Խնդիր 4) Գրատախտակին գրված a,a,a,a,b բնական թվերից յուրաքանչյուրից հանել են երեք և ստացված թվերը բազմապատկել: Արդյունքում ստացված թիվը k անգամ մեծ է ստացվել սկզբնական թվերի արտադրյալից: Գտեք k-ի հնարավոր բնական արժեքների քանակը:

Լուծում: Քանի, որ $k = \frac{(a-3)^4(b-3)}{a^3 b} \in N$ և, հետևաբար $b > 3$, որտեղից a=1 կամ a=2:

Դիցուք a=1: Այդ դեպքում $k = \frac{16(b-3)}{b}$:

Երբ (b,b-3)=1, ապա b=4;8;16 որտեղից k=4;10;13:

Երբ (b,b-3)=3, հետևաբար b=3p, որտեղից $k = \frac{16(p-1)}{p}$, հետևաբար $\frac{16}{p}$ ապա p=2;4;8;16 որտեղից k=8;12;14;15 :

Դիցուք a=2: Այդ դեպքում $k = \frac{b-3}{8b}$: Քանի, որ b-3<8b ,հետևաբար $k = \frac{b-3}{8b} \notin N$:

Այսպիսով խնդրի պայմաններին բավարարող k-երի քանակըհավասար է 7:

Խնդիր 5) ABC սուրանկյուն եռանկյան BD բարձրության շարունակությունը ABC եռանկյան R շառավիղով արտագծած շրջանագիծը հատում է E կետում: Դիցուք M-ը BE հատվածի միջնակետն է: Ապացուցեք, որ AM+MC≥2R:

Լուծում: Դիցուք A կետից BE-ին տարված զուգահեռ ուղիղը շրջանագիծը հատում է F կետում, իսկ O-ն շրջանագծի կենտրոնն է: Դիցուք P-ն AF հատվածի միջնակետ է: Քանի, $OM \perp BE, OP \perp AF$ և $AF \parallel BE$, հետևաբար $MP \perp AE$, որտեղից $AM + MC = FM + MC \geq FC = 2R$:

Խնդիր 6) Կասենք, որ 5x5 վանդակավոր տախտակն հայկական է, եթե նրա վանդակներում շարված են 1,2,3,…,25 թվերը, ընդ որում յուրաքանչյուր թիվ հանդիպում է ճիշտ մեկ անգամ: Արքայից արքան շախմատի տախտակի վրա շարժվում է սովորական շախմատի արքայի պես, բայց մի սահմանափակմամբ. միայն փոքր համարով վանդակից գնում է ավելի մեծ համարով վանդակ: Այն վանդակների հերթականությունը, որով կարող է շարժվել արքայից արքան, կոչվում է հայկական հետք: Գտնել n-ի ամենամեծ արժեքը, որ ցանկացած հայկական վանդակավոր տախտակի վրա կա n վանդակից բաղկացած հայկական հետք:

Նկարում պատկերված հայկական վանդակավոր տախտակի վրա պատկերված է 5 վանդականոց հայկական հետք:

5	10 Կ2	1	8	13
2 Կ1	11	21 Կ3	24	9
20	16	19	22 Կ4	25 Կ5
4	3	14	7	23
18	15	17	6	12

Լուծում:Նկատենք, որ անկախ թվերի դասավորությունից արքան տախտակի ցանկացած 2x2 չափերով քառակուսու ներսում կարող է կատարել երեք քայլ (սկզբում գտնվելով ամենափոքր թիվը պարունակվող քառակուսիում, այնուհետև կատարելով երեք քայլ ըստ աճման հերթականությամբ):

Մնում է ցույց տալ, որ միշտ էլ տախտակի վրա թվերը կարելի է դասավորել այնպես, որ արքան երեք քայլից ավել չկարողանա կատարել: Այդպիսի բաժանման օրինակ բերված է նկ. 2-ում: Սկզբում առանձնացված 2x2, 2x1, 1x1 ուղղանկյունների ձախ վերին անկյուններում տեղադրենք 1; 2; 3; 4;......9 թվերը, այնուհետև աջ վերին անկյուններում՝ 10; 11;...15 թվերը, ձախ ստորին անկյուններում՝ 16; 17;....20; 21 թվերը և վերջապես մնացած վանդակներում՝ 22; 23;24; 25 թվերը: Այսպիսի տախտակի վրա թագավորը երեք քայլից ավել չի կարող կատարել:

Պատասխան՝ 4:

1	10	2	11	3
16	22	17	23	18
4	12	5	13	6
19	24	20	25	21
7	14	8	15	9

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏԱԿԱՆ ՕԼԻՄՊԻԱԴԱ

8-րդ դասարանի երկրորդ օրվա չափանիշներ

4.

$b > 3 \Rightarrow a < 3$ — 2 միավոր

$$a = 1 \Rightarrow \frac{2^4(b-3)}{b} \in N$$

$(b, b-3) = 1 \Rightarrow b = 4, 8, 16$ — +2 միավոր

$(b, b-3) = 3 \Rightarrow b = 6, 12, 24, 48$ — +1 միավոր

$a = 2 \Rightarrow$ լուծում չունի — +1 միավոր

$k = 4, 8, 10, 12, 13, 14, 15$ — +1 միավոր :

Դիտողություն. $b > 3$ փաստը չօգտագործելով անհիմն $(a-3)^4 > a^4$ պնդելու համար հանել 1 միավոր:

5.

$AF \parallel BD$ — 2 միավոր.

$FM = AM$ — +2 միավոր.

CF պրամագիծ է — +2 միավոր,

ավարտել — +1 միավոր :

Այլընտրանքային լուծում

AK պրամագծի կառուցում — 2 միավոր,

$OM \parallel AC$, — +2 միավոր,

$\Delta MOK = \Delta MOC$, — +2 միավոր,

ավարտել — +1 միավոր :

6.

Յանկացած փախպակի վրա հնարավոր է 4 երկարությամբ հետք թողնել — 3 միավոր,

Յանկացած 2խ2 քառակուսում հնարավոր է 4 երկարությամբ հետք թողնել — +1 միավոր,

Բերել օրինակ, որտեղ 4-ից երկար հետք հնարավոր չէ թողնել , — +3 միավոր :