1) Դիցուք տրված է $\frac{x}{y}+\frac{x+1}{y+1}+\frac{x+2}{y+2}=n$ հավասարումը, որտեղ x,y,n թվերը բնական են:

1.1) Լուծեք հավասարումը, երբ n=3:

1.2)Ապացուցեք, որ գոյություն ունի n-ի անվերջ շատ արժեքներ այնպես, որոնց դեպքում հավասարումը լուծում ունի:

Լուծում 1.1:

1) Դիցուք $\frac{x}{y}+\frac{x+1}{y+1}+\frac{x+2}{y+2}$=$\frac{x(y+1)(y+2)+y(x+1)(y+2)+y(y+1)(x+2)}{y(y+1)(y+2)}$: Քանի, որ $(y+1,y)=(y+1,y+2)=1$, հետևաբար y$(y+2)(x+1) ⁝ (y+1)$, որտեղից $\frac{x+1}{y+1}\in$ N, հետևաբար՝

$x \geq y$: Երբ $x>y$, ապա$\frac{x}{y}+\frac{x+1}{y+1}+\frac{x+2}{y+2}>3$, հետևաբար հավասարման լուծումն է (k,k), $k\in$ N թվազույգը

2) $\frac{x}{y}+\frac{x+1}{y+1}+\frac{x+2}{y+2}$ -3=$(\frac{x}{y}-1)+(\frac{x+1}{y+1}-1)+(\frac{x+2}{y+2}-1)=(x-y)(\frac{1}{y}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{y+2})=0$

հետևաբար հավասարման լուծումն է (k,k), $k\in$ N թվազույգը:

Լուծում 1.2

Դիցուք y=1, որտեղից $\frac{x}{1}+\frac{x+1}{2}+\frac{x+2}{3}=n$, հետևաբար $\frac{11x+7}{6}=n$:

Երբ x=6k+1, ապա n= 11k+3, հետևաբար n=11k+3 տեսքի թվերի համար (6k+1,1), $k\in$ N թվազույգը հավասարման լուծում է:

2) Դիցուք ABC(AC<AB) եռանկյունում H-ը բ արձրությունների հատման կետն է, իսկ M-ը BC կողմի միջնակետն է: AB և AC կողմերի վրա վերցրել են X և Y կետեր այնպես, որ AH ուղիղը կիսում XY հատվածը: Ապացուցել, որ MH և XY ուղիղները փոխուղղահայաց են:

Լուծում: Դիցուք C կետից տարված XY-ին զուգահեռ ուղիղը AP բարձրությունը հատում է E կետում, իսկ AB կողմը՝ D կետում: Այդ դեպքում CE=ED: Քանի, որ CE=ED, CM=MB, հետևաբար $ME \parallel BA$, որտեղից $ME\perp CH$: Քանի, $ME\perp CH$ և $HE\perp CM$ հետևաբար $CE\perp MH$, որտեղից $XY\perp MH$:

Խնդիր 1. Շախմատի մրցաշարին մասնակցեցին n շախմատիստներ և նրանցից յուրաքանչյուր երկուսն իրար հետ խաղացին մեկական անգամ: Յուրաքանչյուր շախմատիստ հաղթանակի համար ստացավ 1 միավոր, իսկ ոչ-ոքիի համար 0.5 միավոր: Դիցուք $a_1, a_2, \ldots a_n$ թվերը համապատասխանաբար $1, 2, 3, \ldots, n$ շախմատիստների վաստակած միավորներն են: Ապացուցել, որ

$$\frac{1}{(a_1+1)(a_1+2)} + \frac{1}{(a_2+1)(a_2+2)} + \ldots + \frac{1}{(a_n+1)(a_n+2)} < 1:$$

Սոլուտիոն 0.1. Նախքան խնդիրը լուծելն ապացուցենք մեկ փաստ: Դիցուք $1 \le x \le y$: Այդ դեպքում

$$\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{y(y+1)} < \frac{1}{(x-0.5)(x+0.5)} + \frac{1}{(y+0.5)(y+1.5)}. \tag{1}$$

Ապացույցը կատարենք հետևյալ համարժեք ձևափոխությունների շարքով:

$$\frac{1}{y(y+1)} - \frac{1}{(y+0.5)(y+1.5)} < \frac{1}{(x-0.5)(x+0.5)} - \frac{1}{x(x+1)}.$$

$$\frac{y+0.75}{y(y+0.5)(y+1)(y+1.5)} < \frac{x+0.25}{x(x-0.5)(x+0.5)(x+1)}.$$

$$\frac{y+0.75}{y(y+0.5)(y+1)(y+1.5)} < \frac{1}{y(y+0.5)(y+1.5)} <$$

$$\frac{1}{(x-0.5)(x+0.5)(x+1)} < \frac{x+0.25}{x(x-0.5)(x+0.5)(x+1)}.$$

Վերջին տողի անհավասարությունը գրելիս օգտվեցինք որ

$$\frac{1}{y+0.5} < \frac{1}{x+0.5}$$

և

$$\frac{1}{y(y+1.5)} < \frac{1}{(x-0.5)(x+1)}:$$

Դիտարկենք դասավորություն, որում խնդրում պահանջվող արտահայտության արժեքը մեծագույնն է և դիտարկենք որևէ i և j խաղացողների: Դիցուք $a_i \le a_j$: Եթե i-րդ խաղացողը ոչ ոքի է խաղացել j-րդ խաղացողի հետ, ապա (1) անհավասարությունը կիրառելով $(x, y) = (a_i+1, a_j+1)$ թվազգույգի համար կտեսնենք, որ եթե այդ խաղի արդյունքը փոխենք i—րդ խաղացողի համար պարտությամբ, ապա ընդհանուր գումարը կմեծանա: Նույնը տեղի կունենա, եթե հաղթած լիներ ու այն փոխենք ոչ-ոքիով: Այստեղից եզրակացնում ենք, որ շատ միավոր հավաքողը հաղթել է ավելի քիչ միավոր ունեցողին: Այսինքն մրցաշարի հաղթողը հաղթել է բոլորին, երկրորդ տեղ գրավածը հաղթել է բոլորին, բացառությամբ հաղթողից և այսպես շարունակ, վերջին տեղ գրավողը պարտվել է բոլորին: Այսինքն խաղացողներին ըստ միավորների աճման կարգով դասավորելու դեպքում կստանանք $a_i = i - 1$: Այդ դեպքում

$$\frac{1}{(a_1+1)(a_1+2)} + \frac{1}{(a_2+1)(a_2+2)} + \ldots + \frac{1}{(a_n+1)(a_n+2)} =$$

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1:$$