1)Դիցուք տրված է $\frac{x}{y}+\frac{x+1}{y+1}=n$ հավասարումը, որտեղ x,y,n թվերը բնական են:

ա) Լուծեք հավասարումը, երբ n=6:

բ)Ապացուցեք, որ գոյություն ունի n-ի անվերջ շատ արժեքներ այնպես, որոնց դեպքում հավասարումը լուծում ունի:

Լուծում 1ա: $\frac{x}{y}+\frac{x+1}{y+1}=6 \Leftrightarrow x=\frac{6y^2+5y}{2y+1}=3y+\frac{2y}{2y+1}$: Քանի, 2y<2y+1 որ $\frac{2y}{2y+1}\notin N$, հետևաբար : $\frac{x}{y}+\frac{x+1}{y+1}=6$ հավասարումը բնական թվերով լուծում չունի:

Լուծում 1բ

Դիցուք y=1, որտեղից է $\frac{x}{1}+\frac{x+1}{2}=n$, հետևաբար է $\frac{3x+1}{2}=n$:

Երբ x=2k+1, ապա n= 3k+2, հետևաբար n=3k+2 տեսքի թվերի համար (2k+1,1), $k \in$ N թվազույգը հավասարման լուծում է:

2)ABC (AB>AC)եռանկյան արտագծած շրջանագծին A կետով տարված է շոշափողը BC ուղիղը հատում է K կետում, ընդորում CK<BC, իսկ B կետով AK-ին տարված զուգահեռ ուղիղը AC ուղիղը հատում է D կետում: Դիցուք E-ն A կետի համաչափն է B կետի նկատմամբ, F-ը A-ի համաչափն է D կետի նկատմամբ, իսկ P-ն A-ի համաչափն է C կետի նկատմամբ: Ապացուցեք, որ

1)P կետը պատկանում է CD հատվածին

2) $\angle CBP=\angle DEF$:

Լուծում 1)Քանի, որ$\varDelta ACK\sim\varDelta BDC$, հետևաբար $\frac{BC}{CK}=\frac{DC}{AC}>1$, որտեղից DC>CP, հետևաբար P կետը պատկանում է CD հատվածին

Լուծում 2): Քանի, որ $\angle KAC=\angle ABC$ և AB=BE ,AC=CP, ուստի $BC\parallel EP$, որտեղից $\angle KAC=\angle ABC=\angle AEP$: Քանի, որ $AK\parallel BD$, ուստի $\angle BDP=\angle DAK$, որտեղից $\angle BEP=\angle BDP$, որտեղից B,E,D,P կետերով անցնում է շրջանագիծ, հետևաբար $\angle ABP=\angle PDE$:

Քանի, որ $EF\parallel BD$, ուստի $\angle BDP=\angle EFA$, հետևաբար $\angle CBP=\angle ABP-\angle ABC=\angle PDE-\angle BDP=\angle PDE-\angle DFE=\angle DEF$:

3) Մաթեմիայում կա 20 քաղաք, որոնք իրար են միացված ավտոմոբիլային ճանապարհներով: Բարեփոխումների շրջանակում Մաթեմիայի թագավորը հանձնարարում է ցանկացած երկու քաղաքների միջև ապահովել կա՛մ օդային (ինքնաթիռով) կա՛մ երկաթուղային (գնացքով) տրանսպորտային կապ, ընդ որում երկու քաղաքների միջև չի միաժամանակ կարող լինել երկաթուղային և օդային կապ: Մաթեմիայի թագավորը վախենում է ինքնաթիռով թռիչքներից, ուստի տրանսպորտի նախարարը ցանկանում է այնպես կազմակերպել երթևեկությունը, որ թագավորը ցանկացած քաղաքից ցանկացած այլ քաղաք կարողանա հասնել գնացքի միջոցով: Առավելագույնը քանի՞ օդային երթուղի պետք է թույլատրել Մաթեմիայում, որպեսզի ավիաընկերությունների կողմից օդային թռիչքների կազմակերպումից անկախ թագավորը կարողանա այցելել բոլոր քաղաքները:

Լուծում: Հարթության վրա քաղաքները նկարենք կետի տեսքով և $A_1, A_2, \dots, A_{20}$: Ինքնթիռով ճանապարհները ներկենք սպիտակ, իսկ երկաթգծի ճանապարհները՝ սև:

Լուծում: Դիցուք A_1A_2, A_1A_3, $A_1A_4, \cdots, A_1A_{20}$ ճանապարհները ներկված են սպիտակ գույնով: Այդ դեպքում մրջյունը A_1-ից A_2 սև ճանապարհով չի կարող տեղաշարժվել, հետևաբար

$n \leq 18$: Ապացուցենք, որ $n = 18$ դեպքում կամայական ձևով ներկելու դեպքում մրջյունը կամայական կետից կարող է տեղաշարժվել կամայական այլ կետ անցնելով միայն սև ճանապարհներով: Քանի, որ ճանապարհների քանակը $\frac{20 \cdot 19}{2} = 190$, որտեղից սև ճանապարհների քանակը է 172, հետևաբար գոյություն ունի կետ, որից դուրս է գալիս առնվազն 9 սև ճանապարհ: Ենթադրենք այդ կետը A_1-ն է և այն միացված է սև ճանապարհով $A_2, A_3, \dots, A_{10}$ կետերի հետ: Ենթադրենք A_1-ից A_{11} հնարավոր չէ տեղաշարժվել սև ճանապարհներով: Այդ դեպքում A_1A_{11}, A_2A_{11} $A_3A_{11,}, \cdots, A_{10}A_{11}$ ճանապարհները սպիտակ են և գոյություն ունի $A_i (i = 12,13, \dots .20)$կետ այնպես, որ $A_{11}A_i$ճանապարհներից գոնե մեկը սև է, հակառակ դեպքում սպիտակ ճանապահների քանակը մեծ կամ հավասար է 19: Ենթադրենք $A_{11}A_{12}$ սև է: Այդ դեպքում A_{12}-ը $A_2, A_3, \cdots, A_{10}$ կետերից գոնե մեկի հետ միացված է սև ճանապարհով, հակառակ դեպքումA_2A_{12}, A_3A_{12} $A_4A_{12,}, \cdots, A_{10}A_{12}$ ճանապարհները սպիտակ են և A_1A_{11}, A_2A_{11} $A_3A_{11,}, \cdots, A_{10}A_{11}$ ևս ճանապարհները սպիտակ էին, որտեղից $n \geq 19$, որը հակասություն է: