Աստղագիտության օլիմպիադայի հանրապետական փուլի խնդիրները և լուծումները
Տևողությունը 180 րոպե

1. Խավարածրի հարթության մեջ շրջանագծային ուղեծրով պտտվող աստղակերպի սինոդիկ պարբերությունը հավասար է արևադարձային տարվա տևողությանը - $S = 365⊠2422$ օր: Գտնել աստղակերպի ուղեծրի շառավղի հնարավոր արժեքները: Երկրի պտույտների հետ կապված բոլոր հնարավոր տվյալները համարել հայտնի:

Արևադարձային տարին այն ժամանակամիջոցն է, որի ընթացքում Արեգակը մեկ պտույտ կատարելով վերադառնում է ելման կետ (օր. գարնանային գիշերահավասարի կետը): Եթե հաշվի առնենք, որ գիշերահավասարի կետը խավարածրով շարժվում է Արեգակին ընդառաջ $\alpha = 50.3''/տ$ անկյունային արագությամբ ապա աստղային /սիդերիկ / տարվա տևողությունը հավասար կլինի.`
$T = (360 \cdot 365.2422)/359.9860 = 1.0000389 տ$

Դիտարկենք հնարավոր երկու դեպքերը, երբ աստղակերպը ա/ արտաքին է, բ/ ներքին է,:
Նկատենք, որ աստղակերպի սինոդիկ պարբերությունը ավելի փոքր է, քան աստղային տարին: Արտաքին աստղակերպի դեպքում սա նշանակում է, որ աստղակերպի` իր ուղեծրով պտտման ուղղությունը հակառակ է Երկրի պտտման ուղղությանը: Օգտվելով սինոդիկ շարժման հավասարումից այդ դեպքի համար, կստանանք.`

$$\frac{1}{T_1} = \frac{1}{S} - \frac{1}{T} = \frac{1}{25570} \;\; կամ T_1 = 25570 տ$$

Նույն արժեքը կարելի է ստանալ, եթե հաշվենք Երկրի առանցքի պրեցեսիայի պարբերությունը $P = (360°/\alpha = 25570 տ)$: Դա պատահականության արդյունք չէ, իսկապես, խնդրում բերված պայմանների պարզ վերլուծությունից բխում է, որ որոնվող սինոդիկ պարբերությունը հավասար է պրեցեսիայի պարբերությանը $P = T_1$
Ներքին աստղակերպի համար, համապատասխանաբար, ունենք

$$\frac{1}{T_2} = \frac{1}{S} + \frac{1}{T} \;\; կամ T_2 = 0.5 \; տ$$

Օգտվելով Կեպլերի 3-րդ օրենքից կարելի ստանալ շառավղի հնարավոր արժեքները, 872 ա. մ. և 0.63 ա.մ. համապատասխանաբար:

2. Երկրագնդի ո՞ր լայնություններում մայր չմտնող Արեգակի բարձրությունը փոխվում է ուղիղ երկու անգամ: Ռեֆրակցիան և Արեգակի տեսանելի չափը հաշվի չառնել:

Ըստ խնդրի պայմանի, Արեգակը մայր չի մտնում, հետևաբար, դեպքը կարող է տեղի ունենալ միայն մերձբևեռային լայնություններում: Արեգակի բարձրությունը վերին (h_B) և ներքին (h_H) կուլմինացիաներում, համապատասխանաբար հավասար է .

$$h_B = 90^\circ - |\delta - \varphi|,$$
$$h_H = -90^\circ + |\delta + \varphi|$$

որտեղ δ - ն Արեգակի հակումն է, φ-ն աշխարհագրական լայնությունը: Ըստ խնդրի պայմանի

$$90^\circ - |\delta - \varphi| = 2\cdot(-90^\circ + |\delta + \varphi|) = -180^\circ + 2|\delta + \varphi|.$$

կամ

$$2|\delta + \varphi| + |\delta - \varphi| = 270^\circ$$

Հաշվի առնելով, որ Արեգակի հակումը $|\delta| \leq \varepsilon$, $\varepsilon = 23.^\circ 4$, դրական φ -երի դեպքում (հյուսիսային կիսագունդ) ունենք

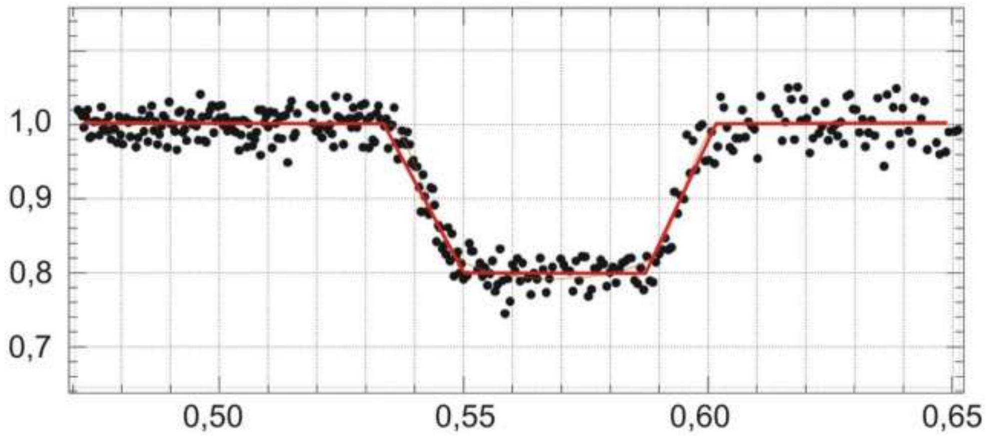
$$3\varphi + \delta = 270^\circ$$
$$\varphi = 90^\circ - \delta/3.$$

Հետևաբար, որոնվող աշխարհագրական լայնությունները գտնվում են (82.2÷90) աստիճան միջակայքում:

Հարավային կիսագնդի դեպքում որոնվող աշխարհագրական լայնությունները գտնվում են (-82.2 ÷ -90) աստիճան միջակայքում:

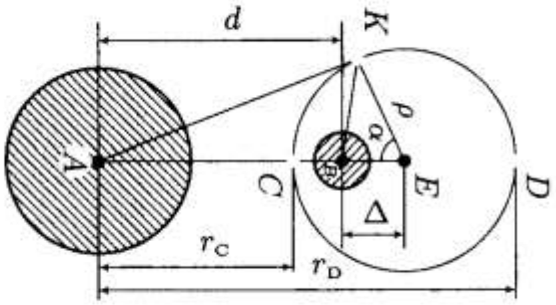
3. Նկարում բերված պայծառության կորը գրանցվել է $0.1R_{\odot}$ ($R_{\odot} \approx$ 700000կմ) շառավղով կարմիր թզուկի սկավառակի վրայով էկզոմոլորակի անցման ժամանակ: Կորը ներկայացված է գրաֆիկի տեսքով, որի աբսցիսում տրված է ժամանակը՝ արտահայտված օրերով, իսկ օրդինատը ցույց է տալիս աստղից Երկիր հասնող էներգիայի հարաբերական քանակությունը (միավորը համապատասխանում է խավարումից դուրս գրանցված էներգիային): Կետերը ցույց են տալիս առանձին դիտումների տվյալները, իսկ գիծը համապատասխանում է միջինացված տվյալներին: Պատասխանեք մի շարք հարցերի:

- Քանի՞ րոպե է տևել մոլորակի անցումը աստղի սկավառակի վրայով, հաշված աստղի և մոլորակի սկավառակների առաջին հպման պահից մինչ վերջինը: **Պատ. 99, 85÷101**
- Քանի՞ անգամ է թուլացել աստղի պայծառությունը մինիմումում: **1.25**
- Քանի՞ աստղային մեծությամբ է թուլացել աստղի պայծառությունը մինիմումում: **0.24**
- Արդյո՞ք կարելի է պնդել, որ անցումը կենտրոնական է: **Միարժեք չէ**
- Սկավառակի մակերեսի ո՞ր մասն է ծածկում մոլորակը մինիմումում: **0.2**
- Որքա՞ն է մոլորակի շառավիղը արտահայտված կիլոմետրերով: **30000÷33000**
- Որքա՞ն է մոլորակի ուղեծրային արագությունը արտահայտված կմ/վ -ով: **25÷50**



4. Երկիր-Լուսին ուղղի վրա որոշել այն կետի/կետերի հեռավորությունը Երկրի կենտրոնից, որտեղ Երկրի ձգողականության ուժը հավասար է Լուսնի ձգողականության ուժին: Ինչպես կպահի իրեն այդ կետում/կետերում տեղադրված, սկզբնական արագությունից զուրկ մարմինը: Օգտվելով տարրական երկրաչափական մեթոդներից, որոշել Երկրի նկատմամբ Լուսնի ձգողականության ոլորտը (ըստ սահմանման դա այն ոլորտն է, որի ներսում Լուսնի ձգողականության ուժը գերազանցում է Երկրի ձգողականության ուժին): Երկիր-Լուսին հեռավորությունը ընդունել հավասար $d = 384400$ կմ, իսկ զանգվածների հարաբերությունը $k = 1/81$⊠3:

Լուծում.`



a)

