Խնդիր 4) Գտնել $x+y+z$ արտահայտության փոքրագույն արժեքը, եթե հայտնի է, որ $xyz+xz+yz+xy=2$ և $x,y,z>0$:

Լուծում 1: $xyz+xz+yz+xy=2 \Leftrightarrow x+y+z+3=(x+1)(y+1)(z+1) \le \left(\frac{x+1+y+1+z+1}{3}\right)^3 = \left(\frac{x+y+z+3}{3}\right)^3 \Rightarrow (x+y+z+3)\left(\frac{(x+y+z+3)^2}{27}-1\right) \ge 0 \Rightarrow \frac{(x+y+z+3)^2}{27} \ge 1 \Rightarrow x+y+z \ge 3\sqrt{3}-3$, քանի, որ $x+y+z>0$, հետևաբար $x+y+z$ արտահայտության փոքրագույն արժեքը հավասար է $3\sqrt{3}-3$, երբ $x=y=z=\sqrt{3}-1$:

Լուծում 2: $2=xy+xz+yz+xyz \le \frac{(x+y+z)^2}{3}+\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 \Rightarrow (x+y+z)^3+9(x+y+z)^2-54 \ge 0 \Rightarrow (x+y+z+3)((x+y+z)^2+6(x+y+z)-18) \ge 0 \Rightarrow (x+y+z+3)\big(x+y+z+3+3\sqrt{3}\big)\big(x+y+z+3-3\sqrt{3}\big) \ge 0 \Rightarrow x+y+z \ge 3\sqrt{3}-3$, քանի, որ $x+y+z>0$, հետևաբար $x+y+z$ արտահայտության փոքրագույն արժեքը հավասար է $3\sqrt{3}-3$, երբ $x=y=z=\sqrt{3}-1$

Խնդիր 5) Շրջանագծին ներգծած ABCDE($\angle ABC < 90^0$) հնգանկյունում AE=DC : Դիցուք K-ը BE հատվածի այնպիսի կետ է, որ $BK \le \frac{BE}{2}$:Ապացուցեք, որ AK+KC≥BD:

Լուծում:1. Դիցուք T-ն BE հատվածի միջնակետն է, իսկ A կետից BE-ին տարված զուգահեռ ուղիղը շրջանագիծը հատում է F կետում, իսկ O-ն շրջանագծի կենտրոնն է:: Դիցուք P-ն AF հատվածի միջնակետ է: Քանի, $OT \perp BE, OP \perp AF$ և $AF \parallel BE$, հետևաբար $TP \perp AF$, որտեղից $AT+TC=FT+TC \ge FC=BD$ քանի որ $\angle DBC=\angle ABE=\angle BAF$, հետևաբար $\varDelta BDC = \varDelta BFC$, հետևաբար FC=BD:

1*Դիցուք AT ուղիղը KC հատվածը հատում է M կետում: Այդ դեպքում $AK+KC=AK+KM+MC \ge AM+MC=AT+TM+MC \ge AT+TC \ge BD$:

2* Քանի որ $\angle FAT=\angle AFT$ և $BT \ge BK$, հետևաբար $\angle KFA \ge \angle FAK$, որտեղից $AK+KC \ge FK+KC \ge FC=BD$:

Խնդիր 6) Դիցուք տրված են $n,k,m \in N$ թվերը, ընդ որում $m<n$: Շրջանագծի վրա տեղադրված է nk հատ արկղ, որոնք համարակալված են 0, 1, 2, …, $nk-1$ թվերով: Ընդ որում այդ արկղերից n հատի մեջ կա մեկական գնդակ, իսկ մնացածը դատարկ են: Յուրաքանչյուր քայլում թույլատրվում է ընտրել m հատ իրար հարևան գնդակ և նրանք տեղափոխել իրենց արկղերի ժամսլաքի ուղղությամբ հարևան արկղերում (ընդ որում տեղափոխման արդյունքում որևէ արկղում պետք է չլինի երկու գնդակ): Սկզբնական պահին գնդակները տեղադրված են $0,1,2,\dots,n-1$ արկղերում: Թվերի ($k,\ m,n$) եռյակն անվանենք «կատարյալ», եթե սկզբնական դիրքից թույլատրելի քայլերի արդյունքում կարելի է գնդակները դասավորել $0,k,2k,3k,\dots,(n-1)k$ արկղերում:

ա) a բնական թվի ինչպիսի՞ արժեքների դեպքում (2^a, 2, 5) եռյակը կլինի կատարյալ:

բ) Ապացուցել, որ ցանկացած M թվի համար գոյություն ունեն M-ից մեծ n, m, k բնական թվեր այնպես, որ n-ը և m-ը փոխադարձաբար պարզ են և (k, m, n) եռյակը կատարյալ չէ:

Լուծում: ա) Ունենք 5 տարր ունեցող բազմություն: Յուրաքանչյուր քայլում, որևէ երկու հարևաններին գումարվում է 1 (եթե տեղափոխվող զնդակը $5 \cdot 2^n - 1$-րդ արկղում է, ապա տեղափոխվում է 0 համարն ունեցող արկղ): Կատարենք հետևյալ քայլերը.

Լեմմա 1: Վերջավոր թվով թույլատրելի քայլերի արդյունքում կարելի է ստանալ {0,2,4,6,8} բազմությունը:

0, 1, 2, 3, 4

0, 1, 2, $5 \cdot 2^n - 5$, $5 \cdot 2^n - 4$

0, 3, 4, $5 \cdot 2^n - 5$, $5 \cdot 2^n - 4$

2, 3, 4, $5 \cdot 2^n - 5$, $5 \cdot 2^n - 2$

2, 3, 5, $5 \cdot 2^n - 4$, $5 \cdot 2^n - 2$

2, 4, 6, $5 \cdot 2^n - 4$, $5 \cdot 2^n - 2$

2, 4, 6, $5 \cdot 2^n - 2$, 0

2, 4, 6, $5 \cdot 2^n - 1$, 1

3, 5, 6, $5 \cdot 2^n - 1$, 1

3, 5, 7, 0, 1

4, 5, 7, 0, 2

4, 6, 8, 0, 2

Լեմման ապացուցված է:

Ստացված արկղերը զույգ համարներով են: Այժմ կատարենք նույն քայլերը (յուրաքանչյուր անգամ մեկով աջ տեղափոխելու փոխարեն, մենք կկատարենք երկու քայլ, այսինքն կտեղափոխենք ամեն քայլափոխին երկու միավոր դեպի աջ): Այսպիսով կկիրառենք միայն զույգ համարներով արկղերը: Կրկնելով Լեմմա 1-ի քայլերը կունենանք {0,4,8,12,16} բազմությունը: Այնուհետև կկիրառենք միայն այն արկղերը, որոնց համարները բաժանվում են 4-ի (կկատարենք Լեմմա 1-ի քայլերը՝ յուրաքանչյուր անգամ մի միավորի փոխարեն տեղափոխելով 4 միավոր): Այսպես շարունակելով՝ ի վերջո կստանանք $\{0, 2^n, 2 \cdot 2^n, 3 \cdot 2^n, 4 \cdot 2^n\}$ եռյակը:

բ) Դիցուք սկզբնական դիրքից սկսած կատարված է x քայլ: Դիտարկենք յուրաքանչյուր քայլում ստացված բազմության տարրերի գումարի մնացորդը nk-ի բաժանելիս: Յուրաքանչյուր քայլում գումարվում է mx և վերցվում է մնացորդը nk-ի բաժանելիս: Քանի որ սկզբնական բազմությունը $\{0,1,2,\dots,n-1\}$-ն է, իսկ վերջում պետք է ստացվի $\{0,k,2k,\dots,(n-1)k\}$, ապա հետևյալ թվերն ունեն նույն մնացորդը nk-ի բաժանելիս՝

$$\frac{n(n-1)}{2}+mx \quad \text{և} \quad k\frac{n(n-1)}{2}$$

Այսինքն՝ $mx-\frac{n(n-1)(k-1)}{2}$ թիվը պետք է բաժանվի nk-ի:

Հետևաբար, եթե ունենանք այնպիսի n,k,m թվեր, որոնց համար $mx-\frac{n(n-1)(k-1)}{2}$ թիվը չի բաժանվում nk-ի (ցանկացած x բնական թվի համար), ապա (nk,n,m) եռյակը կլինի ոչկատարյալ:

Վերցնենք կամայական p (p>2) պարզ թիվ, և դիտարկենք $n=p+2$, $m=k=p$ թվերը: Այդ դեպքում՝ $mx-\frac{n(n-1)(k-1)}{2}=px-\frac{(p+2)(p+1)(p-1)}{2}$, որը չի բաժանվում p-ի, այսինքն չի բաժանվի նաև $nk=p(p+2)$ թվի վրա:

Այսպիսով $n=p+2$, $m=k=p$ թվերի համար (nk,n,m) եռյակը ոչկատարյալ է, ընդ որում n և m թվերը փոխադարձաբար պարզ են:

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏԱԿԱՆ ՕԼԻՄՊԻԱԴԱ

11-12-րդ դասարանների երկրորդ օրվա չափանիշներ

4.

$x+y+z+3=(x+1)(y+1)(z+1)$ 3 միավոր,

$\left(\frac{x+y+z+3}{3}\right)^3 \geq (x+1)(y+1)(z+1)=x+y+z+3,$ +2 միավոր,

$x+y+z \geq 3\sqrt{3}-3,$ +1 միավոր

$x=y=z=\sqrt{3}-1$ +1 միավոր ։

$xy+xz+zx \geq \frac{(x+y+z)^2}{3},$ 1 միավոր,

կամ

$xyz \leq \left(\frac{x+y+z+3}{3}\right)^3$ 1 միավոր,

$(x+y+z+3)\Big((x+y+z)^2+6(x+y+z)-18\Big) \geq 0$ +2 միավոր,

$(x+y+z+3)(x+y+z+3\sqrt{3})(x+y+z+3-3\sqrt{3}) \geq 0$ +2 միավոր,

$x+y+z \geq 3\sqrt{3}-3,$ +1 միավոր

$x=y=z=\sqrt{3}-1$ +1 միավոր ։

5.

$AK+KC \geq AT+TC$ 1 միավոր,

F կետի կառուցում +2 միավոր,

$FT=AT$ +1 միավոր,

$FC=BD$ +1 միավոր,

ավարտել +2 միավոր ։

6. ա) 5 միավոր,

բ) 2 միավոր:

լուծմանը նպաստող որևէ մարփավարություն $\rightarrow$ 1 միավոր: