

Խնդիր 4) Գտեք $\frac{3a+1}{b+1} + \frac{3b+1}{a+1}$ արտահայտության փոքրագույն արժեքը, որտեղ $a, b > 0$ և $ab = 1$:

Լուծում1: $\frac{3a+1}{b+1} + \frac{3b+1}{a+1} = \frac{3a^2+3b^2+4a+4b+2}{ab+a+b+1} = \frac{3(a+b)^2-6ab+4a+4b+2}{a+b+2} = \frac{3(a+b)^2+4(a+b)-4}{a+b+2} = \frac{(3a+3b-2)(a+b+2)}{a+b+2} = 3a + 3b - 2 \geq 3 \cdot 2\sqrt{ab} - 2 = 4$, հետևաբար $\frac{3a+1}{b+1} + \frac{3b+1}{a+1}$ արտահայտության արժեքը հավասար է 4, երբ $a=b=1$:

Լուծում2: $\frac{3a+1}{b+1} + \frac{3b+1}{a+1} = \frac{3a^2+3b^2+4a+4b+2}{ab+a+b+1} \geq \frac{6ab+4a+4b+2}{a+b+2} = \frac{4(a+b+2)}{a+b+2} = 4$, հետևաբար $\frac{3a+1}{b+1} + \frac{3b+1}{a+1}$ արտահայտության արժեքը հավասար է 4, երբ $a=b=1$:

Խնդիր 5) AA_1 -ը և CC_1 -ը ABC սուրանկյուն եռանկյան բարձրություններն են: P -ն և Q -ն համապատասխանաբար AA_1C և CC_1A եռանկյունների ներգծած շրջանագծերի կենտրոններն են: Դիցուք PQ ուղիղը AB և BC հատվածները հատում է համապատասխանաբար E և F կետերում: Ապացուցել, որ BEF եռանկյունը հավասարասրուն է:

Լուծում: $\angle APC = 180^\circ - (\angle PAC + \angle PCA) = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle A_1CA + \angle A_1AC) = 135^\circ$: Նմանապես $\angle AQC = 135^\circ$: Քանի, որ $\angle APC = \angle AQC = 135^\circ$, հետևաբար A, Q, P, C կետերով անցնում է շրջանագիծ, հետևաբար $\angle BEF = \angle EAQ + \angle EQA = \angle EAQ + \angle PCA = \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle BCA)$, իսկ $\angle BFE = \angle FCP + \angle FPC = \angle FCP + \angle QAC = \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle BCA)$: Ստացվեց, որ $\angle BEF = \angle BFE$, հետևաբար $BE=BF$:

Խնդիր 6) Գրատախտակին գրված 1-ից n թվերից յուրաքանչյուրը ներկված է կարմիր կամ կանաչ, ընդ որում՝ n -ը ներկված է կարմիր: Ներկումը կանվանենք «գեղեցիկ», եթե ցանկացած երկու տարբեր տարագույն թվերի գումարը կանաչ է, իսկ արտադրյալը՝ կարմիր: Գտնել «գեղեցիկ» ներկումների քանակը:

Լուծում: Դիտարկենք որևէ գեղեցիկ ներկում:

Ենթադրենք 1 թիվը ներկված է կարմիր: Այդ դեպքում, եթե գոյություն ունենա կանաչ ներկված որևէ m թիվ, ապա վերցնելով $(1, m)$ տարագույն թվագույգը, կարող ենք ասել, որ $1 \cdot m$ -ը պետք է լինի կարմիր և կգանք հակասության: Ուստի, եթե 1-ը ներկված է կարմիր, ապա բոլոր թվերը ներկված կլինեն կարմիր:

Այժմ դիտարկենք այն դեպքը, երբ 1-ը կանաչ է: Ամենափոքր կարմիր թիվը նշանակենք k -ով: 1, 2, 3, ..., $k-1$ թվերը կանաչ են, իսկ k -ն կարմիր, ուստի դիտարկելով $(1, k)$, $(2, k)$, ..., $(k-1, k)$ տարագույն թվագույգերը, կարող ենք եզրակացնել, որ $k+1, k+2, \dots, 2k-1$ թվերը կանաչ են:

Հիմա դիտարկենք $(k, k+1)$, $(k, k+2)$, ..., $(k, 2k-1)$ թվագույգերը:

Դրանք նույնպես տարագույն են, ուստի $2k+1, 2k+2, \dots, 3k-1$ թվերը նույնես կանաչ են:

Դիտարկելով $(mk+1, k), (mk+2, k), \dots, ((m+1)k-1, k)$ տարագույն թվագույգերը, կստանանք, որ $(m+1)k+1, (m+1)k+2, \dots, (m+2)k-1$ թվերը նույնպես կանաչ են:

Այսպիսով ստացանք, որ երբ k -ն ամենափոքր կարմիր թիվն է, ապա ցանկացած թիվ, որը չի բաժանվում k -ի՝ կանաչ է: Քանի որ n -ը կարմիր էր, ապա, k -ն պետք է լինի n -ի բաժանարար:

Հիմա հասկանանք, թե ինչ գույն են այն թվերը, որոնք բաժանվում են k -ի:

Դիտարկելով $(1, k), (2, k), \dots, (k-1, k), (k+1, k), \dots, (2k-1, k), (2k+1, k), \dots$ թվերը, կարող ենք եզրակացնել, որ $k(mk+r)$ տեսքի բոլոր թվերը կարմիր են, որտեղ m -ը ցանկացած բնական թիվ է, իսկ $0 < r < k$:

Այժմ դիտարկենք tk^l տեսքի որևէ թիվ, որտեղ $l > 1$: Եթե $=n$, ապա համաձայն խնդրի պայմանի, այն կարմիր է:

Եթե $tk^l < n$, ապա գիտենք, որ tk^l+k -ն կարմիր է: Եթե tk^l -ը լիներ կանաչ, ապա (k, tk^l) թվագույգը կլիներ տարագույն և tk^l+k թիվը կլիներ կանաչ, ինչը հնարավոր չէ, ուստի tk^l տեսքի բոլոր թվերը ևս կարմիր են:

Այսպիսով ստացանք, որ k -ի բաժանվող բոլոր թվերը կարմիր են, իսկ չբաժանվողները՝ կանաչ:

Ուստի ներկման տարբերակների քանակը հավասար է n -ի բաժանարարների քանակին:

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ՆԱՆՐԱՊԵՏԱԿԱՆ ՕԼԻՄՊԻԱԴԱ

9-րդ դասարանի երկրորդ օրվա չափանիշներ

4.

$$\frac{3a+1}{b+1} + \frac{3b+1}{a+1} = \frac{3a^2 + 3b^2 + 4a + 4b + 2}{a+b+2} \quad 1 \text{ միավոր,}$$

$$\frac{3a+1}{b+1} + \frac{3b+1}{a+1} = 3(a+b)^2 + 4(a+b) - 4a + b + 2 \quad +1 \text{ միավոր,}$$

$$\frac{3a+1}{b+1} + \frac{3b+1}{a+1} = 3a + 3b - 2, \quad +2 \text{ միավոր,}$$

$$\frac{3a+1}{b+1} + \frac{3b+1}{a+1} \geq 6\sqrt{ab} - 2, \quad +2 \text{ միավոր,}$$

ավարտել +1 միավոր :

2-րդ եղանակ.

$$\frac{3a+1}{b+1} + \frac{3b+1}{a+1} = \frac{3a^2 + 3b^2 + 4a + 4b + 2}{a+b+2} \quad 1 \text{ միավոր,}$$

$$\frac{3a+1}{b+1} + \frac{3b+1}{a+1} \geq \frac{6ab + 4a + 4b + 2}{a+b+2} \quad +3 \text{ միավոր,}$$

$$\frac{3a+1}{b+1} + \frac{3b+1}{a+1} \geq 4 \quad +2 \text{ միավոր,}$$

ավարտել +1 միավոր :

5.

$$\angle AQC = 135^\circ \quad \text{կամ} \quad \angle APC = 135^\circ. \quad 1 \text{ միավոր.}$$

$$\angle APC = \angle AQC \quad +1 \text{ միավոր}$$

$AQPC$ – ին կարելի է արտագծել շրջանագիծ +2 միավոր

ավարտել +3 միավոր :

6.

գեղեցիկ ներկումների բանակը, երբ 1-ը կարմիր է 1 միավոր,

1-ը կանաչ դեպքում դիտարկել ամենավոքը կարմիր թիվը (կ), 1 միավոր,

k -ի չբաժանվողները կանաչ են +2 միավոր,

k -ի բաժանվողները կարմիր են +2 միավոր,

ավարտել +1 միավոր :