Ուժերի հավասարության պայմանից հետևում են հետևյալ հավասարումները

$$|\mathbf{F}_{♁}| = |\mathbf{F}_{☾}| = \frac{f M_{♁} m}{r^2} = \frac{f M_{☾}\, m}{(d-r)^2}, \quad \frac{M_{♁}}{r^2} = \frac{M_{☾}}{(d-r)^2}$$

$$(M_{♁} - M_{☾})r^2 - 2M_{♁}\, r\, d + M_{♁}\, d^2 = 0,$$

$$r_{1,2} = \frac{d}{M_{♁} - M_{☾}}\left(M_{♁} \pm \sqrt{M_{♁} M_{☾}}\right) = \frac{d}{1 \mp \sqrt{M_{☾}/M_{♁}}}.$$

Այստեղից, հետևում է, որ Երկիր-Լուսին ուղղի վրա կա երկու կետ (C, D), որտեղ ուժերը հավասար են

$$r_C = \frac{d}{1 + \sqrt{M_{☾}/M_{♁}}} = 0.90d, \quad r_D = \frac{d}{1 - \sqrt{M_{☾}/M_{♁}}} = 1.12d,$$

Եթե այդ կետերում տեղադրենք սկզբնական արագությունից զուրկ մարմին ապա, ա/ նա կմնա անշարժ, եթե այդ կետը լինի Երկրին ավելի մոտ կետը, բ/ կընկնի Լուսնի վրա, եթե այդ կետը լինի Երկրից ավելի հեռու կետը:
Կարելի է ապացուցել , որ Լուսնի ձգողականության ոլորտը CD տրամագծի վրա կառուցված սֆերան է: Դա կարելի է ենթադրել նաև ելնելով խնդրի սիմետրիայից, ուստի բավարարվենք համոզվելով, որ ենթադրությունը ճիշտ է: Բավարար է ցույց տալ, որ սֆերայի մակերևույթին պատկանող ցանկացած K կետի համար

$$\frac{KB}{KA} = \text{const} = \frac{CB}{CA} = \sqrt{k}.$$

Բերված նկարից հետևում են հետևյալ առնչությունները.`

$$\frac{BC}{AC} = \frac{d - r_C}{r_C} = \sqrt{\frac{M_☾}{M_♁}}, \quad \frac{BD}{AD} = \frac{r_D - d}{r_D} = \sqrt{\frac{M_☾}{M_♁}} = \sqrt{k}.$$

$$\rho \;=\; CD/2 = (r_D - r_C)/2$$

$$\Delta \;=\; r_C + \rho - d$$

$$r_C = AC - CB = d - (\rho - \Delta), \quad r_D = AD + BD = d + (\rho + \Delta)$$

$$\Delta = d\frac{k}{1-k}, \quad \rho = d\frac{\sqrt{k}}{1-k}$$

$$d + \Delta = d/(1-k).$$

Կոսինուսների թեորեմից հետևում է

$$(KB)^2 = \Delta^2 + \rho^2 - 2\rho\Delta\cos\alpha = \left(\frac{d}{1-k}\right)^2 (k^2 + k - 2k^{3/2}\cos\alpha),$$

$$(KA)^2 = (d+\Delta)^2 + \rho^2 - 2\rho(d+\Delta)\cos\alpha =$$

$$= \left(\frac{d}{1-k}\right)^2 (1 + k - 2k^{1/2}\cos\alpha) = (KB)^2/k,$$

$$KB/KA = \sqrt{k},$$

Ապացույցն ավարտված է:

b) Օգտվելով նախորդ կետում ստացված բանաձևերից Երկիր- Արեգակ համակարգի դեպքում Երկրի ձգողականությոն ոլորտի համար կստանանք.`

$$\rho = 259500\,կմ, \qquad \Delta = 450\,կմ$$

Այստեղից, Լուսինը գտնվում է Երկրի ձգողականության ոլորտից դուրս:

5. Օգտվելով Կեպլերի օրենքներից ցույց տալ, որ էլիպսի կորության շառավիղը մեծ առանցքի եզրակետերում հավասար է $R = b^2/a$, որտեղ a,b –ն էլիպսի մեծ և փոքր կիսառանցքներն են:

Լուծում.՝

Մեծ առանցքի եզրակետերում, համաձայն Նյուտոնի 2-րդ օրենքի.՝

$$G\frac{M}{r^2} = \frac{v^2}{R} \ \rightarrow \ \frac{vr}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{GMR}$$

Համաձայն Կեպլերի 2-րդ և 3-րդ օրենքների միավոր ժամանակում մոլորակի շառավիղ վեկտորի գծած մակերեսը հավասար է.՝

$$S = \frac{\pi ab}{2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}}} = \frac{vr}{2}$$

Հետևաբար.՝

$$\frac{\pi ab}{2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}}} = \frac{1}{2}\sqrt{GMR} \ \rightarrow \ R = \frac{b^2}{a}$$