XI-XII

1) Դիցուք x,y, $\frac{x}{y}+\frac{x+1}{y+1}+\frac{x+2}{y+2}$ թվերը բնական են: Ապացուցեք, որ $\frac{x}{y},\frac{x+1}{y+1},\frac{x+2}{y+2}$ թվերից յուրաքանչյուրը բնական է:

Լուծում 1: Դիցուք $\frac{x}{y}+\frac{x+1}{y+1}+\frac{x+2}{y+2}=\frac{x(y+1)(y+2)+y(x+1)(y+2)+y(y+1)(x+2)}{y(y+1)(y+2)}$: Քանի, որ $(y+1,y)=(y+1,y+2)=1$, հետևաբար $y(y+2)(x+1) ⋮ (y+1)$, որտեղից $\frac{x+1}{y+1}\in$ N, հետևաբար

$\frac{x}{y}+\frac{x+2}{y+2}=\frac{x(y+2)+y(x+2)}{y(y+2)}\in$ N:

1) $(y,y+2)=1 \Rightarrow x(y+2) ⋮ y \Rightarrow \frac{x}{y}\in$ N $\Rightarrow \frac{x+2}{y+2}\in$ N:

2) $(y,y+2)=2 \Rightarrow x⋮ \frac{y}{2}, x+1 ⋮ \frac{y+2}{2}$ ։ Քանի, որ $\frac{x(y+2)+y(x+2)}{y(y+2)}$ կոտորակի հայտարարը բաժանվում է 4-ի, հետևաբար x-ը զույգ թիվ է, իսկ y,y+ 2 թվերից մեկը բաժանվում է 2-ի, բայց չի բաժանվում 4-ի:

Ենթադրենք y-ը բաժանվում է 2-ի, բայց չի բաժանվում 4-ի: Այդ դեպքում $\frac{x}{y}\in$ N, $\frac{x}{y}+\frac{x+2}{y+2}\in$ N: որտեղից $\frac{x+2}{y+2}\in$ N

Լուծում 2: $\frac{x}{y}+\frac{x+1}{y+1}+\frac{x+2}{y+2}$ -3=$(\frac{x}{y}-1)+(\frac{x+1}{y+1}-1)+(\frac{x+2}{y+2}-1)=(x-y)(\frac{1}{y}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{y+2})=$

$(x-y)\frac{(y+1)(y+2)+y(y+2)+y(y+1)}{y(y+1)(y+2)}$:

1) $(y,y+2)=1 \Rightarrow$ x=k y(y+1)$(y+2)+y \Rightarrow \frac{x}{y},\frac{x+1}{y+1}\frac{x+2}{y+2}\in$ N:

1) $(y,y+2)=2 \Rightarrow$ x=$\frac{\mathrm{k\,y(y+1)}(y+2)}{2}+y \Rightarrow \frac{x}{y},\frac{x+1}{y+1}\frac{x+2}{y+2}\in$ N:

2) Շրջանագիծը շոշափում է ABC (AB<BC)եռանկյան AC կողմը E կետում, իսկ BA և BC կողմերի շարունակությունը համապատասխանաբար K և F կետերում: A կենտրոնով և AE շառավիղով շրջանագիծը EF ուղիղը հատում է E-ից տարբեր L կետում, իսկ C կենտրոնով և CE շառավիղով շրջանագիծը KE ուղիղը հատում է E-ից տարբեր H կետում: Դիցուք AKE և CFE եռանկյունների արտագծած շրջանագծերը համապատասխանաբար LF և KH հատվածներ հատում են համապատասխանաբար M և N կետերում: Ապացուցեք, որ

$MN = \frac{KL-FH}{2}$:

Լուծում: Քանի, որ $\angle AKE = \angle AEK = \angle KFE = \alpha \Longrightarrow \angle KLE = \frac{1}{2}\angle KAE = 90^0 - \alpha \Longrightarrow \angle LKF = 90^0$:

Քանի, որ $\angle KME = \angle KAE = 180^0 - 2\alpha$ և $\angle KLE = 90^0 - \alpha \Longrightarrow \angle LKM = 90^0 - \alpha \Longrightarrow LM = KM$:

Քանի, որ $\angle LMK = 2\alpha$ և $\angle MFK = \alpha \Longrightarrow \angle MKF = \alpha \Longrightarrow MF = KM$, հետևաբար M-ը LF հատվածի միջնակետն է: Նմանապես N-ը KH հատվածի միջնակետն է:

Քանի, որ $\angle CEF = \angle CFE = \angle EKF = \gamma$ և $\alpha > \gamma \Longrightarrow 90^0 - \alpha < 90^0 - \gamma \Longrightarrow \angle LKE > \angle LKM$ հետևաբար M-ը պատկանում է LE հատվածին, հետևաբար LE>EF, իսկ $\frac{LE}{EF} = \frac{LK}{HF} > 1$:

LKFH քառանկյունում $LK \parallel HF$, հետևաբար LF և KH հատվածների միջնակետերը գտնվում են LH և KF հատվածների միջնակետերը միացնող հատվածի վրա: Դիցուք MN ուղիղը KF-ը հատում է R կետում: Այդ դեպքում՝ MN=MR-NR=$\frac{LK-HF}{2}$:

3) Շրջանագծի վրա վերցրել են $A_{1,}A_{2,} \dots, A_{10}$ կետերը և կամայական երկու կետ միացնող հատված ներկել են $k_0, k_1, \dots, k_n$ գույներից որևէ մեկով: Եթե A_iA_j հատվածը ներկված է k_0-ից տարբեր գույնով, ապա գոյություն ունի A_p կետ, որ A_pA_i և A_pA_j հատվածները ներկված են k_0 գույնով: Գտեք n-ի հնարավոր մեծագույն արժեքը:

Լուծում:

1)Ապացուցենք, որ կամայական A_i կետի համար գոյություն ունի A_j կետ այնպես, որ A_iA_j հատվածը ներկված է k_0 գույնով: Հակառակ դեպքում k_0-ից տարբեր գույնով ներկված A_iA_j հատվածի համար գոյություն չունի A_l կետ, որ A_iA_lև A_lA_jհատվածները ներկված են k_0 գույնով :

2)Ապացուցենք, որ k_0 գույնով ներկված հատվածները փոխկապակցված են: Դիցուք k_0 գույնով ներկված A_iA_j և A_pA_q հատվածները փոխկապակցված չեն: Այդ դեպքում A_iA_q հատվածը ներկված է այլ գույնով և գոյություն չունի A_x կետ, որ A_iA_x և A_qA_x հատվածները ներկված են k_0 գույնով քանի, որ A_i, A_j, A_p, A_q կետերը A_x գագաթով կփոխկապակցվեն. հետևաբար k_0 գույնով ներկված հատվածների փոքրագույն քանակը հավասար է 9:

3) Դիցուք $A_1A_i(i = 2,3, \dots, 10)$ հատվածները ներկված են k_0 գույնով , իսկ մնացած $C_{10}^2 - 9 = 36$ հատվածները 36 զույգ առ զույգ տարբեր գույներով,որտեղից n=36: