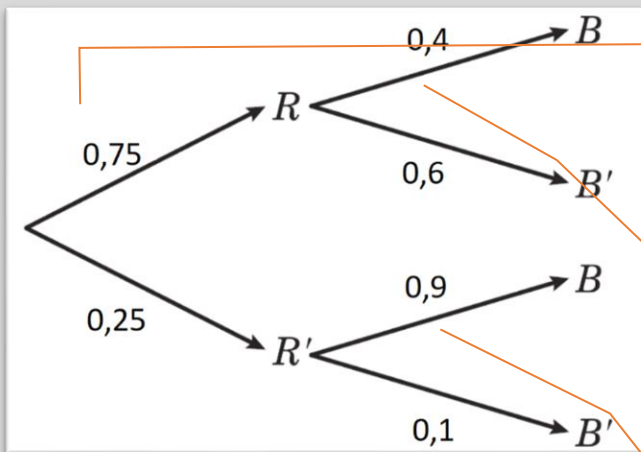
ա. Այս տեղեկությունները ներկայացրեք ծառածև դիագրամի միջոցով:

Գտնել հավանականությունը, որ

բ. կա շատ հանդիսատես և անձրևում է

բ. կա շատ հանդիսատես

ա. Կա երկու պատահույթ. «*R* պատահույթ, որ կանձրևի», «*B* պատահույթ, որ շատ հանդիսատես կլինի»: Առաջին ճյուղը ներկայացնում է անձրևի առկայությունը, իսկ երկրորդը՝ հանդիսատեսի քանակը:



$P(R) = 0,75$  և  $P(R') = 0,25$  գրված են առաջին ճյուղերի վրա

Եթե իրոք անձրև գա, ապա շատ հանդիսատես գալու հավանականությունը՝  $P(B|R) = 0,4$ : Հետևաբար երկրորդ մակարդակի վրա  $R$ -ից հետո գրում ենք 0,4: Ներքևի ճյուղի վրա կգրենք  $1 - 0,4 = 0,6$ :

$P(B|R') = 0,9$ , հետևաբար  $R'$ -ից հետո գրում ենք 0,9: Մյուս ճյուղի վրա կստանանք՝  $1 - 0,9 = 0,1$ :

Բազմապատկամ օրենքը կիրառելով՝ կհաշվենք հավանականությունները.

բ.

$$P(B \cap R) = P(B|R)P(R) = 0,4 \cdot 0,75 = 0,3$$

Սա վերին ճյուղերի  $0,4 \cdot 0,75$  արտադրյալն է: Բազմապատկում ենք պատահույթների ճյուղերի ուղղությամբ՝  $R$  և ապա  $B$  պատահույթների:

գ. Կարող է անձրևել և շատ հանդիսատես լինել, կամ կարող է անձրև չգալ և շատ հանդիսատես լինել.

$$P(B) = 0,3 + P(B|R')P(R') = 0,3 + 0,25 \cdot 0,9 = 0,525$$

Սա ա.-ի պատասխանն է, գումարած հավանականությունը, որը ստացվում է  $R'$ -ից  $B$  շարժվելիս հավանականությունների բազմապատկելուց:

Կարևոր է հիշել, որ **ճյուղերով առաջ շարժվելիս** հավանականությունները **բազմապատկվում են**, իսկ **մի ճյուղից մյուսն անցնելիս՝ գումարվում**: Երկրորդ կարգի ճյուղերը պայմանական են առաջինի նկատմամբ :

**Օրինակ 11**

1.  $A$  և  $B$  երկու պատահույթներ են և  $P(A|B) = 0,1$ ,  $P(A|B') = 0,6$ , իսկ  $P(B) = 0,3$ : Գտնել.

- ա.  $P(A \cap B)$     բ.  $P(A \cup B')$     գ.  $P(A)$     դ.  $P(B|A)$     ե.  $P(B|A')$

ա. Բազմապատկման օրենքը կիրառելով՝ կստանանք.

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

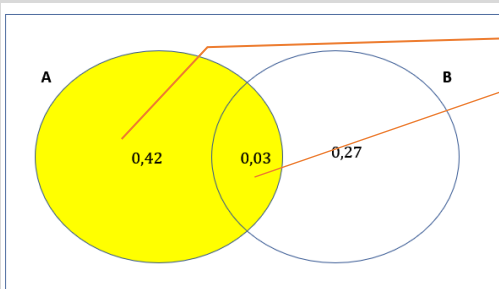
$$= 0,1 \cdot 0,3 = 0,03$$

բ. Բազմապատկման օրենքը կիրառելով՝ կստանանք.

$$P(A \cap B') = P(A|B') \cdot P(B')$$

$$0,6 \cdot 0,7 = 0,42$$

գ.



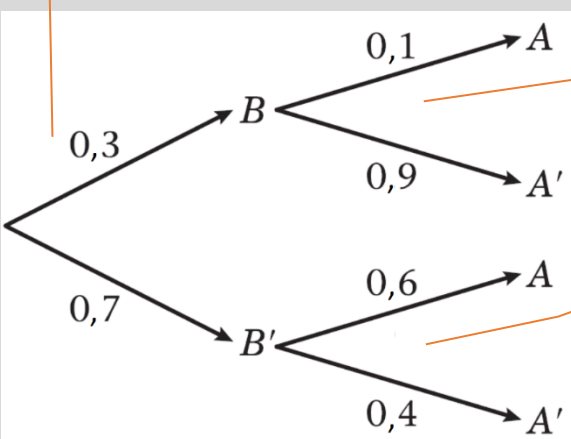
Վեննի դիագրամից կստանանք.

$$P(A) = 0,42 + 0,03 = 0,45$$

դ.  $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0,03}{0,45} = 0,0(6)$

ե.  $P(B|A') = \frac{P(B \cap A')}{P(A')} = \frac{0,27}{0,55} = 0,4(90)$

Ծառաձև դիագրամների կիրառությունը ցույց է տալիս լուծման այլ եղանակ.



ա.  $P(A \cap B) = 0,3 \cdot 0,1 = 0,03$

Առաջինն օգտագործենք **Բազմապատկման օրենքը** հատումը գտնելու համար, ապա զձենք Վեննի դիագրամը մյուս հավանականությունները հաշվելու համար:

Վեննի դիագրամից երևում է, որ  $P(A) = P(A \cap B') + P(A \cap B)$

Հայտարարը գտնելու համար օգտագործենք.  
 $P(A') = 1 - P(A) = 1 - 0,45 = 0,55$

Առաջին ճյուղից գտնում ենք, որ  $P(B) = 0,3 \Rightarrow P(B') = 1 - 0,3 = 0,7$ :

Պայմանական հավանականությունը՝  $P(A|B) = 0,1$  երկրորդ ճյուղի վրա է, իսկ մյուս ճյուղը կլինի՝  $P(A'|B) = 1 - P(A|B) = 1 - 0,1 = 0,9$ :

Նույն ձևով.  $P(A|B') = 0,6$ , հետևաբար այն կգրենք երկրորդ մակարդակի վրա՝  $B'$ -ից հետո: Մյուս ճյուղը կլինի՝  $1 - 0,6 = 0,4$ :

Բազմապատկել վերևի ճյուղերի երկայնքով.

Պարզապես բազմապատկել համապատասխան ճյուղերի երկայնքով:

բ.  $P(A \cap B') = P(B' \cap A) = 0,7 \cdot 0,6 = 0,42$

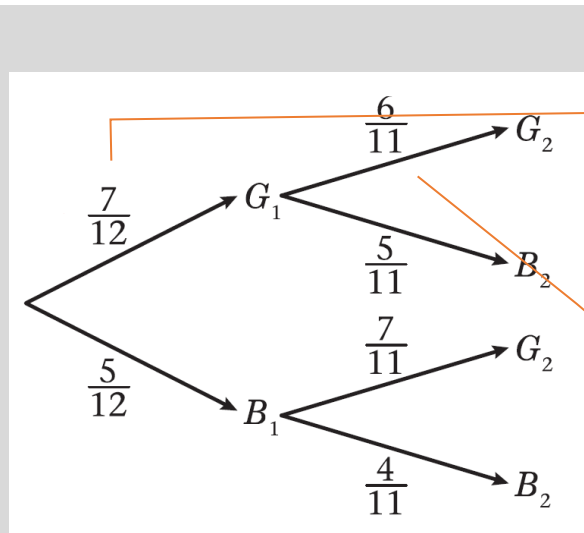
գ.  $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B') = 0,45$

դ. և ե. լուծումները նույնն են: Կիրառել պայմանական հավանականությունների բանաձևը, ապա հանել նախորդ կետերում գտնված արժեքները:

Ընդամենը գումարել նախորդ արժեքները: Հիշենք. բազմապատկել ճյուղերի երկայնքով և ապա գումարել իրար:

**Օրինակ 12**

Պարկում կա 7 կանաչ և 5 կապույտ գնդակ: Պարկից պատահականորեն հանում են մեկ գնդակ, գրանցում գույնը և առանց վերդարձելու հանում են երկրորդ գնդակը: Գտնել հավանականությունը, որ գնդակներից մեկը կանաչ է, մյուսը՝ կապույտ:



Սկզբում կա 12 գնդակ: Առաջին ճյուղը ցույց է տալիս «Առաջին գնդակը կանաչ է» պատահույթը՝  $G_1$  (Green-կանաչ բառից), իսկ ներքևի չճյուղը «Առաջին գնդակը կապույտ է» պատահույթը՝  $B_1$  (Blue-կապույտ բառից): Առաջին գնդակը հանելուց հետո պարկում մնում է 11 գնդակ:

Երկրորդ մակարդակի ճյուղերի համար հավանականությունները պայմանական են՝ կախված առաջին գնդակի ընտրությունից: Այս ճյուղի վրա առաջին գնդակը կանաչ է եղել, հետևաբար միայն պարկում մնացել է ընդամենը 6 կանաչ գնդակ:

$P(\text{մեկը կանաչ մյուսը կապույտ})$   
 $= P(\text{առաջինը՝ կանաչ, երկրորդը՝ կապույտ})$   
 $+ P(\text{առաջինը՝ կապույտ, երկրորդը՝ կանաչ})$   
 $= \frac{7}{12} \cdot \frac{5}{11} + \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{11} = \frac{35}{66}$

Բազմապատկել ճյուղերի երկայնքով

Գումարել ճյուղերի միջև

Նկատենք գնդակի հետ չընելու հետևանքը: Վերադառնով և առանց վերադարձի տարբերությունը կդիտարկվի 5.6 բաժնում:

**Առաջադրանք 5Ե**

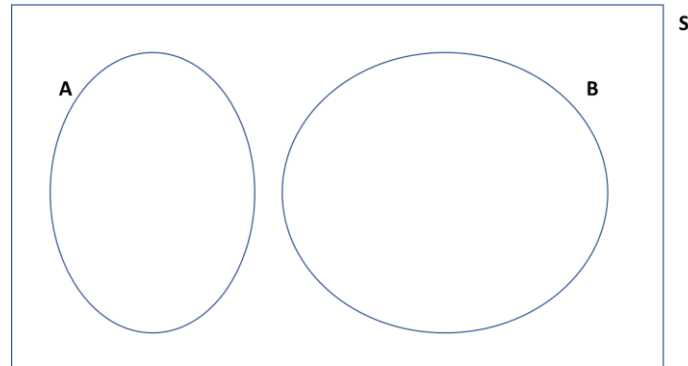
1. Պարկում կա 5 կարմիր և 4 կապույտ ժետոն: Պատահականորեն ընտրում են մեկ ժետոն, գրանցում գույնը և առանց վերադաձնելու՝ հանում երկրորդ ժետոնը: Գտնել հավանականությունը, որ.
  - ա. երկրորդ ժետոնը կարմիր է, երբ առաջինը կապույտ է
  - բ. երկրորդ ժետոնը կապույտ է, երբ առաջինը կարմիր է
  - գ. երկուսն էլ կապույտ են
  - դ. հանել են մեկ կարմիր և մեկ կապույտ ժետոն
  
2. 24 շոկոլադե սալիկ պարունակող արկղում 10-ը մուգ են, 14-ը՝ կաթնային: Լինդան պատահականորեն ընտրում է մեկ շոկոլադե և ուտում, ապա՝ երկրորդը: Գտնել հավանականությունը, որ Լինդան կուտի.
  - ա. երկու մուգ շոկոլադե
  - բ. մեկ մուգ և մեկ կաթնային շոկոլադե
  
3. Ձենն միշտ աշխատանքի է գնում ավտոբուսով կամ տաքսիով: Եթե մի օր նա աշխատանքի է գնում ավտոբուսով, ապա հաջորդ օրը տաքսիով աշխատանքի գնալու հավանականությունը 0,4 է: Եթե նա մի օր նա աշխատանքի է գնա տաքսիով, ապա հաջորդ օրն ավտոբուսով աշխատանքի գնալու հավանականությունը 0,7 է:
 

Տրված է, որ Ձենը երկուշաբթի աշխատանքի է գնացել ավտոբուսով: Գտնել հավանականությունը, որ նա Չորեքշաբթի աշխատանքի կգնա տաքսիով:
  
4. Սյուն երկու մետաղադրամ ունի: Մեկը չկեղծված է՝ մի երեսին թվանշան, մյուսին գիևանշան: Մյուսը կեղծ մետաղադրամ է՝ երկու երեսին էլ թվանշան: Սյուն պատահականորեն ընտրում է մետաղադրամներից մեկը և նետում:
  - ա. Գտնել հավանականությունը, որ մետաղադրամի վրա գիևանշան կբացվի:
  - բ. Եթե մետաղադրամի վրա թվանշան է բացվել, գտնել հավանականությունը, որ Սյուն ընտրել էր չկեղծված մետաղադրամը:
  
5. Հեռուստամրցաշարի մասնակցին առաջարկեցին ընտրել երեք դռներից մեկը: Դռներից մեկի ետևում մրցանակը իրական մեքենա է, իսկ մյուս երկուսի ետևում՝ խաղալիք մեքենա: Մասնակիցը պատահականորեն ընտրում է մեկ դուռ: Հաղորդավարը դրանից հետո բացում է մնացած երկու դռներից մեկը և գտնում խաղալիք մեքենա: Հաղորդավարը առաջարկում է մասնակցին փոխել իր ընտրությունը:
 

Հիմնավորիր, թե դու մասնակցին ի՞նչ կառաջարկես անել, որպեսզի նա ունենա իրական մեքենա շահելու ամենամեծ հավանականությունը: Հաշվարկները պարզ ներկայացնել:

**Անհամատեղելի և անկախ պատահույթներ**

Երբ պատահույթները չունեն ընդհանուր ելքեր, նրանք կոչվում են անհամատեղելի:



Երբ  $A$  և  $B$  անհամատեղելի պատահադրժներ են, ապա  $A$  և  $B$  հատումը դատարկ է, հետևաբար  $P(A \cap B) = 0$ : Քանի որ  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ , ապա կստանանք.

- **Գումարման օրենքը անհամատեղելի պատահույթների համար.**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Երբ մեկ պատահույթն ազդեցություն չունի այլ պատահույթի վրա, նրանք **անկախ են**: Հետևաբար, եթե  $A$  և  $B$  անկախ են, ապա  $A$  -ի տեղի ունենալու հավանականությունը նույնն է, անկախ անրանից  $B$ -ն տեղի ունեցել է թե ոչ՝  $P(A|B) = P(A)$ :

Օգտագործելով պայմանական հավանականության բանաձևը՝ կստանանք.  $\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$ : Որից էլ կստանանք.

- **Բազմապատկամ օրենքը անկախ պատահույթների համար.**

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

### Օրինակ 13

2.  $A$  և  $B$  երկու անհամատեղելի պատահույթներ են,  $P(A) = 0,2$ ,  $P(B) = 0,4$ : Գտնել.

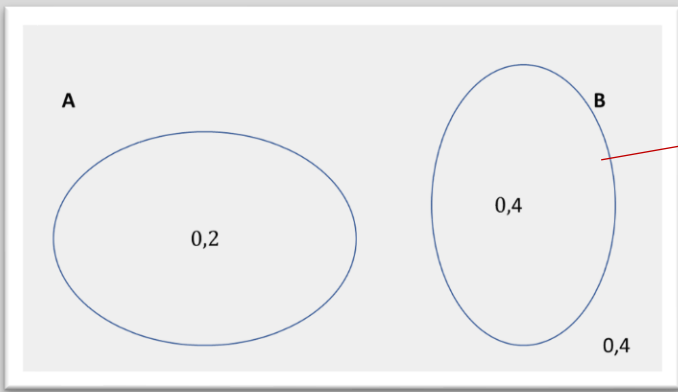
ա.  $P(A \cup B)$

բ.  $P(A \cap B')$

գ.  $P(A' \cap B')$

ա.





$A$  և  $B$  անհամատեղելի են, հետևաբար նրանք չեն հատվում և  $P(A \cap B) = 0$ :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0,2 + 0,4 = 0,6$$

$A$  և  $B$  անհամատեղելի են, հետևաբար  $P(A \cap B) = 0$ :

բ.  $P(A \cap B') = P(A) = 0,2$

Քանի որ  $A$  և  $B$  չեն հատվում, ապա «ոչ  $B$ » հատվում է ամբողջ  $A$ -ի հետ:

գ.  $P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,6 = 0,4$

«ոչ  $A$ » և «ոչ  $B$ » հատումը  $S$ -ն է՝ հանած  $A$  և  $B$  միավորումը: Հիշենք, որ  $P(S) = 1$ :

**Օրինակ 14**

3.  $A$  և  $B$  երկու անկախ պատահույթներ են,  $P(A) = \frac{1}{3}$ ,  $P(B) = \frac{1}{5}$ : Գտնել.

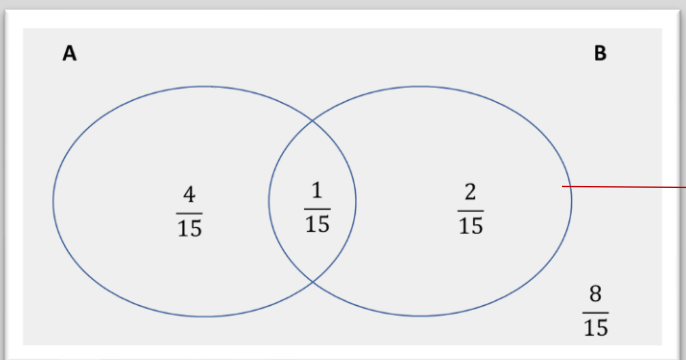
ա.  $P(A \cap B)$

բ.  $P(A \cap B')$

գ.  $P(A' \cap B')$

ա.  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$

$A$  և  $B$  անկախ են, հետևաբար կարող ենք կիրառել պարզ բազմապատկման օրենքը:



Վեննի դիագրամը կօգնի պատասխանել հաջորդ հարցերին ևս:

բ.  $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} - \frac{1}{15} = \frac{4}{15}$

$A$ -ի և «ոչ  $B$ »-ի հատումը դա  $A$ -ն է՝ առանց  $A$  -ի ու  $B$ -ի հատման:

Այլընտրանքային լուծում.

Եթե  $A$  և  $B$  անկախ պատահույթներ են, ապա  $A$  և  $B'$  նույնպես անկախ են: Չետևաբար.

$P(A \cap B') = P(A) \cdot P(B') = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{15}$ , ինչն էլ արդեն ստացել էինք:

$$\begin{aligned} \text{գ. } P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{15} = \frac{7}{15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A' \cap B') &= 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15} \end{aligned}$$

Այլընտրանքային լուծում.

Եթե  $A$  և  $B$  անկախ պատահույթներ են, ապա  $A'$  և  $B'$  նույնպես անկախ են: Չետևաբար.

$$\begin{aligned} P(A' \cap B') &= P(A') \cdot P(B') \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}, \end{aligned}$$

ինչպես նախորդ լուծման դեպքում:

Միավորման հավանականությունը հաշվեցինք **Գումարման օրենքից**: Մենք կարող ենք օգտագործել ա. -ի պատասխանը կամ ուղղակի գումարել հավանականությունները Վեննի դիագրամից: Վերջնական պատասխանն իհարկե կարելի է պարզապես գտնել դիագրամից:

$$\begin{aligned} \text{Օգտագործել } P(A') &= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \text{ և} \\ P(B') &= 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

### Օրինակ 15

Երկու զանո՞ կարմիր և կապույտ, նետում են և գրանցում դրանց բացված թվերը:  $A$  -ն «կարմիր զանո՞ վրա կբացվի 3» պատահույթն է,  $B$ -ն՝ «կապույտ զանո՞ վրա կբացվի 3» պատահույթն է,  $C$ -ն՝ «զանո՞րի վրա բացված թվերի գումարը 5 է» պատահույթն է, իսկ  $D$ -ն՝ «երկու զանո՞ վրա կբացվի նույն թիվը» պատահույթն է: Ցույց տալ, որ

ա.  $A$  և  $B$  անկախ են

բ.  $C$  և  $D$  անհամատեղելի են

ա. Պատկերենք ելքերի 1-6 արժեքների տարածությունը. ներքևում՝ կարմիր զանո՞ համար, ձախ կողմում՝ կապույտ զանո՞ համար:

		<b>A</b>						
	<b>6</b>	x	x	x	x	x	x	
	<b>5</b>	x	x	x	x	x	x	
	<b>4</b>	x	x	x	x	x	x	
Կարգը	<b>3</b>	x	x	x	x	x	x	<b>B</b>
	<b>2</b>	x	x	x	x	x	x	
	<b>1</b>	x	x	x	x	x	x	
		<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	
		Կարմիր զանո						

Յուրաքանչյուր փորձի համար կա 6 ելք, որոնք համընկնում են «երկու 3» դեպքում:

Կա  $6 \times 6 = 36$  հավասարահնարավոր ելք:

Բազմապատկենք երկու հավանականությունները և ցույց տանք, որ այն հավասար է հատման հավանականությանը:

$$P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{6} \quad P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{36}$$

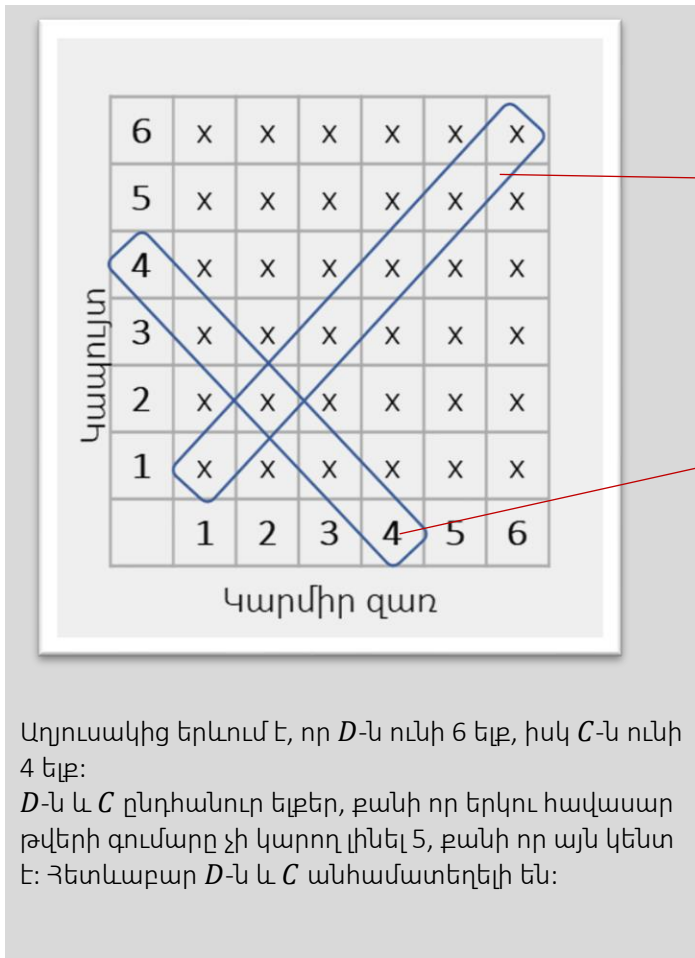
$$P(A) \cdot P(B)$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

$$= P(A \cap B)$$

Չետևաբար  $A$  և  $B$  անկախ են:

բ.



*D* ունի 6 ելք.  
 (1,1) (2,2) (3,3)  
 (4,4) (5,5) (6,6)

*C* ունի 4 ելք.  
 (4+1) (3+2)  
 (2+3) (1+4)

Աղյուսակից երևում է, որ *D*-ն ունի 6 ելք, իսկ *C*-ն ունի 4 ելք:  
*D*-ն և *C* ընդհանուր ելքեր, քանի որ երկու հավասար թվերի գումարը չի կարող լինել 5, քանի որ այն կենտ է: Հետևաբար *D*-ն և *C* անհամատեղելի են:

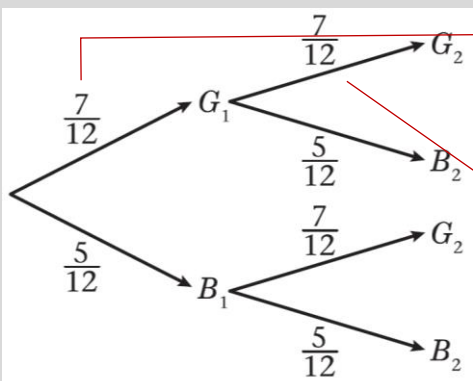
**Օրինակ 16**

Բաժին 5.5 -ի Օրինակ 12-ում պարկից գնդակները հանում են առանց վերադարձնելու: Այս օրինակում գնդակները վերցնում ենք վերադարձնելով:

Պարկում կա 7 կանաչ և 5 կապույտ գնդակ: Պարկից պատահականորեն հանում են մեկ գնդակ, գրանցում գույնը ապա վերադարձնում պարկի մեջ: Ապա պարկից հանում են երկրորդ գնդակը և գրանցում դրա գույնը:

**ա.** Գտնել հավանականությունը, որ գնդակներից մեկը կանաչ է, մյուսը՝ կապույտ:

**բ.** Ցույց տալ, որ «առաջին գնդակը կանաչ է» և «երկրորդ գնդակը կանաչ է» պատահույթները անկախ են:



Ելքերի տարածությունն ունի 12 տարր՝ 7 կանաչ և 5 կապույտ: Առաջին ճյուղը ներկայացնում է  $G_1$  «առաջինն ընտրվել է կանաչ գնդակ» պատահույթը, ներքևի ճյուղը՝  $B_1$  «առաջինն ընտրվել է կապույտ գնդակ» պատահույթը:

Պարկում դեռ 12 գնդակ կա, քանի որ գնդակները վերադարձվում են:

Երկրորդ մակարդակի ճյուղերի վրա հավանականությունները մնում են նույնը, քանի որ գնդակները վերադարձվում են պարկի մեջ:

«Երկրորդ գնդակը կանաչ է» պատահույթը դիագրամի վրա ունի երկու արմատ. առաջինը կանաչ, երկրորդը կանաչ կամ առաջինը կապույտ, երկրորդը կանաչ:

$G_1 \cap G_2$  «առաջինը կանաչ, երկրորդը կանաչ» պատահույթն է ծառածև դիագրամից:

ա.  $P$ (մի գնդակը կանաչ է, մյուս գնդակը կապույտ)

$$P(G_1 \cap B_2) + P(B_1 \cap G_2)$$

$$\frac{7}{12} \cdot \frac{5}{12} + \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{12} = \frac{35}{72}$$

$$\text{բ. } P(G_1) = \frac{7}{12}$$

$$P(G_2) = \frac{7}{12} \cdot \frac{7}{12} + \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{12} = \frac{7}{12}$$

$$P(G_1 \cap G_2) = \frac{7}{12} \cdot \frac{7}{12} = P(G_1) \cdot P(G_2)$$

Հետևաբար «առաջին գնդակը կանաչ է» և «երկրորդ գնդակը կանաչ է» պատահույթները անկախ են:

Սա **վերադարձով** փորձերի հատկությունն է:

**Առաջադրանք 52**

6.  $A$  և  $B$  պատահույթներն անհամատեղելի են և  $P(A) = 0,2$ ,  $P(B) = 0,5$  :

ա. Գծել Վենսի դիագրամ այս պատահույթները ցույց տալու համար:

բ. Գտնել  $P(A \cup B)$

գ. Գտնել  $P(A' \cap B')$ :

7.  $A$  և  $B$  պատահույթներն անկախ են և  $P(A) = \frac{1}{4}$ ,  $P(B) = \frac{1}{5}$ :

Գտնել.

ա.  $P(A \cap B)$

բ.  $P(A \cap B')$

գ.  $P(A' \cap B')$

8.  $Q$  և  $R$  երկու պատահույթներ են, այնպես որ  $P(Q) = 0,2$ ,  $P(R) = 0,4$  և  $P(Q' \cap R) = 0,4$ : Գտնել.

ա.  $Q$  և  $R$  պատահույթների միջև կապը:

բ.  $P(Q \cup R)$

գ.  $P(Q' \cap R')$

9. Նետում են երկու չկեղծված զառ և գրանցում նրանց վրա բացված թվերը: Ցույց տալ, որ «բացված թվերի գումարը 4 է» և «երկու զառի վրա բացվում է նույն թիվը» պատահույթները անհամատեղելի չեն:

10. Պարկում կա 3 կարմիր և 5 կապույտ գնդակ: Պատահականորեն ընտրում են մեկ գնդակ, գրանցում գույնը գնդակը վերադարձնում պարկի մեջ: Հանում են երկրորդ գնդակը և գրանցում գույնը:

ա. Գտնել հավանականությունը, որ երկու գնդակն էլ կապույտ են:

բ. Գտնել հավանականությունը, որ երկրորդ գնդակը կապույտ է:

11. Արկղում կա 24 էլեկտրական սարք, որից 4-ը անսարք են: Արկղից պատահականորեն ընտրում են երկու սարք: Գտնել հավանականությունը, որ

ա. կընտրեն 2 անսարք էլեկտրական սարք, եթե առաջին սարքը հանելուց հետո այն վերադարձրել են արկղի մեջ:

բ. Կընտրեն 2 անսարք էլեկտրական սարք, եթե առաջին սարքը հանելուց հետո այն չեն վերադարձրել արկղի մեջ:

գ. Կընտրեն 1 անսարք և 1 սարքին էլեկտրական սարք, եթե առաջինն հանելուց հետո չեն վերադարձրել արկղի մեջ:

12. Պարկում կա 1 կարմիր, 2 կապույտ և 3 կանաչ ժետոն: Պատահականորեն ընտրում են մեկ ժետոն, գրանցում գույնը, վերադաձնում պարկի մեջ և հանում երկրորդ ժետոնը:

ա. Գծել ծառածև դիագրամ՝ ցույց տալով բոլոր հնարավոր ելքերը

Գտնել հավանականությունը, որ

բ. երկուսն էլ ունեն նույն գույնը

գ. երկուսն էլ ունեն տարբեր գույներ

13. Պոլն ու Ջիլը որոշեցին սեղանի խաղ խաղալ: Պոլի հաղթելու հավանականությունը 0,25 է, իսկ Ջիլինը՝ 0,3: Նրանք որոշեցին խաղալ 3 անգամ: Տրված է, որ խաղի արդյունքներն իրարից անկախ են: Գտնել հավանականությունը, որ

ա. Պոլը 3 խաղն էլ կհաղթի:

բ. Բոլոր խաղերում կգրանցվի ոչ-ոքի

գ. Ջիլը կհաղթի 2 անգամ, իսկ Պոլը՝ 1

գ. Երկուսն էլ կհաղթեն մեկական անգամ

Հավանականությունների տեսության խնդիրների լուծում

Դիագրամների կամ այլ գծագրերի պատկերումը ինդիքների լուծման համար լավ եղանակ է:  
Հաճախ գծագրերը լուծումը սկսելու առաջնային կարևոր քայլն է:

### Օրինակ 17

Տեղական կառավարման խորհուրդը բաղկացած է 100 ընտրվող անդամներից: Անդամներից 45-ը Աշխատանքի, 25-ը Ժողովրդավար, իսկ 30-ը Պահպանողական կուսակցություններից են: Պետք է պատահականորեն ընտրել երեք հոգուց կազմված պատվիրակություն: Գտնել հավանականությունը, որ

ա. պատվիրակությունում կա ներկայացուցիչ բոլոր կուսակցություններից

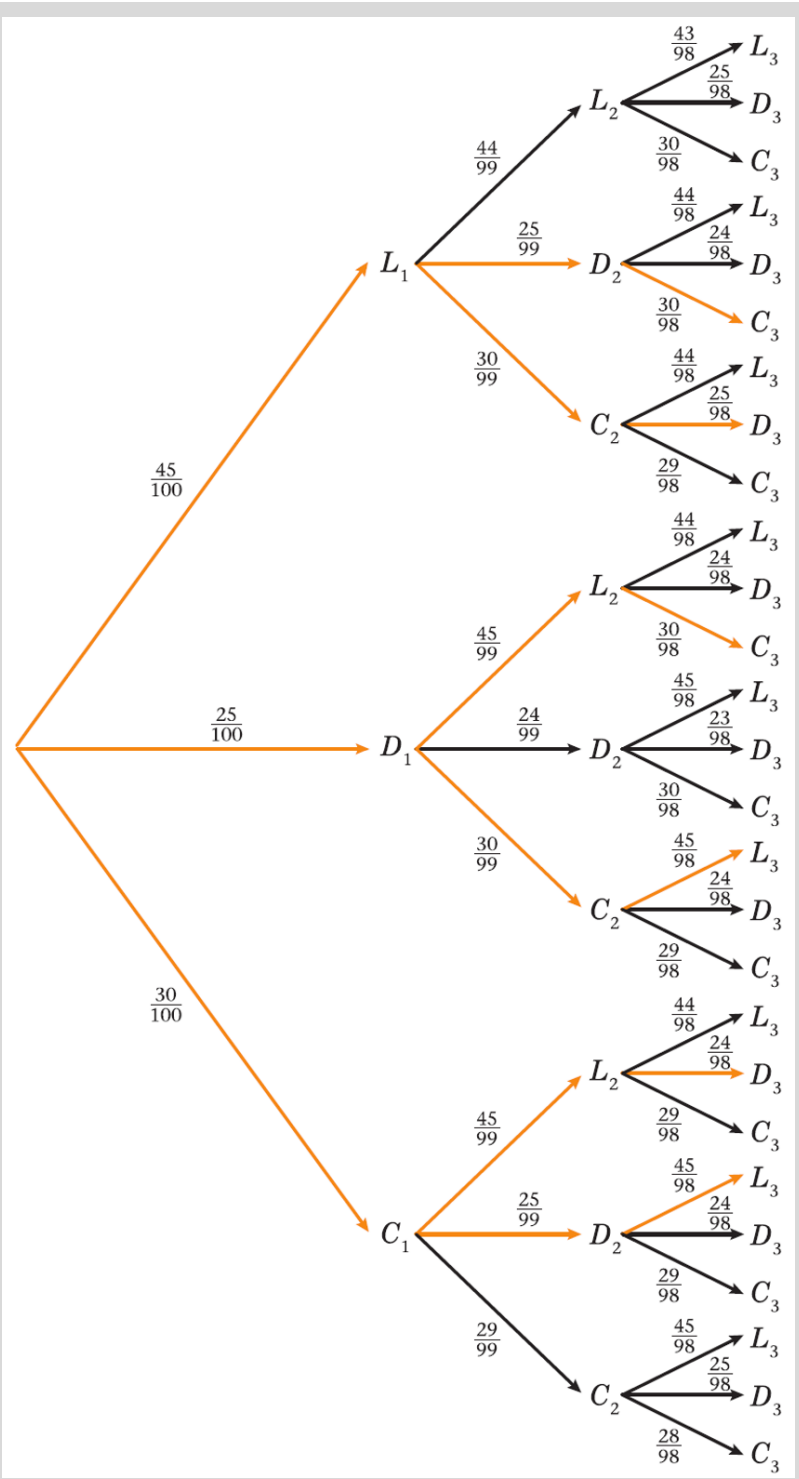
բ. ներկայացուցիչներից 2-ը Աշխատանքի, իսկ 1-ը Պահպանողականների կուսակցությունից են

Բոլոր կուսակցություններից ներկայացուցիչ ունենալու համար պետք է դիտարկենք ծառաձև դիագրամի այն ուղիները, որտեղ կա մեկ L, մեկ D, մեկ C:

Սկզբում կարելի է ընտրել երեք ճյուղերից ցանկացածը, ապա երեքից երկուսը, իսկ վերջում միայն մեկը:

Հետևաբար ընդամենը կա  $3 \times 2 \times 1 = 6$  ուղի, որոնք նկարում պատկերված են նարնջագույն:

Յուրաքանչյուր ուղի ունի կոտորակների հայտարարում ունի 100, 99, 98: Յուրաքանչյուր ուղի կոտորակի համարիչում ունի 45, 25 կամ 30:



L- Labour (Աշխատանք)-, D- Democrat (Ժողովրդավար), C- Conservative (Պահպանողական) անգլերեն անվանումներից



ա.  
 $P(\text{պատվիրակությունում կա ներկայացուցիչ բոլոր կուսակցություններից})$   
 $= 6 \cdot \frac{45}{100} \cdot \frac{30}{99} \cdot \frac{25}{98} = \frac{225}{1078}$

6 ուղիների երկայնքով բազմապատկել հավանականությունները, ապա գումարել այդ 6 ուղիների արդյունքները:

բ.  
 $P(2 \text{ Աշխատանքի, } 1 \text{ Պահպանողականների կուսակցությունից})$   
 $= 3 \cdot \frac{45}{100} \cdot \frac{44}{99} \cdot \frac{30}{98} = \frac{9}{49}$

Պետք է գտնենք 2 L և 1C պարունակող ուղիները:

Կա 3 ուղի.  $L_1L_2C_3, L_1C_2L_3, C_1L_2L_3$ :  
 Յուրաքանչյուր կոտորակի համարիչը 45, 44, 30 է, իսկ հայտարարը՝ 100, 99, 98:

S1-ում այսպիսի բարդ դիագրամների պատկերում չի նախատեսվում, բայց ծառածև դիագրամի կառուցվածքը կօգնի հաշվել խնդրի պայմանին համապատասխանող ուղիների քանակը: S2 գրքում կներկայացվի ֆակտորիալը և բանաձև, որն էլ կհեշտացնի հաշվել ավելի բարդ իրավիճակներում բոլոր հնարավոր ուղիների թիվը:

**Օրինակ 18**

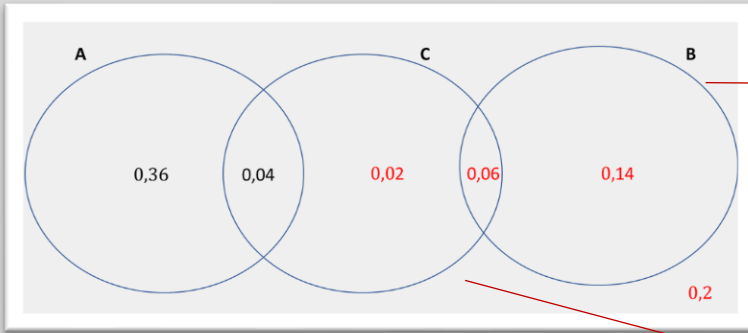
Ելքերի S տարածությունում A, B, C պատահույթներն այնպիսին են, որ  $P(A) = 0,4, P(B) = 0,2, P(A \cap C) = 0,04$  և  $P(B \cup C) = 0,44$ : A և B պատահույթներն անհամատեղելի են, իսկ B և C պատահույթներն անկախ են:

ա. Գծել Վեննի դիագրամ այս երեք պատահույթների և ելքերի S տարածության միջև առընչությունները ցույց տալու համար:

Գտնել

- բ.  $P(B|C)$       գ.  $P(C)$       դ.  $P(B \cap C)$       ե.  $P(A' \cap B' \cap C')$       զ.  $P(C \cap B')$

ա.



$A$  և  $B$  անհամատեղելի են, հետևաբար չեն հատվում:  
 $P(A \cap C) = 0,04 > 0$ , հետևաբար  $A$  և  $C$  հատվում են:  
 $B$  և  $C$  անկախ են և հատվում են, քանի որ  $P(B) > 0$  և  $P(C) > 0$ :

Դիագրամն առանց հավանականությունների ցույց է տալիս պատահույթների միջև առընչությունները, իսկ հավանականությունների ավելացնելը օգնում է մնացած հարցերին պատասխանելու համար:

Օգտվել **Գումարման օրենքից** և փոխարինեն  $P(B \cap C)$ -ն  $P(B)P(C)$ -ով, քանի որ  $B$  և  $C$  անկախ են:

Կարմիր հավանականություններն ավելացնենք Վեննի դիագրամում:

Սա երեք կորերից դուրս մակերեսն է:

Այս արժեքները վերցրել ենք Վեննի դիագրամից:

բ.  $P(B|C) = 0,2$

գ.  $P(B \cap C) = P(B) + P(C) - P(B \cup C)$

$P(B)P(C) = 0,2 + P(C) - 0,44$

$0,2P(C) = P(C) - 0,24$

$0,8P(C) = 0,24$

$P(C) = 0,3$

դ.  $P(B \cap C) = p(B)P(C)$

$= 0,2 \cdot 0,3 = 0,06$

ե.  $P(A' \cap B' \cap C') = 0,2$

զ.  $P(C \cap B') = 0,04 + 0,2 = 0,24$

**Օրինակ 19**

Քոլոջի 100 աշակերտ սովորում են Ֆրանսերեն, Գերմաներեն և Իսպաներեն: Աշակերտներից 64-ը աղջիկ են, մնացածը՝ տղա: Ֆրանսերեն սովորող 50 աշակերտից 40-ն աղջիկ է, իսկ Գերմաներեն սովորող 30 աշակերտից 10-ն է աղջիկ:

Գտնել հավանականությունը, որ պատահականորեն ընտրված աշակերտը

ա. Իսպաներեն է սովորում

բ. տղա է, եթե հայտնի է, որ նա Իսպաներեն է սովորում:

Հարցումը ցույց տվեց, որ Ֆրանսերեն սովորողների 70%-ը, Գերմաներեն սովորողների 80%-ը և Իսպաներեն սովորողների 60%-ը դիմել են համալսարան ընդունվելու համար:

Պատահականորեն ընտրել են մեկ աշակերտ:

գ. Գտնել հավանականությունը, որ այդ աշակերտը դիմել է համալսարան:

դ. Տրված է, որ աշակերտը դիմել է համալսարան ընդունվելու համար: Գտնել հավանականությունը, որ նա Ֆրանսերեն է սովորում:

	Աղջիկ	Տղա	Ընդամենը
Ֆրանսերեն	40	10	50
Գերմաներեն	10	20	30
Իսպաներեն	14	6	20
<b>Ընդամենը</b>	<b>64</b>	<b>36</b>	<b>100</b>

Յուրաքանչյուր տողում անհայտները կարող ենք գտնել տարբերությունը հաշվելով:

Իսպաներեն սովորողների թիվը հավասար է ընդամենը հանած Գերմաներեն և Ֆրանսերեն սովորողների թիվը:

ա.  $P(\text{Իսպաներեն}) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$

բ.  $P(\text{Տղա} | \text{Իսպաներեն}) = \frac{P(\text{Տղա և Իսպաներեն})}{P(\text{Իսպաներեն})}$

$$= \frac{6}{20} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

գ.  $P(\text{դիմել է համալսարան}) = \frac{50}{100} \cdot 0,70 + \frac{30}{100} \cdot 0,80 + \frac{20}{100} \cdot 0,60 = 0,71$

դ.  $P(\text{Ֆրանսերեն սովորողը դիմել է համալսարան}) = \frac{P(\text{Ֆրանսերեն և համալսարան})}{P(\text{համալսարան})}$

$$= \frac{\frac{50}{100} \cdot 0,70}{\frac{71}{100}} = \frac{35}{71}$$

Կիրառել պայմանական հավանականության սահմանումը և տեղադրել աղյուսակի արժեքները:

Հերթով վերցնել լեզուները և բազմապատկել համալսարան դիմածների տոկոսային մասով և բաժանել աշակերտների ընդհանուր թվի՝ 100-ի վրա:

Կիրառել պայմանական հավանականության սահմանումը և տեղադրել արժեքները աղյուսակից և գ.-ից:

### Խառը Առաջադրանքներ

1.  $A$  և  $B$  պատահույթների համար  $P(A) = \frac{1}{3}$ ,  $P(B) = \frac{1}{4}$ , իսկ  $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$ :

ա. Ցույց տալ, որ  $A$  և  $B$  պատահույթներն անկախ են:

բ. Ներկայացնել այս հավանականությունները Վեննի դիագրամով:

գ. Գտնել  $P(A|B')$ :

2. Համակարգչային խաղն ունի երեք մակարդակ: Ամեն մակարդակի նպատակն է ստանալ ադամանդ: Պատահականորեն ընտրված խաղացողի դեպքում առաջին մակարդակում ադամանդ ստանալու հավանականությունը  $\frac{4}{5}$  է, երկրորդ մակարդակում ստանալու հավանականությունը  $\frac{2}{3}$ , իսկ երրորդում  $\frac{1}{2}$ : Պատահույթներն անկախ են:

ա. Երեք մակարդակներում ադամանդների ստանալու համար Պատկերել Վեննի դիագրամ:

Գտնել հավանականությունը, որ պատահականորեն ընտրված խաղացողը

բ. կստանա բոլոր երեք ադամանդները

գ. կստանա միայն մեկ ադամանդ

3. Առցանց կարդացողների ակումբն ունի 50 անդամ: Նրանցից 15 ձեռնոց է կրում, 18 հոգի ձախիկ է, իսկ 21 հոգի՝ կին: Կանանցից 4-ը ձախիկ է, 3 կին ձեռնոց է կրում, իսկ անդամներից 5-ը ձեռնոց է կրում և ձախիկ է: Միայն մի անդամ կա, որ ձեռնոց է կրում, ձախիկ է և կին:

ա. Այս տվյալները ներկայացնելու համար պատկերել Վեննի դիագրամ:

Անդամներից պատահականորեն ընտրել են մեկին: Գտնել հավանականությունը, որ այդ անդամը

բ. կին է, ձեռնոց չի կրում և ձախիկ չէ:

գ. տղամարդ է, ձեռնոց չի կրում և ձախիկ չէ:

դ. ձեռնոց է կրում, եթե տրված է, որ նա կին է և ձախիկ:

4.  $J, K$  պատահույթների համար  $P(J \cup K) = 0,5$ ,  $P(J' \cap K) = 0,2$ ,  $P(J \cap K') = 0,25$ :

ա.  $J, K$  պատահույթների և նմուշների  $S$  տարածության համար պատկերել Վեննի դիագրամ:

Գտնել.

բ.  $P(J)$

բ.  $P(K)$

գ.  $P(J|K)$

դ. Պարզել, թե  $J$  և  $K$  անկախ են թե՞ ոչ:

5. Պարկում կա 15 գունավոր գնադակ. 7 կարմիր, 3 կապույտ և 5 կանաչ: Պարկից պատահականորեն հանում են 3 գնդակ՝ առանց վերադարձնելու: Գտնել հավանականությունը, որ

ա. առաջին և երկրորդ գնդակները կարմիր են, իսկ երրորդը՝ կապույտ կամ կանաչ

բ. հանել են մեկական կարմիր, կապույտ և կանաչ գնդակ:

6. Ուսանողների հետ հարցումը ցույց տվեց, որ նրանց 85%-ն ունի բջջային հեռախոս, 60%-ը՝ նվազարկիչ, իսկ 5%-ը ոչ մեկից չունի:

ա. Գտնել, թե ուսանողների որ մասը երկուսից էլ ունի:

բ. Այս տեղեկությունները ներկայացնել Վեննի դիագրամով:

Տրված է, որ պատահականորեն ընտրված ուսանողն ունի բջջային հեռախոս կամ նվազարկիչ.

գ. Գտնել հավանականությունը, որ ուսանողն ունի բջջային հեռախոս:

7. Գործարանում  $A$ ,  $B$  և  $C$  հաստոցներով արտադրում են էլեկտրոնային սարքավորումների մասեր:  $A$  հաստոցը պատրաստում է բոլոր մասերի 16%-ը,  $B$  հաստոցը պատրաստում է բոլոր մասերի 50%-ը, իսկ  $C$  հաստոցը՝ մնացածը: Արտադրված մասերի մեջ որոշները թերություններ ունեն:  $A$  հաստոցը թերություններով է պատրաստում է 4% -ը,  $B$  հաստոցը՝ 3%-ը, իսկ  $C$  հաստոցը՝ 7%-ը:

ա. Այս տեղեկությունները պատկերել ծառածև դիագրամի տեսքով

Գտնել հավանականությունը, որ պատահականորեն ընտրված մասը

բ. պատրաստվել է  $B$  հաստոցով և այն թերություններ ունի

գ. թերություններ ունի

Տրված է, որ պատահականորեն ընտրված մասը թերություններ ունի:

դ. գտնել հավանականությունը, որ մասը պատրաստվել է  $B$  հաստոցով:

8. Ավտոպարկում վաճառում են երեք տեսակի վառելիք. U95, U98 և դիզելային: Ավտոպարկից վառելիք գնող 200 վարորդների հետ հարցումը ցույց տվեց, որ նրանցից 80 հոգին կին է, մնացածը՝ տղամարդ: U95 գնող բոլոր 90 վարորդներից կին է 50 հոգին, իսկ 70 հոգի դիզելային գնողներից տղամարդ է 60-ը: Վարորդները մեկից ավել տեսակի վառելիք չեն գնում:

Գտնել հավանականությունը, որ պատահականորեն ընտրված վարորդը

ա. գնում է U98 տեսակի վառելիք

բ. տղամարդ է, եթե տրված է, որ վարորդը գնել է U98

Ավտոպարկի գրանցամատյանում երևում է, որ U95 գնողների 10%-ը, U98 գնողների 30%-ը, դիզելային գնողների 40%-ը իրենց մեքենաները ստուգում են այդ ավտոպարկում:

Պատահականորեն ընտրում են մեկ վարորդ:

գ. գտնել հավանականությունը, որ վարորդը իր մեքենան ստուգում է այս ավտոպարկում

դ. տրված է, որ վարորդն իր մեքենան ստուգում է այս ավտոպարկում: Գտնել հավանականությունը, որ նա գնում է դիզելային վառելիք:

9. 150 երեխաների համար հետազոտություն արվեց, պարզելու թե որ մուլտֆիլմերն են ամենասիրվածը: Ստացվեցին հետևյալ արդյունքները.

35 նայում են Տունթայմ

54 նայում են Խոզուկը

62 նայում են Սքեյինգթոն

9 նայում են Տունթայմ և Խոզուկը

14 նայում են Խոզուկը և Սքեյինգթոն

12 նայում են Տունթայմ և Սքեյինգթոն

4 նայում են Տունթայմ, Խոզուկը և Սքեյինգթոն

ա. Այս տվյալները ներկայացնել Վենսի դիագրամով

Գտնել հավանականությունը, որ պատահականորեն ընտրված երեխան

բ. այս մուլտֆիլմերից ոչ մեկը չի նայում

գ. մեկ մուլտֆիլմից ավելի մուլտֆիլմ չի նայում

Պատահականորեն ընտրված երեխան նայում է միայն մեկ մուլտֆիլմ:

դ. Գտնել հավանականությունը, որ նա նայում է Սքեյինգթոն

Պատահականորեն ընտրել են 2 երեխա:

ե. Գտնել հավանականությունը, որ նրանք նայում են Սքեյինգթոն

10. Գինու համտեսի ակումբի անդամները ամուսնացած զույգեր են: Որևէ ամուսնական զույգի համար 0,7 հավանականությամբ ամուսինը թոշակառու է, իսկ 0,4 հավանականությամբ՝ կինը: Եթե տրված է, որ կինը թոշակառու է, ապա ամուսնու թոշակառու լինելու հավանականությունը 0,8 է:

Ակումբի անդամներից պատահականորեն ընտրված ամուսնական զույգի համար գտնել հավանականությունը, որ

ա. երկուսն էլ թոշակառու են

բ. միայն մեկն է թոշակառու

գ. նրանցից ոչ մեկը թոշակառու չէ

Պատահականորեն ընտրել են երկու ամուսնական զույգ:

դ. Գտնել հավանականությունը ամուսիններից միայն մեկը և կանանցից միայն մեկն է թոշակառու:

## §36. Դիսկրետ պատահական մեծություններ

Այս գլուխը յուրացնելուց հետո դուք կկարողանաք.

- Հասկանալ, թե որն է դիսկրետ պատահական մեծությունը
- Ինչպես են առաջանում դիսկրետ պատահական մեծությունները
- Գտնել դիսկրետ պատահական մեծության կոմոլյատիվ բաշխման ֆունկցիան
- Գտնել դիսկրետ պատահական մեծության միջինն ու դիսպերսիան
- Գտնել դիսկրետ հավասարաչափ բաշխումը

Խաղարկության ժամանակ մասնակիցը հնարավորություն ունի ընտրել հինգ սովորական ծրարներից մեկը, եթե վճարի 10 դոլար: Մի ծրարի մեջ կա սովորական թղթի կտոր, մյուսի մեջ 5 դոլարանոց թղթադրամ, երրորդի մեջ՝ 10 դոլարանոց թղթադրամ, չորրորդի մեջ՝ 20 դոլարանոց թղթադրամ, իսկ վերջինի մեջ՝ 50 դոլարանոց թղթադրամ: Միջինում ինչքա՞ն գումար կշահի նա և արդյոք դա ազնիվ խաղ է: Այս գլխի վերջում դուք ի վիճակի կլինեք պատասխանել այս բոլոր հարցերին:

**1. Դիսկրետ պատահական մեծությունը կարող է նկարագրվել որպես իրական կյանքում փորձի արդյունքում գրանցված արժեք: Պատական մեծությունը պետք է ընդունի թվային արժեքներ:**

- Փոփոխականը ներկայացվում է սիմվոլներով ( $X$ ,  $Y$ ,  $A$ ,  $B$  և այլն) և կարող է ընդունել ցանկացած արժեք տրված արժեքների բազմությունից:
- Երբ փոփոխականը ներկայացնում է ինչ-որ փորձի արդյունք, այն կոչվում է պատահական մեծություն:
- Փորձի բոլոր հնարավոր արդյունքների բազմությունը նաև կոչվում է սմուլների տարածություն:

Երբեմն դուք կուզենաք տարբերել  $X$  պատահական մեծությունը նրա ընդունած որևէ արժեքից:

- Լատինատառ մեծատառերը՝ օրինակ  $X$ , օգտագործվում են պատահական մեծությունները նկարագրելու համար, իսկ փոքրատառերով՝ օրինակ  $x$  նշանակում են պատահական մեծության ընդունած որևէ արժեքը:
- Հավանականությունը, որ  $X$ -ը հավասար է որևէ  $x$ -ի նշանակվում է այսպես.  $P(X = x)$  իսկ երբեմն նաև  $p(x)$ : Այս երկու նշանակումները մեկը մյուսին համարժեք են և կարող են փոխարինել իրար:

$X$  պատահական մեծության համար.

- $x$ -ը  $X$ -ի որևէ արժեք է
- $P(X = x)$  նշանակում է հավանականությունը, որ  $X$ -ը հավասար է  $x$ -ի:

Պատահական մեծությունները կարող են լինել դիսկրետ կամ անընդհատ:

- Անընդհատ պատահական մեծությունը այն մեծությունն է, որը կարող է ընդունել կամայական արժեք որևէ անընդհատ բազմությունից:
- Դիսկրետ պատահական մեծությունն ընդունում է միայն դիսկրետ արժեքներ:

Այս գլխում կդիտարկենք միայն դիսկրետ պատահական մեծությունները:



### Օրինակ 1

Մետաղադրամը նետում են 6 անգամ և գրանցում զինանշանի բացվելու  $X$  քանակը: Գրել  $X$ -ի բոլոր հնարավոր արժեքները:

$X$ -ի բոլոր հնարավոր արժեքներն են.  
 $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$  կամ  $6$

Մետաղադրամի նետումը փորձ է:  $X$ -ի հնարավոր արժեքները փորձի հնարավոր արդյունքներն են:

### Օրինակ 2

Ստուգել, թե հետևյալ մեծություններից որն է դիսկրետ պատահական մեծություն:

- ա. Մի խումբ տղաների հասակների միջինը
- բ. Մետաղադրամների նետումների քանակը՝ մինչև զինանշանի բացվելը
- գ. Տարվա մեջ ամիսների քանակը

ա. դիսկրետ պատահական մեծություն չէ  
բ. դիսկրետ պատահական մեծություն է  
գ. դիսկրետ պատահական մեծություն չէ

Հասակը չափվում է անընդհատ միջակայքում  
Փորձերի քանակը ցույց տվող թիվն է  
Այն փոփոխական չի և չի հանդիսանում փորձի արդյունք

### 2. Դիսկրետ պատահական մեծությունը կարող է որոշվել, եթե տրվեն փորձի բոլոր հնարավոր արդյունքները կամ պատահական մեծության բոլոր հնարավոր արժեքները և նրանց հանդիպելու հավանականությունները:

- Պատահական մեծության ամբողջական նկարագրի համար անհրաժեշտ է իմանալ դրա բոլոր հնարավոր արժեքների բազմությունը և յուրաքանչյուրի հանդիպելու հավանականությունը:
- Կարելի է կառուցել աղյուսակ ցույց տալու համար, թե փորձի յուրաքանչյուր արդյունքի հավանականությունը: Դա կոչվում է հավանականությունների բաշխում:
- Կարելի է նաև դիսկրետ պատահական մեծությունը ներկայացնել ֆունկցիայի տեսքով: Օրինակ 3-ում նկարագրված պատահական մեծությունը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով.  
 $P(X = x) = \frac{1}{6}$ , երբ  $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

Սա կոչվում է հավանականությունների բաշխում (տես օրինակ 4-ում):

### Օրինակ 3

Նետում են կանոնավոր զառ: Գրել որևէ թիվ բացվելու հավանականությունը:

$x$	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Սրանք հնարավոր արժեքներն են  
Սրանք արժեքների հավանականություններն են

#### Օրինակ 4

Նետել են 3 չկեղծված զառ և հաշվել զինանշան (2) բացվելու քանակը: Այս փորձի համար.

ա. գրել նմուշների տարածությունը

բ. գրել հավանականությունների բաշխումը

գ. գրել հավանականության ֆունկցիան

ա.

2	2	2
2	2	4
2	4	2
2	4	4
4	2	2
4	2	4
4	4	2
4	4	4

բ.

Չինանշանի նի քանակը, $x$	0	1	2	3
$P(X = x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

գ.  $P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{8}, & x = 0, 3 \\ \frac{3}{8}, & x = 1, 2 \\ 0, & \text{հակառակ դեպքում} \end{cases}$

Փորձի արդյունքներն են

Պատահական մեծության արժեքներն են

Այս ձևով ներկայացնում են հավանականությունները, երբ նրանք նույնը չեն

### 3. Դիսկրետ պատահական մեծության համար բոլոր հավանականությունների գումարը հավասար է 1-ի:

- Օրինակներ 3 և 4-ում բոլոր հավանականությունների գումարը հավասար է 1-ի.  
 $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1$  և  $\frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$
- Կամ, եթե ներկայացնենք սիմվոլներով, կստանանք.  
 $\sum p(x) = \sum P(X = x) = 1$  բոլոր  $x$ -երի համար:

Սա դիսկրետ պատահական մեծությունների կարևոր հատկությունն է, որը հաճախ օգտագործվում է նաև քննության ժամանակ:

### Օրինակ 5

Քառանիստ զառի նիստերի վրա գրված են 1, 2, 3 և 4 թվերը: Չառը կեղծված է, որի հետևանքով նետելուց հետո որևէ  $x$  թվի բացվելու հավանականությունը  $\frac{k}{x}$  է, որտեղ  $k$  -ն հաստատուն է:

Գտնել ամեն նետումից հետո բացվող  $X$  թվի հավանականությունների բաշխումը:

Հավանականության բաշխումը կլինի.

$x$	1	2	3	4
$P(X = x)$	$\frac{k}{1}$	$\frac{k}{2}$	$\frac{k}{3}$	$\frac{k}{4}$

Քանի որ սա հավանականությունների բաշխում է, ապա  $\sum P(X = x) = 1$

$$\frac{k}{1} + \frac{k}{2} + \frac{k}{3} + \frac{k}{4} = 1, \text{ հետևաբար}$$

$$k \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) = 1$$

$$k \left( \frac{12+6+4+3}{12} \right) = 1$$

$$k = \frac{12}{25}$$

Կստանանք հավանականությունների բաշխումը.

$x$	1	2	3	4
$P(X = x)$	$\frac{12}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{3}{25}$

$\sum P(X = x) = 1$  կիրառվեց  $k$ -ն գտնելու համար:

### Առաջադրանք 8Ա

- Գտնել, թե հետևյալ պատահական մեծություններից որն է դիսկրետ, որը՝ ոչ: Պատասխանը հիմնավորել.
  - Մարտկոցի կյանքի միջին տևողությունը
  - Շաբաթվա օրերի քանակը
  - Շախմատում հաղթելու համար պահանջվող քայլերի թիվը
- Զկեղծված զառը 4 անգամ նետում են և գրանցում են ամեն անգամ 6 բացվելը՝  $Y$ : Գրել  $y$ -ի բոլոր հնարավոր արժեքները:
- Պայուսակում կա երկու սկավառակ՝ վրան գրված 2 թիվը, և երկու սկավառակ՝ վրան գրված 3 թիվը: Պայուսակից պատահականորեն հանում են մեկ սկավառակ, գրանցում դրա վրա գրված

թիվը և սկավառակը վերադարձնում պայուսակի մեջ: Հանում են երկրորդ սկավառակը և գրանցում վրայի թիվը:

ա. Գրել նմուշների տարածությունը

$X$  դիսկրետ պատահական մեծությամբ նշանակված է այդ երկու թվերի գումարը:

բ. Գտնել  $X$ -ի հավանականությունների բաշխումը:

գ. Գտնել  $X$ -ի հավանականության ֆունկցիան:

4.  $X$  դիսկրետ պատահական մեծությունն ունի հետևյալ հավանականությունների բաշխումը.

$x$	1	2	3	4
$P(X = x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$k$	$\frac{1}{4}$

Գտնել  $k$ -ն:

5.  $X$  պատահական մեծությունն ունի հետևյալ հավանականության ֆունկցիան.

$$P(X = x) = kx, x = 1, 2, 3, 4:$$

Ցույց տալ, որ  $k = \frac{1}{10}$

6.  $X$  պատահական մեծությունն ունի հետևյալ հավանականության ֆունկցիան.

$$P(X = x) = \frac{x-1}{10}, x = 1, 2, 3, 4, 5:$$

Աղյուսակով ներկայացնել  $X$ -ի հավանականությունների բաշխումը:

7.  $X$  պատահական մեծությունն ունի հետևյալ հավանականության ֆունկցիան.

$$P(X = x) = \begin{cases} kx & x = 1, 3 \\ k(x-1) & x = 2, 4 \end{cases}$$

որտեղ  $k$ -ն հաստատուն է:

ա. Գտնել  $k$ -ն:

բ. Աղյուսակով ներկայացնել  $X$ -ի հավանականությունների բաշխումը:

8.  $X$  դիսկրետ պատահական մեծությունն ունի հետևյալ հավանականությունների բաշխումը.

$x$	0	1	2
$P(X = x)$	$\frac{1}{4} - a$	$a$	$\frac{1}{2} + a$

Գտնել  $a$ -ն:

4. Գտնելք հավանականությունը, որ  $X$ -ը փոքր է/մեծ է որևէ արժեքից կամ գտնվում է որոշակի երկու արժեքների միջև:

### Օրինակ 6

$X$  դիսկրետ պատահական մեծությունն ունի հետևյալ հավանականությունների բաշխումը.

$x$	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	0,1	0,2	0,3	0,25	0,1	0,05

Գտնել.

ա.  $P(1 < X < 5)$

բ.  $P(2 \leq X \leq 4)$

գ.  $P(3 < X \leq 6)$

դ.  $P(X \leq 3)$

ա.  $P(1 < X < 5) = P(X = 2, 3 \text{ կամ } 4)$   
 $= 0,2 + 0,3 + 0,25$

եթե  $X < 5$ , ապա  $X \leq 4$

$$= 0,75$$

բ.  $P(2 \leq X \leq 4) = P(X = 2, 3 \text{ կամ } 4)$

$$= 0,2 + 0,3 + 0,25$$

$$= 0,75$$

գ.  $P(3 < X \leq 6) = P(X = 4, 5 \text{ կամ } 6)$

$$= 0,25 + 0,1 + 0,05$$

$$= 0,4$$

դ.  $P(X < 3) = P(X = 1, 2 \text{ կամ } 3)$

$$= 0,1 + 0,2 + 0,3$$

$$= 0,6$$

**5. Գտնենք դիսկրետ պատահական մեծության գումարային բաշխման ֆունկցիան:**

- Եթե  $x$ -ը  $X$ -ի որևէ արժեք է, ապա  $F(x)$  – ով նշանակվում է հավանականությունը, որ  $X$ -ը փոքր կամ հավասար է  $x$ -ից:  $F(x)$  գտնելու համար գումարվում են  $x$ -ից փոքր կամ հավասար բոլոր ելքերի հավանականությունները: Գրվում է հետևյալ ձևով.

$$F(x) = P(X \leq x)$$

- Ինչպես հավանականությունների բաշխումը, գումարային բաշխման ֆունկցիան կարելի է ներկայացնել աղյուսակային տեսքով:

**Օրինակ 7**

Նետում են երկու չկեղծված մետաղադրամ:  $X$  –ը երկուսի վրա գիւնանշան բացվելու բանակն է: Աղյուսակով ներկայացնել  $X$ -ի գումարային բաշխման ֆունկցիան:

Նմուշների տարածությունն է.

22 24 42 44

Չիւնանշանի բանակը, $x$	0	1	2
$P(X = x)$	0,25	0,5	0,25
$F(x)$	0,25	0,75	1

$$F(0) = p(0) = 0,25$$

$$F(1) = p(0) + p(1)$$

$$= 0,25 + 0,5 = 0,75$$

$$F(2) = p(0) + p(1) + p(2)$$

$$= 0,25 + 0,5 + 0,25 = 1$$

**Օրինակ 8**

$X$  դիսկրետ պատահական մեծության  $F(x)$  գումարային բաշխման ֆունկցիան որոշված է հետևյալ կերպ.

$$F(X = x) = \frac{x+k}{8}; x = 1, 2 \text{ և } 3:$$

ա. Գտնել  $k$ -ի արժեքը:

բ. Գրել կուլյատիվ բաշխման ֆունկցիայի աղյուսակը:

գ. Հաշվել  $F(2,6)$  արժեքը:

դ. Գտնել  $X$ -ի հավանականությունների բաշխումը:

$$\text{ա. } F(3) = 1, \text{ հետևաբար } \frac{3+k}{8} = 1$$

$$3 + k = 8$$

$$k = 5$$

$$\text{բ. } F(2) = \frac{2+5}{8} = \frac{7}{8}$$

$$F(1) = \frac{1+5}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$x$	1	2	3
$P(X = x)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	1

$$\text{գ. } F(2,6) = F(2) = \frac{2+5}{8} = \frac{7}{8}$$

$$\text{դ. } p(1) = F(1) = \frac{3}{4}$$

$$p(2) = F(2) - F(1) = \frac{7}{8} - \frac{3}{4} = \frac{1}{8}$$

$$p(3) = F(3) - F(2) = 1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}$$

Կստանանք բաշխումը.

$x$	1	2	3
$P(X = x)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

$F(2,6)$  նշանակում է  $P(X \leq 2,6)$ : Քանի որ  $X$ -ը դիսկրետ մեծություն է, ապա 2-ի և 3-ի միջև արժեքներ չի ընդունում և հետևաբար  $F(2,6) = F(2)$ :

$X$ -ը դիսկրետ մեծություն է և ինտերպոլացիա չենք անում:

## Օրինակ 8Բ

1.  $X$  դիսկրետ պատահական մեծությունն ունի հետևյալ հավանականությունների բաշխումը.

$x$	0	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	0,1	0,1	0,3	0,3	0,1	0,1

- ա. Գտնել հավանականությունը, որ  $X < 3$
- բ. Գտնել հավանականությունը, որ  $X > 3$
- գ. Գտնել հավանականությունը, որ  $1 < X < 4$

2.  $X$  դիսկրետ պատահական մեծությունն ունի հետևյալ հավանականությունների բաշխումը.

$x$	0	1	2	3
$P(X = x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$

- ա. Գտնել  $P(1 < X \leq 3)$
- բ. Գտնել  $P(X < 2)$

3.  $X$  դիսկրետ պատահական մեծությունն ունի հետևյալ հավանականությունների բաշխումը.

$x$	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	0,1	0,1	0,15	0,25	0,3	0,1

ա. Կազմել  $F(x)$  գումարային բաշխման ֆունկցիայի աղյուսակը

- բ. Հաշվել  $F(5)$  արժեքը
- գ. Հաշվել  $F(2,2)$  արժեքը

4. Դիսկրետ պատահական մեծության  $F(x)$  գումարային բաշխման ֆունկցիան ներկայացված է հետևյալ աղյուսակում.

$x$	0	1	2	3	4	5	6
$F(x)$	0	0,1	0,2	0,45	0,5	0,9	1

ա. Բերել  $X$ -ի հավանականությունների բաշխման ֆունկցիայի աղյուսակը

- բ. Հաշվել  $P(X < 5)$  արժեքը
- գ. Հաշվել  $P(2 \leq X < 5)$  արժեքը

5.  $X$  պատահական մեծությունն ունի հետևյալ բաշխման ֆունկցիան.

$$P(X = x) = \begin{cases} kx, & x = 1, 3, 5 \\ k(x - 1), & x = 2, 4, 6 \end{cases}$$

Որտեղ  $k$ -ն հաստատուն է:

- ա. Գտնել  $k$ -ի արժեքը
- բ. Գծել  $X$ -ի հավանականությունների բաշխման աղյուսակը
- գ. Հաշվել  $P(2 \leq X < 5)$
- դ. Գտնել  $F(4)$  արժեքը
- ե. Գտնել  $F(1,6)$  արժեքը

6.  $X$  դիսկրետ պատահական մեծությունն ունի հետևյալ հավանականության ֆունկցիան.

$$P(X = x) = \begin{cases} 0,1 & x = -2, -1 \\ \alpha & x = 0, 1 \\ 0,3 & x = 2, 4, 6 \end{cases}$$

- ա. Գտնել  $\alpha$ -ի արժեքը
- բ. Գծել  $X$ -ի հավանականությունների բաշխման աղյուսակը

գ. Գտնել  $F(0,3)$  արժեքը

7.  $X$  դիսկրետ պատահական մեծությունն ունի հետևյալ հավանականության ֆունկցիան.

$$F(x) = \begin{cases} 0,1 & x = 0 \\ \frac{(x+k)^2}{16} & x = 1, 2 \text{ և } 3 \\ 1 & x > 5 \end{cases}$$

ա. Գտնել  $k$ -ի արժեքը

բ. Գծել  $X$ -ի հավանականությունների բաշխումը



### §37. Դիսկրետ պատահական մեծությունների մաթեմատիկական սպասում և դիսպերսիա

#### 6. Գտնենք դիսկրետ պատահական մեծության միջինը կամ մաթեմատիկական սպասումը

- $X$ -ի մաթեմատիկական սպասումը (սպասվող արժեքը) սահմանվում է այսպես.

$$X\text{-ի մաթեմատիկական սպասումը (սպասվող արժեքը)} = E(x) = \sum xP(X = x) = \sum xp(x)$$

- Եթե վիճակագրական փորձ կատարելիս. Գործնական արդյունքների դեպքում կառուցում են հաճախականությունների բաշխումը և միջին արժեքը, իսկ տեսական մոտեցման դեպքում ստանում ենք հավանականությունների բաշխում և մաթեմատիկական սպասում:

#### Օրինակ 9

Քաղաքի 100 տնային տնտեսություններից յուրաքանչյուրում հեռուստացույցների քանակի հարցման արդյունքներն ունեն հետևյալ հաճախականությունների բաշխումը.

Հեռուստացույցների քանակ	0	1	2	3
Հաճախականություն	10	75	10	5

ա. Գտնել այս տվյալների միջին արժեքը:

բ.  $X$  դիսկրետ պատահական մեծության համար կազմել հավանականությունների բաշխման աղյուսակը, որտեղ  $X$ -ը պատահականորեն ընտրված տնային տնտեսությունում հեռուստացույցների քանակն է

գ. Գտնել  $X$ -ի մաթեմատիկական սպասումը

$$\begin{aligned} \text{ա. միջին} &= \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{0 \cdot 10 + 1 \cdot 75 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 5}{100} \\ &= 0 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,75 + 2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,05 \\ &= 0,75 + 0,2 + 0,15 = 1,1 \end{aligned}$$

բ.

$x$	0	1	2	3
$p(x)$	0,1	0,75	0,1	0,05

գ.  $E(X) = \sum xp(x)$

$$\begin{aligned} &= 0 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,75 + 2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,05 \\ &= 0,75 + 0,2 + 0,15 = 1,1 \end{aligned}$$

$$\text{Հավանականություն} = \frac{f}{\sum f}$$

Այս օրինակում միջին  $= \frac{\sum fx}{\sum f} = 1,1$  և  $E(X) = \sum xp(x) = 1,1$ :

Միջինի և  $E(X)$ -ի հաշվարկները նման են, որի պատճառով էլ  $E(X)$ -ը երբեմն նաև կոչվում է  $X$ -ի միջին:

### Օրինակ 10

$X$  պատահական մեծությունն ունի հետևյալ հավանականությունների բաշխումը.

$x$	1	2	3	4	5
$p(x)$	0,1	$p$	0,3	$q$	0,2

ա. Կազմել  $p, q$ -ից կազմված երկու հավասարում, եթե տրված է, որ  $E(X) = 3$ :

բ. Գտնել  $p$  և  $q$ -ի արժեքները:

$$\begin{aligned} \text{ա. } p + q + 0,1 + 0,3 + 0,2 &= 1 \\ p + q &= 1 - 0,6 \\ p + q &= 0,4 \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 \cdot 0,1 + 2 \cdot p + 3 \cdot 0,3 + 4q + 5 \cdot 0,2 &= 3 \\ 2p + 4q &= 3 - (0,1 + 0,9 + 1) \\ 2p + 4q &= 1 \quad (2) \end{aligned}$$

$$\text{բ. } \begin{cases} 2p + 4q = 1 \\ p + q = 0,4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(p + q) + 2q = 1 \\ p + q = 0,4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2q + 0,8 = 1 \\ p + q = 0,4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q = 0,1 \\ p = 0,4 - 0,1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} q = 0,1 \\ p = 0,3 \end{cases}$$

### 7. Գտնենք $X^2$ -ու մաթեմատիկական սպասումը

- $E(X^2) = \sum x^2 P(X = x)$
- Սա ավելի ընդհանուր օրենքի մասնավոր դեպքն է.  $E(X^n) = \sum x^n P(X = x)$

### Օրինակ 11

$X$  դիսկրետ պատահական մեծությունն ունի հետևյալ հավանականությունների բաշխումը.

$x$	1	2	3	4
$P(X = x)$	$\frac{12}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{3}{25}$

ա. Գտնել  $X^2$ -ու հավանականությունների բաշխումը

բ. Գտնել  $E(X^2)$ :

ա.  $X^2$ -ու հավանականությունների բաշխումը.

$x$	1	2	3	4
$x^2$	1	4	9	16
$P(X = x^2)$	$\frac{12}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{3}{25}$

բ.  $E(x^2) = \sum x^2 \cdot P(x = x^2)$

$$1 \cdot \frac{12}{25} + 4 \cdot \frac{6}{25} + 9 \cdot \frac{4}{25} + 16 \cdot \frac{3}{25} = \frac{120}{25} = 4,8$$

Նկատենք, որ  $P(X = x^2) = P(X = x)$

Նկատենք, որ  $E(X) = 1,92$ ,  
 հետևաբար  $E(X^2) \neq [E(x)]^2$

**Առաջադրանք 89**

1.  $X$ -ի հետևյալ բաշխումների համար հաշվել  $E(X)$  և  $E(X^2)$ :  
 ա.

$x$	2	4	6	8
$P(X = x)$	0,3	0,3	0,2	0,2

բ.

$x$	1	2	3	4
$P(X = x)$	0,1	0,4	0,1	0,4

գ. Կեղծված զարն ունի հետևյալ հավանականությունների բաշխումը.

$x$	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	0,1	0,1	0,1	0,2	0,4	0,1

Հաշվել  $E(X)$  և  $E(X^2)$ :

2.  $X$  պատահական մեծությունն ունի հետևյալ հավանականության ֆունկցիան.

$$P(x = x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x = 2, 3, 6 \\ 0 & \text{մնացած արժեքների համար} \end{cases}$$

ա. Կազմել  $X$ -ի հավանականությունների բաշխման աղյուսակը:

բ. Հաշվել  $E(X)$  և  $E(X^2)$ :

գ. Մեկնաբանիր, արդյոք  $[E(X)]^2 = E(X^2)$

3. Երկու մետաղադրամ նետում են 50 անգամ: Ամեն նետելուց հետո գրանցում են թվանշան բացվելու քանակը:

ա. Կազմել թվանշան բացվելու քանակի հավանականությունների բաշխման աղյուսակը՝ ենթադրելով, որ երկու մետաղադրամները նետվում են միաժամանակ և կանոնանվոր են, :

բ. Հաշվել, թե քանի անգամ եք սպասում, որ թվանշան կբացվի 0, 1 կամ 2 անգամ:

Թվանշան բացվելու քանակ (q)	0	1	2
Հաճախականություն (f)	7	22	21

գ. Ստուգել, թե արդյոք իրական հաճախականությունները հիմնավորում են, որ մետաղադրամները չկեղծված են: Պատասխանը հիմնավորել:

4.  $X$  պատահական մեծությունն ունի հետևյալ հավանականությունների բաշխումը.

$x$	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	0,1	$a$	$b$	0,2	0,1

Գտնել  $a$  և  $b$ -ն, եթե  $E(X) = 2,9$ :

5. Հինգ նիստ ունեցող կանոնանվոր պտուտակի նիստերի վրա գրված են 1-ից 5 թվերը: Պտուտակը նետում են 500 անգամ: Հաշվարկներով ցույց տալ, թե քանի անգամ եք սպասում, որ կբացվի 3 թիվը:

### 8. Գտնելք պատահական մեծության դիսպերսիան:

- $X$  պատահական մեծության դիսպերսիան սովորաբար նշանակվում է  $Var(X)$  և հաշվում են հետևյալ բանաձևով.

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

### Օրինակ 12

Նետում են երկու խորանարդաձև գառ՝ կարմիր և կապույտ գույնի:  $M$  պատահական մեծությունը նկարագրում է կարմիր և կապույտ գառերի վրա բացված թվերի տարբերությունը:

ա. Գտնել  $M$  -ի հավանականությունների բաշխումը:

բ. Հաշվել  $E(M)$ :

գ. Գտնել  $Var(M)$  :

ա.  $M$ -ի արժեքները կարելի է ներկայացնել աղյուսակի տեսքով.

Կապույտ Կարմիր	1	2	3	4	5	6
1	0	-1	-2	-3	-4	-5
2	1	0	-1	-2	-3	-4
3	2	1	0	-1	-2	-3
4	3	2	1	0	-1	-2
5	4	3	2	1	0	-1
6	5	4	3	2	1	0

$m$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$P(M = m)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$$\begin{aligned} \text{բ. } E(M) &= -5 \cdot \frac{1}{36} + \left(-4 \cdot \frac{2}{36}\right) + \left(-3 \cdot \frac{3}{36}\right) + \left(-2 \cdot \frac{4}{36}\right) + \left(-1 \cdot \frac{5}{36}\right) + 0 \cdot \frac{6}{36} \\ &+ 1 \cdot \frac{5}{36} + 2 \cdot \frac{4}{36} + 3 \cdot \frac{3}{36} + 4 \cdot \frac{2}{36} + 5 \cdot \frac{1}{36} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{գ. } \text{Var}(M) &= \sum m^2 P(M = m) - 0^2 = E(x^2) - 0^2 \\ &= 25 \cdot \frac{1}{36} + 16 \cdot \frac{2}{36} + 9 \cdot \frac{3}{36} + 4 \cdot \frac{4}{36} + 1 \cdot \frac{5}{36} \\ &+ 0 \cdot \frac{6}{36} + 1 \cdot \frac{5}{36} + 4 \cdot \frac{4}{36} + 9 \cdot \frac{3}{36} + 16 \cdot \frac{2}{36} + 25 \cdot \frac{1}{36} \\ &= \frac{(25 + 32 + 27 + 16 + 5) \cdot 2}{36} = \frac{105}{18} = \frac{35}{6} \end{aligned}$$

### Առաջադրանք 87

1. Տրված է հետևյալ հավանականությունների բաշխումը:

$x$	-1	0	1	2	3
$P(X = x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

ա. Գտնել  $E(X)$

բ. Գտնել  $Var(X)$ :

2. Հետևյալ  $X$  պատահական մեծությունների հավանականությունների բաշխման համար գտնել մաթեմատիկական սպասումն ու դիսպերսիան:

ա.

$x$	1	2	3
$P(X = x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

բ.

$x$	-1	0	1
$P(X = x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

գ.

$x$	-2	-1	1	2
$P(X = x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

3.  $Y$ -ը չկեղծված զառը նետելիս բացված թիվն է: Գտնել  $E(Y)$  և  $Var(Y)$ :

4. Երկու չկեղծված խորանադրածն զառերի վրա բացված թվերի  $S$  գումարի համար.

ա. Գտնել  $S$ -ի բաշխումը

բ. Գտնել  $E(S)$

գ. Գտնել  $Var(S)$ :

5. Նետում են երկու կանոնավոր քառանկիստ զառ:  $D$ -ն բացված թվերի տարբերությունն է:

ա. Գտնել  $D$ -ի բաշխումը և ցույց տալ, որ  $P(D = 3) = \frac{1}{3}$ :

բ. Գտնել  $E(D)$

գ. Գտնել  $Var(D)$ :

6. Չկեղծված մետաղադրամը նետում են այնքան, մինչև բացվի գինանշան կամ մինչև երեք նետում անելը:  $T$  պատահական մեծությունը ցույց է տալիս նետումների քանակը:

7. ա. Ցույց տալ, որ  $T$ -ն ունի հետևյալ բաշխումը.

$t$	1	2	3
$P(T = t)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

բ. Գտնել  $T$ -ի սպասումն ու դիսպերսիան:

8.  $X$  պատահական մեծությունն ունի հետևյալ բաշխումը.

$x$	1	2	3
$P(X = x)$	$a$	$b$	$a$

Որտեղ  $a$  և  $b$  հաստատուններ են

ա. Գրել  $E(X)$ -ի արտահայտությունը:

բ. Գտնել  $a$  և  $b$ , եթե  $Var(X) = 0,75$

**9**  $X$  պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասման և դիսպերսիայի գաղափարի ընդլայնումը  $X$ -ի ֆունկցիայի մաթեմատիկական սպասման և դիսպերսիայի համար:

- Եթե  $X$  պատահական մեծություն է, ապա  $X$  -ի արժեքը որոշվում է փորձով
- Պատահական մեծությունից կախված կամայական ֆունկցիա ունի հավանականությունների բաշխում, որը կարելի է արտահայտել  $X$  -ի հավանականությունների բաշխմամբ
- $E(X)$  և  $E(aX + b)$  կապող ընդհանուր օրենքը, որտեղ  $a$  և  $b$  հաստատուններ են, հետևյալն է.

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

- Նույն ձևով,  $Var(X)$  և  $Var(aX + b)$  կապող ընդհանուր օրենքը հետևյալն է.

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X)$$

- Դիսպերսիան միջինի նկատմամբ շեղումը ցույց տվող մեծություն է, հետևաբար բոլոր արժեքներին հաստատուն գումարելու արդյունքում այդ շեղման չափը չի փոխվի, ինչի արդյունքում էլ  $b$ -ն դիսպերսիան չի փոխի:  $a^2$ -ն հասկանալի է, եթե հիշենք, որ

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Այսինքն եթե բոլոր արժեքները բազմապատվել են  $a$  -ով, ապա դիսպերսիան կբազմապատկվի  $a^2$ -ով:

### Օրինակ 13

$X$  դիսկրետ պատահական մեծությունն ունի հետևյալ հավանականությունների բաշխումը.

$x$	1	2	3	4
$P(X = x)$	$\frac{12}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{3}{25}$

ա. Գտնել  $Y$ -ի հավանականությունների բաշխումը, երբ  $Y = 2X + 1$

բ. Գտնել  $E(Y)$ :

ա.  $Y$ -ի հավանականությունների բաշխումը.

$x$	1	2	3	4
$y$	3	5	7	9
$P(Y = y)$	$\frac{12}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{3}{25}$

$$\text{բ. } E(Y) = E(2X + 1) = \sum y \cdot P(Y = y)$$

$$= \sum (2x + 1)p(x)$$

$$= 3 \cdot \frac{12}{25} + 5 \cdot \frac{6}{25} + 7 \cdot \frac{4}{25} + 9 \cdot \frac{3}{25}$$

$$= \frac{121}{25} = 4.84$$

Նկատել, թե ինչպես են  
օգտագործվում X-ի  
հավանականությունները:  
Օրինակ՝  $P(X = 3) = P(Y = 7)$

#### Օրինակ 14

X պատահական մեծության համար  $E(X) = 4$ ,  $Var(X) = 3$ : Գտնել.

ա.  $E(3X)$

բ.  $E(X - 2)$

գ.  $Var(3X)$

դ.  $Var(X - 2)$

ե.  $E(X^2)$

ա.  $E(3X) = 3E(X) = 3 \cdot 4 = 12$

բ.  $E(X - 2) = E(X) - 2 = 4 - 2 = 2$

գ.  $Var(3X) = 3^2 Var(X) = 9 \cdot 3 = 27$

դ.  $Var(X - 2) = Var(X) = 3$

ե.  $E(X^2) = Var(X) + [E(X)]^2 = 3 + 4^2 = 19$

#### Օրինակ 15

Նետում են երկու 10 ցենտանոց մետաղադրամ: X պատահական մեծությամբ նշանակում են թվով բացված միավորների գումարը:

ա. Գտնել  $E(X)$  և  $Var(X)$ :

S և T պատահական մեծությունները որոշված են հետևյալ կերպ.  $S = X - 10$  և  $T = \frac{1}{2}X - 5$ :

բ. Ցույց տալ, որ  $E(S) = E(T)$

գ. Գտնել  $Var(S)$  և  $Var(T)$

Սյուզանն ու Թոմասը երկու 10 ցենտանոց մետաղադրամով խաղ են խաղում: Սյուզանն իր համար S-ով նշանակում է իր միավորները, իսկ Թոմասը T-ով նշանակում է իր միավորները: Բազմաթիվ նետումներից հետո նրանք համեմատում են իրենց միավորները:

դ. Մեկնաբանիր ցանկացած նմանությունը կամ տարբերությունը:

ա. X-ի հավանականությունների բաշխումը.

x	0	10	20
$P(Y = y)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$E(X) = 10$  համաչափությունից ելնելով

$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$



$$\text{Var}(X) = 0^2 \cdot \frac{1}{4} + 10^2 \cdot \frac{1}{2} + 20^2 \cdot \frac{1}{4} = 50$$

$$\text{բ. } E(S) = E(X - 10) = E(X) - 10 = 10 - 10 = 0$$

$$E(T) = E\left(\frac{1}{2} \cdot X - 5\right) = \frac{1}{2}E(X) - 5 \\ = \frac{1}{2} \cdot 10 - 5 = 0$$

$$\text{գ. } \text{Var}(S) = \text{Var}(X) = 50$$

$$\text{Var}(T) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \text{Var}(x) = \frac{50}{4} = 12,5$$

դ. Երկուսի միավորներն էլ պետք է մոտավորապես 0 լինեն: ( $E(S) = E(T) = 0$ )

Սյուզանի միավորները պետք է ավելի սփռված լինեն, քան Թոմասինը:

$$(\text{Var}(S) = 50 > 12,5 = \text{Var}(T))$$

### Օրինակ 16

$Y$  պատահական մեծության միջինը 3 է, իսկ դիսպերսիան՝ 8: Գտնել.

$$\text{ա. } E(12 - 3Y)$$

$$\text{բ. } \text{Var}(12 - 3Y)$$

$$\text{ա. } E(12 - 3Y) = 12 - 3E(Y) \\ = 12 - 3 \cdot 3 = 3$$

$$\text{բ. } \text{Var}(12 - 3Y) = (-3)^2 \text{Var}(Y) = 9\text{Var}(Y) \\ = 9 \cdot 8 = 72$$

**10. Տեսական ճանապարհով գտնել սկզբնական տվյալների մաթեմատիկական սպասումն ու դիսպերսիան՝ օգտագործելով դրանից կախյալ մեծության մաթեմատիկական սպասումն ու դիսպերսիան:**

### Օրինակ 17

Սկզբնական տվյալները կողավորված են՝  $Y = \frac{X-150}{50}$ : Կողավորված տվյալների միջինը 5,1 է, իսկ ստանդարտ շեղումը՝ 2,5: Գտնել.

ա. Սկզբնական տվյալների միջինը

բ. Սկզբնական տվյալների ստանդարտ շեղումը:

$$\begin{aligned} \text{ա. } Y &= \frac{X-150}{50} \\ X &= 50Y + 150 \\ E(X) &= E(50Y + 150) \\ E(X) &= 50E(Y) + 150 \\ &= 255 + 150 = 405 \\ \text{բ. } \text{Var}(X) &= \text{Var}(50Y + 150) = 50^2 \text{Var}(Y) \\ &= 50^2 \cdot 2,5^2 = 15625 \\ \text{Ստանդարտ շեղումը} &= SD = \sqrt{15625} = 125 \end{aligned}$$

### Առաջադրանք 8Ե

- $E(X) = 4, \text{Var}(X) = 10$ : Գտնել

ա.  $E(2X)$  բ.  $\text{Var}(2X)$
- $E(X) = 2, \text{Var}(X) = 6$ : Գտնել

ա.  $E(3X)$  բ.  $E(3X + 1)$  գ.  $E(X - 1)$  դ.  $E(4 - 2X)$

ե.  $\text{Var}(3X)$  զ.  $\text{Var}(3X + 1)$  է.  $\text{Var}(X - 1)$
- $X$  պատահական մեծության միջինը 3 է, իսկ դիսպերսիան՝ 9: Գտնել.

ա.  $E(2X + 1)$  բ.  $E(2 + X)$  գ.  $\text{Var}(2X + 1)$  դ.  $\text{Var}(2 + X)$
- $X$  պատահական մեծության միջինը  $\mu$  է, իսկ ստանդարտ շեղումը՝  $\sigma$ : Գտնել

ա.  $E(4X)$  բ.  $E(2X + 2)$  գ.  $E(2X - 2)$

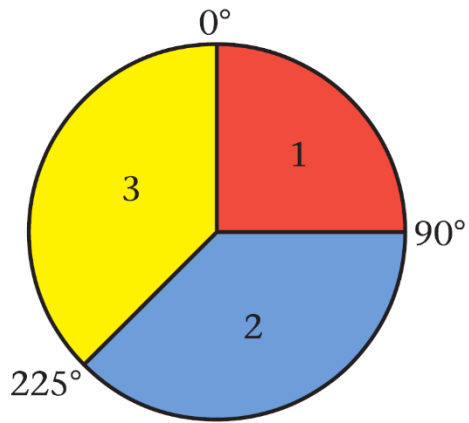
դ.  $\text{Var}(2X + 2)$  է.  $\text{Var}(2X - 2)$
- $Y$  պատահական մեծության միջինը 2 է, իսկ դիսպերսիան՝ 9: Գտնել

ա.  $E(3Y + 1)$  բ.  $E(2 - 3Y)$  գ.  $\text{Var}(3Y + 1)$

դ.  $\text{Var}(2 - 3Y)$  է.  $E(Y^2)$  զ.  $E[(Y - 1)(Y + 1)]$
- $T$  պատահական մեծության միջինը 20 է, իսկ ստանդարտ շեղումը՝ 5: Պահանջվում է նորմավորել  $T$ -ն հետևյալ վանաձևով.  $S = 3T + 4$ : Գտնել  $E(S)$  և  $\text{Var}(S)$ :
- Չկեղծված պտուտակը պատրաստված է դիագրամում պատկերված սկավառակից, իսկ  $X$  պատահական մեծությունը ցույց է տալիս պտույտից հետո պտուտակի ցույց տված թիվը:

ա. Գտնել  $X$ -ի բաշխումը բ. Հաշվել  $E(X)$  գ. Գտնել  $\text{Var}(X)$

դ. Գտնել  $E(2X + 1)$  զ. Գտնել  $\text{Var}(3X - 1)$ :



8.  $X$  դիսկրետ պատահական մեծությունն ունի հետևյալ հավանականությունների բաշխումը.

$x$	-1	0	1	2
$P(X = x)$	0,2	0,5	0,2	0,1

ա. Գտնել  $E(X)$  բ. Գտնել  $Var(X)$       գ. Գտնել  $E(\frac{1}{3}X + 1)$       դ. Գտնել  $Var(\frac{1}{3}X + 1)$

## §38. Դիսկրետ հավասարաչափ բաշխում

**11.** Որոշ փորձերի ելքերի հավանականությունների բաշխումը նկարագրելու համար կիրառվում է դիսկրետ հավասարաչափ բաշխումը:

- Մեկ չկեղծված զառի նետման արդյունքում բացված  $S$  միավորի հավանականությունների բաշխումը հետևյալն է.

$s$	1	2	3	4	5	6
$P(S = s)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Սա դիսկրետ հավասարաչափ բաշխման օրինակ է  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  արժեքների համար: Այն կոչվում է դիսկրետ, քանի որ ընդունում է միայն դիսկրետ արժեքներ և հավասարաչափ, քանի որ բոլոր հավանականությունները հավասար են:

- դիսկրետ հավասարաչափ բաշխման համար անհրաժեշտ պայմաններն են.

դիսկրետ պատահական մեծությունը որոշված է որևէ  $n$  տարր ունեցող բազմության վրա:

Յուրաքանչյուր արժեք հավասարահնարավոր է.  $P(X = x) = \frac{1}{n}$ , յուրաքանչյուր  $x$ -ի համար:

- Հաճախ  $X$ -ը որոշված է  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$  բազմության վրա: Այս դեպքերում միջինն ու դիսպերսիան տրվում են հետևյալ բանաձևերով.

$$E(X) = \frac{n+1}{2}$$

$$Var(X) = \frac{(n+1)(n-1)}{12}$$

Այս բանաձևերը տեղի ունեն միայն երբ  $X$ -ը  $1, 2, 3, \dots, n$  է:

Այս բանաձևերն ապացուցելու կամ քննության համար իմանալու կարիք չկա, սակայն որոշ խնդիրներում սրանք կարող են օգտակար լինել:

### Օրինակ 18

Պատահական թվերի աղյուսակից պատահականորեն թվանշաններ են ընտրում:

ա. Գտնել թվանշանների միջինն ու ստանդարտ շեղումը:

բ. Գտնել հավանականությունը, որ որևէ թվանշան գտնվում է միջինից մեկ ստանդարտ շեղում հեռավորությամբ միջակայքում:

Թվանշանները միանիշ թվերն են: Այս դեպքում թվանշանները կլինեն 0-9 թվերը:

Դիցուք  $R$ -ը ներկայացնում է այս դիսկրետ պատահական մեծությունը, որը  $\{0, 1, \dots, 9\}$  բազմության վրա ունի հավասարաչափ բաշխում:

Դիցուք  $X$ -ը ներկայացնում է այս դիսկրետ պատահական մեծությունը, որը  $\{1, 2, \dots, 10\}$  բազմության վրա ունի հավասարաչափ բաշխում:

$X$ -ի և  $R$ -ի միջև գոյություն ունի պարզ գծային կապ՝  $R = X - 1$ :

Ներմուծելով  $X$  դիսկրետ պատահական մեծությունը, դուք կարող եք  $X$ -ի համար կիրառել վերևում բերված ստանդարտ բանաձևը, երբ  $n = 10$ :

$$\begin{aligned} E(R) &= E(X - 1) \\ &= E(X) - 1 \\ &= \frac{n + 1}{2} - 1 \\ &= \frac{10 + 1}{2} - 1 = 4,5 \end{aligned}$$

և

$$\begin{aligned} \text{Var}(R) &= \text{Var}(X - 1) \\ &= \text{Var}(X) \\ &= \frac{(n + 1)(n - 1)}{12} \\ &= \frac{11 \cdot 9}{12} = 8,25 \end{aligned}$$

$$\text{Ստանդարտ շեղում} = \sigma = \sqrt{8,25}$$

$$= 2,87 \text{ (3 նիշի ճշտությամբ)}$$

բ. Նախորդից օգտագործելով  $\sigma$ -ի արժեքը, կգտնենք պահանջվող հավանականությունը.

$$\begin{aligned} P(4,5 - 2,87 \dots < R < 4,5 + 2,87 \dots) \\ &= P(1,63 \dots < R < 7,37 \dots) \\ &= P(2 \leq R \leq 7) \\ &= \frac{6}{10} = 0,6 \end{aligned}$$

1, 2, 3, ...,  $n$  հաջորդականության միջինը հաշվելու բանաձևը:

1, 2, 3, ...,  $n$  հաջորդականության դիսպերսիան հաշվելու բանաձևը:

Օրինակ 18-ը ցույց է տալիս, թե ինչպես կարելի է օգտագործել բանաձևը  $\{0, 1, 2, 3, \dots, n\}$  հաջորդականությունների համար և  $X$ -ից կախված ֆունկցիաների համար:

Չնայած իր պարզությանը, դիսկրետ հավասարաչափ բաշխումը հանդիպում է բազմաթիվ դեպքերում: Կիրառելուց առաջ կարևոր է ստուգել, որ բոլոր անհրաժեշտ պայմանները բավարարվեն: Առաջին պայմանն այն է, որ բոլոր հավանականությունները հավասար լինեն, իսկ երկրորդը, որ պատահական մեծությունը որոշված լինի որոշակի  $n$  տարր ունեցող բազմության վրա: Օրինակ՝ պարկում կա հինգ մետաղադրամ. մեկ 50 ցենտանոց, մեկ 20 ցենտանոց, մեկ 10 ցենտանոց, մեկ 5 ցենտանոց, մեկ 2 ցենտանոց: Երեխային թույլ է տրվում պատահականորեն ընտրել որևէ մետաղադրամ և վերցնել:  $V$  պատահական մեծությունը ներկայացնում է մետաղադրամի արժեքը: Դուք միգուցե փորձեք մոդելավորել  $V$ -ն որպես  $\{2, 5, 10, 20, 50\}$  արժեքներ ընդունող հավասարաչափ բաշխում ունեցող մեծություն, սակայն ակնհայտ չէ, թե արդյոք 50



դ. Բացատրել, թե ինչու չի կարելի ակնկալել գումար աշխատել այս խաղը բավական երկար խաղալու ընթացքում:

**խաղը Առաջադրանք 8Ե**

1.  $X$  պատահական մեծությունն ունի հետևյալ հավանականության ֆունկցիան.

$$P(X = x) = \frac{x}{21}, \quad x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

ա. Կազմել  $X$ -ի հավանականությունների բաշխման աղյուսակը:

Գտնել

բ.  $P(2 < X \leq 5)$

գ.  $E(X)$

դ.  $Var(X)$

ե.  $Var(3 - 2X)$

2.  $X$  պատահական մեծությունն ունի հետևյալ հավանականությունների բաշխումը.

$x$	-2	-1	0	1	2	3
$P(X = x)$	0,1	0,2	0,3	$r$	0,1	0,1

Գտնել

ա.  $r$ -ի արժեքը

բ.  $P(-1 \leq X < 2)$

գ.  $F(0,6)$

դ.  $E(2X + 3)$

ե.  $Var(2X + 3)$

3.  $X$  պատահական մեծությունն ունի հետևյալ հավանականությունների բաշխումը.

$x$	0	1	2
$P(X = x)$	$\frac{1}{5}$	$b$	$\frac{1}{5} + b$

ա. Գտնել  $b$ -ի արժեքը

բ. Ցույց տալ, որ  $E(X) = 1,3$

գ. Գտնել  $Var(X)$ -ի ճշգրիտ արժեքը

ե. Գտնել  $P(X \leq 1,5)$ -ի ի ճշգրիտ արժեքը

4.  $X$  դիսկրետ պատահական մեծությունն ունի հետևյալ հավանականության ֆունկցիան.

$$P(x = x) = \begin{cases} k(1 - x) & x = 0, 1 \\ k(x - 1) & x = 2, 3 \\ 0 & \text{հակառակ դեպքում} \end{cases}$$

Որտեղ  $k$ -ն հաստատուն է:

ա. Ցույց տալ, որ  $k = \frac{1}{4}$

բ. Գտնել  $E(X)$  և ցույց տալ, որ  $E(X) = 5,5$

գ. Գտնել  $Var(2X - 2)$

5.  $X$  պատահական մեծությունն ունի հետևյալ հավանականությունների բաշխումը.

$x$	0	1	2	3
-----	---	---	---	---

$P(X = x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
------------	---------------	---------------	---------------	---------------

Գտնել

ա.  $P(1 < X \leq 2)$

բ.  $F(1,5)$

գ.  $E(X)$

դ.  $E(3X - 1)$

ե.  $Var(X)$

6. Դիսկրետ պատահական մեծությունն այնպիսին է, որ նրա յուրաքանչյուր արժեք հավասարապես հնարավոր է:

ա. Գրել բաշխման անունը

բ. Բերել այդպիսի բաշխման օրինակ

Վերևում նկարագրված  $X$  պատահական մեծությունը կարող է ընդունել 0, 1, 2, 3 և 4 արժեքներ:

Գտնել

գ.  $E(X)$

դ.  $Var(X)$

7.  $X$  պատահական մեծությունն ունի հետևյալ հավանականությունների բաշխումը

$x$	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	0,1	$p$	$q$	0,3	0,1

ա. Կազմել  $p, q$ -ից կախված հավասարում, եթե  $E(X) = 3,1$ :

Գտնել

բ.  $p$  և  $q$ -ի արժեքները

գ.  $Var(X)$

դ.  $Var(2X - 3)$

8.  $X$  դիսկրետ պատահական մեծությունն ունի հետևյալ հավանականության ֆունկցիան.

$$P(x = x) = \begin{cases} kx & x = 0, 1 \\ k(x - 2) & x = 3, 4, 5 \end{cases}$$

Որտեղ  $k$ -ն հաստատուն է:

ա. Գտնել  $k$ -ի արժեքը

բ. Գտնել  $E(X)$  -ի ճշգրիտ արժեքը

գ. Ցույց տալ, որ  $Var(X) = 2,02$ , (3 թվանշանի ճշտությամբ)

դ. Գտնել  $Var(3 - 2X)$ , մեկ տասնորդական թվանշանի ճշտությամբ

9.  $X$  պատահական մեծությունն ունի հավասարաչափ հավանականության ֆունկցիա.

$$P(X = x) = \frac{1}{21}, \quad x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

ա. Գտնել  $E(X)$ -ի արտահայտությունը ու հաշվել արժեքը և ցույց տալ, որ  $Var(X) = \frac{35}{12}$

բ. Գտնել  $E(2X - 1)$

գ. Գտնել  $Var(3 - 2X)$



10.  $X$  պատահական մեծությունն ունի հավասարաչափ հավանականության ֆունկցիա.

$$p(x) = \frac{3x - 1}{26}, \quad x = 1, 2, 3, 4$$

ա. Կազմել  $X$ -ի հավանականությունների բաշխման աղյուսակը

Գտնել

բ.  $P(2 < X \leq 4)$

գ.  $E(X)$ -ի ճշգրիտ արժեքը

դ. Ցույց տալ, որ  $Var(X) = 0,92$ , 2 թվանշանի ճշտությամբ

ե.  $Var(1 - 3X)$